Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 10-15
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149321

关于等价无穷小使用条件的探讨

沈华杰

武警海警学院基础部，浙江 宁波

收稿日期：2024年8月3日；录用日期：2024年8月29日；发布日期：2024年9月5日

摘 要

等价无穷小是极限理论的一个重要组成部分，选取合适的等价无穷小代换，可以极大地简化极限问题的处理。使用等价无穷小需要满足一定的条件，很多学习者对等价无穷小代换的使用条件认识不深，经常错用等价无穷小代换。针对这个问题，本文通过等价无穷小的本质对等价无穷小代换的使用条件进行解析，使学习者能够充分认识并理解等价无穷小的使用条件，理解和掌握等价无穷小的应用，对于深入学习和应用微积分知识具有重要的作用。

关键词

无穷小之比，等价无穷小代换，极限计算，泰勒公式

Discussion on the Conditions for Using Equivalent Infinitesimal

Huajie Shen

Basic Courses Department, China Coast Guard Academy, Ningbo Zhejiang

Received: Aug. 3rd, 2024; accepted: Aug. 29th, 2024; published: Sep. 5th, 2024

Abstract

Equivalent infinitesimal is an important component of limit theory, and selecting appropriate equivalent infinitesimal substitutions can greatly simplify the handling of limit problems. The use of equivalent infinitesimal substitution requires certain conditions to be met, and many learners have a limited understanding of the conditions for using equivalent infinitesimal substitution and often misuse it. In response to this issue, this article analyzes the usage conditions of equivalent infinitesimal substitution through the essence of equivalent infinitesimal, enabling learners to fully understand and comprehend the usage conditions of equivalent infinitesimal, understand and master the applications of equivalent infinitesimal, which plays an important role in in-depth learning and application of micro integration knowledge.

文章引用: 沈华杰. 关于等价无穷小使用条件的探讨[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 10-15.
DOI: 10.12677/pm.2024.149321

Keywords

Ratio of Infinitesimals, Substitution by Equivalent Infinitesimal, Limit Calculation, Taylor's Formula

1. 引言

在微积分学中，等价无穷小是极限理论中一个极其重要的概念，它在微积分学、微分方程、级数理论等多个数学领域中都有广泛的应用，是一种非常有用的工具。它通过定义两个无穷小量之间的等价关系，在一定条件下将一个复杂的函数替换为另一个与之等价的简单函数，从而简化表达式而不改变其极限值，极大地简化了极限问题的处理，也有力地推进了数学研究的深入发展。使用等价无穷小需要满足一定的条件，经典教材上强调乘除因子可以直接进行等价代换，对于有加减项的不能直接代换没有做过多的说明，让人疑惑不解，很多学者对使用条件进行了相应的研究，获得了一定的成果[1]-[4]，但是很多学习者在学习过程中对等价无穷小的使用条件的认识还比较浅显，在实际应用中，经常错误使用等价无穷小而导致计算结果错误。为了彻底搞明白等价无穷小的使用条件，本文将理清等价无穷小的本质，借助泰勒公式深入探讨等价无穷小的使用条件，通过例题详细解析，使学习者能够对等价无穷小代换的使用条件有充分的认识和理解。正确理解和应用这些条件，对于深入学习和应用微积分知识具有重要的作用。

2. 等价无穷小代换的相关知识

2.1. 定义定理

定义 1 [5]：如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$)时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$)时的无穷小。

注解：无穷小是在自变量的某一变化过程中，以 0 为极限的函数，注意 0 是特殊的无穷小量，但无穷小量不是 0。

定理 1 [5]：在自变量的同一变化过程中 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$)中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小。

定义 2 [5]：α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$，$\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$。

定理 2 [5] $\beta \sim \alpha$ 的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$。

定理 3 [5] 若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$。

2.2. 高阶无穷小的运算规则[6]

高阶无穷小的运算规则：当 $x \to 0$ 时，

(a) $o\left(x^{n}\right) \pm o\left(x^{n}\right)=o\left(x^{n}\right)$ (同阶加减，阶数不变)；

(b) 当 $m>n$ 时，$o\left(x^{m}\right) \pm o\left(x^{n}\right)=o\left(x^{n}\right)$ (不同阶加减，取次数低)。

(c) $k \cdot o\left(x^{n}\right)=o\left(x^{n}\right)$ (常数 k 乘以高阶无穷小，阶数不变)。

2.3. 常用的泰勒展开函数

几个常用函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的带有佩亚诺余项的泰勒展开式：

$$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o\left(x^{n}\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3} x^{3}+\frac{2}{15} x^{5}+\frac{17}{315} x^{7}+\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^{n}\left(1-4^{n}\right)}{(2n)!} x^{2n-1}+o\left(x^{2n-1}\right)，\text{其中 } B_{2n} \text{ 是伯努利数。}$$

$$\ln (1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n}+o\left(x^{n}\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+o\left(x^{n}\right)。$$

3. 等价无穷小常见错误类型解析

3.1. 等价代换后误差被忽略

例 1 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$。

错误解法： 当 $x \rightarrow 0$ 时，直接把 $\tan x \sim x$ 和 $\sin x \sim x$ 直接带入得 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{x^{3}}=0$。

问题原因： 当 $x \rightarrow 0$ 时，将 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 式子直接等价无穷小，而 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\tan x-\sin x}=0$，不符合等价无穷小定义，所以 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x=0$ 不是等价无穷小。另外，由等价无穷小充分必要条件得 $\sin x=x+o(x)$，$\tan x=x+o(x)$，所以 $\tan x-\sin x=o(x)-o(x)$，而 $o(x)-o(x)=0$ 是错误的，比如当 $x \rightarrow 0$ 时，$x^{2}=o(x)$，$x^{3}=o(x)$，但是 $x^{2}-x^{3} \neq 0$，所以 $o(x)-o(x)$ 不一定是 0，只能确定是比 x 的高阶无穷小，即 $\tan x-\sin x=o(x)$，但不确定阶数，所以极限 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^{3}}$ 就无法计算。错解中省略了 $o(x)$，默认了是比 x^{3} 高阶的无穷小，因误差精度不够而导致计算错误。

正确解法(1)： $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^{3}}=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^{2}}{x^{3}}=\frac{1}{2}$。

在乘积或除法运算中，如果某一部分的因子或除数可以表示为另一个与之等价的无穷小，则可以直接进行替换，而不影响整个表达式的极限值。

正确解法(2)： 由泰勒公式可得 $\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)$，$\tan x=x+\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)-o\left(x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{2}。$$

等价无穷小的本质是函数逼近，可以看成泰勒公式的一阶展开，忽略了一阶后面的项，容易因为精度不足引起等价无穷小代换的失败。解法(2)充分考虑到了精度问题，利用泰勒公式展开第一项后面的高阶项来近似，得到了正确解。

3.2. 局部乘法因子被替换

例 2 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+3x\right)}{x^2}-\frac{3}{x}\right)$。

错误解法： 把 $\ln\left(1+3x\right)\sim 3x\left(x\to 0\right)$ 直接带入得原式得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+3x\right)}{x^2}-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{x^2}-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x}\right)=0。$$

问题原因： 待求极限的整个式子不是整体乘法因子，只是局部乘法因子，不能局部代换。

正确解法(1)： 把待求极限式子化成整体乘法因子型后利用洛必达法则求得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+3x\right)}{x^2}-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x\right)-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}-3}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{9}{2\left(1+3x\right)}\right)=-\frac{9}{2}。$$

对于不是整体乘法因子型的，要避免直接局部代换，先化成整体乘法因子再选择合适的方法计算。

正确解法(2)： 当 $x\to 0$ 时，由泰勒公式得 $\ln\left(1+3x\right)=3x-\frac{9x^2}{2}+o\left(x^2\right)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+3x\right)}{x^2}-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x\right)-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^2}{2}+o\left(x^2\right)-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{9}{2}。$$

对于乘法因子不能整体代换时，可以尝试泰勒公式求解，要注意精度。

3.3. 分式“上下不同阶”

分式“上下同阶”指的是对于分式 $\frac{A}{B}$ 型，如果分母(或分子)是 x 的 k 次方，则应把分子(或分母)按泰勒公式展开到 x 的 k 次方，称之为“上下同阶”原则[7]。

例 3 计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\left(x-2\right)+x+2}{\sin^3 x}$。

错误解法： $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\left(x-2\right)+x+2}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(x-2\right)+x+2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o\left(x^2\right)}{x^3}=\frac{1}{2}$。

错误原因： 分子中 $x-2$ 这一项中有常数 2，e^x 在展开时没有展开到与分母相同阶数的 3 次项，只展开到了 2 次项，与 2 相乘结果的最高次幂低于分母的 3 次幂，导致分式“上下不同阶”，精度丢失较大，引发错误。

正确解法： 利用泰勒公式展开到 3 次项得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\left(x-2\right)+x+2}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-2\right)+x+2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}-\frac{2x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{6}。$$

泰勒展开的基本原则是分子与分母上下同阶即可，如果展开阶数过低，就会导致精度降低，误差增大，所以展开到几阶由分母的最低阶数确定最佳[8]。

4. 其它使用条件

泰勒公式可以解决复杂极限问题，但对于简单的极限问题，一般来说，两个无穷小量前面系数之代数和不为 0 的时候就可以使用等价无穷小。文献[9]也提出了在一定条件下，加减因式可以使用等价无穷小代换，从泰勒展开式的角度进行了说明，等价无穷小取的是泰勒展开的第一项，只要两个函数展开的第一项相加减后不能消掉，就可以直接使用等价无穷小代换。

定理：当函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在自变量同一个变化过程中极限为 0，$f_1(x)\sim g_1(x)$, $f_2(x)\sim g_2(x)$，① 如果 $\lim\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\neq 1$ ($\lim\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 指的是在同一个变化过程中的极限)，则 $f_1(x)-f_2(x)\sim g_1(x)-g_2(x)$；② 如果 $\lim\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\neq -1$，则 $f_1(x)+f_2(x)\sim g_1(x)+g_2(x)$。

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-2\sin x}{x}$。

因为 $\tan x$ 和 $\sin x$ 两个无穷小量前面系数之代数和不为 0，可以直接把 $\tan x\sim x(x\to 0)$ 和 $\sin x\sim x(x\to 0)$ 带入，则结果为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-2\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$。

从极限四则运算法则角度考虑，计算过程为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-2\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=1-2=-1$，四则运算的前提是等式右边两个极限都存在。

从函数的泰勒展开理解，$\tan x$ 和 $\sin x$ 展开到一阶够了，即 $\tan x=x+o(x)$，$\sin x=x+o(x)$，则 $2\sin x=2x+o(x)$，发现 $\tan x$ 和 $2\sin x$ 展开后 x 的一次项系数不同，就可以正常计算。这种可以归结为加减“幂次最低”原则[7]，指的是对于 $A-B$ 型，将 A，B 展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止。加减“幂次最低”原则通过如下例题进行详细解析。

例 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{ax^b}=1$，求 a,b。

解：由泰勒公式得 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)$，将 $\cos x$，$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 展开到 x^4 时，其系数就不同了，使用“幂次最低”原则，展开到此项后，进行运算得：

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

所以 $\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4$，所以 $a=-\frac{1}{12}, b=4$。

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)\cdot x}{\sin^2 x}$。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)\cdot x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2}=2$，其中 $x+\sin x\sim 2x(x\to 0)$，之所以可以这样直接代换是因为 x 与 $\sin x$ 的系数之和为 2 不为 0。

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cdot x}{\sin^4 x}$。

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\cdot x}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}$，这里 $x-\sin x$ 不能用 $\sin x\sim x$，否则得到极限为 0 的错误结果，因为 x 与 $\sin x$ 的系数之和为 0，故加减时不能使用等价无穷小。

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x^2-2x^2}{3x^2+\sin 2x^2}$。

由上述定理知，当 $x\to0$ 时，$\arcsin 3x^2\sim 3x^2$，$\sin 2x^2\sim 2x^2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{3}{2}\neq1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x^2-2x^2}{3x^2+\sin 2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-2x^2}{3x^2+2x^2}=\frac{1}{5}$。

例 4~7 的计算，本质上都是利用泰勒公式展开，遵循的是加减“幂次最低”原则和分式“上下同阶”原则。

5. 结语

等价无穷小代换的本质是两个函数逼近问题，通俗地说就是一个选择估计值精确度的问题。从泰勒公式的角度深层次地理解，就是函数泰勒公式的低阶展开，精度丢失，存在误差。能不能等价无穷小代换的关键是两个函数是否足够逼近，能够在求极限的过程中满足精度要求。对于 0/0 型分式整体的乘除因子，可以直接使用等价无穷小代换，极限不变；对于有加减项时，在一定条件下也可以使用等价无穷小代换。正确使用等价无穷小代换要从泰勒公式的角度去理解函数近似与等价关系，要注意等价无穷小代换中误差精度是否满足极限计算的要求以及整体因子和局部因子代换的区别，对于函数的泰勒展开时遵循分式“上下同阶”原则和加减“幂次最低”原则。

参考文献

[1] 于延荣. 关于等价无穷小代换的若干结论[J]. 工科数学, 2001, 17(4): 100-102.

[2] 梁亦孔. 等价无穷小替换的推广[J]. 上海工程技术大学学报, 2016, 30(3): 272-274.

[3] 毛宇彤, 乔虎生. 关于无穷小量代数和的等价代换的注记[J]. 大学数学, 2019, 35(4): 115-121.

[4] 诸利忠, 陈雨佳. 和形式的等价无穷小代换[J]. 高等数学研究, 2016, 19(1): 25-27.

[5] 同济大学数学科学学院. 高等数学: 上册[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 50-54.

[6] 彻底讲清楚等价无穷小使用规则(续) [EB/OL]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/296590097, 2023-04-25.

[7] 利用泰勒公式求极限，函数需要展开到第几阶? [EB/OL]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/55329106, 2023-02-02.

[8] 陈丽. 论述利用泰勒公式求极限和利用等价无穷小的代换求极限及二者的关系[J]. 数学学习与研究, 2013(15): 77-78.

[9] 徐华清, 王瑞星, 赵清波, 等. 等价无穷小代换中含加减因式求极限的思考[J]. 数学学习与研究, 2021(23): 128-129.