Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 159-170
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149336

Hans汉斯

托勒密定理在高中数学中的应用

周春梅[1]，熊红亮[2]，董金辉[1*]

[1]黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈
[2]湖北省红安县第一中学，湖北 黄冈

收稿日期：2024年7月16日；录用日期：2024年8月19日；发布日期：2024年9月24日

摘 要

自《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》颁布以来，数学课程的改革不断地深入，这对教师的数学专业知识素养提出了更高的要求，需要教师站在高观点视角下去理解中学数学知识的本质。除此之外，高考中频繁出现的具有高等数学背景的试题也对学生的认知提出了更高的要求。托勒密定理描述了圆内接四边形的四边与对角线之间的数量关系，在圆的几何学中起着独特的作用，利用它可以解决与圆有关的几何问题，也可以构造特殊的圆内接四边形来解决代数问题，将代数问题几何化，则很多问题的解决将更加方便且简单。通过对托勒密定理在高中数学中的多方面应用的研究，本文旨在激发学生对数学的兴趣，提高他们对数学概念的理解水平，为教师提供有效的教学工具，使学生更深入地理解数学知识，并在实际问题中灵活运用所学概念。

关键词

托勒密定理，托勒密定理逆定理，高中数学

The Application of Ptolemy's Theorem in High School Mathematics

Chunmei Zhou[1], Hongliang Xiong[2], Jinhui Dong[1*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei
[2]The First Middle School of Hong'an County, Huanggang Hubei

Received: Jul. 16th, 2024; accepted: Aug. 19th, 2024; published: Sep. 24th, 2024

Abstract

Since the promulgation of the "General High School Mathematics Curriculum Standards (2017 Edition,

[*]通讯作者。

文章引用: 周春梅, 熊红亮, 董金辉. 托勒密定理在高中数学中的应用[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 159-170.
DOI: 10.12677/pm.2024.149336

2020 Revision)", the reform of mathematics curriculum has been continuously deepened, which has put forward higher requirements for teachers' mathematical professional knowledge and literacy. Teachers need to understand the essence of middle school mathematics knowledge from a high perspective. In addition, the frequent appearance of questions with a background in advanced mathematics in the college entrance examination also puts higher demands on students' cognition. Ptolemy's theorem describes the quantitative relationship between the four sides and diagonals of a circle inscribed with a quadrilateral, playing a unique role in the geometry of circles. It can be used to solve geometric problems related to circles, as well as to construct special circles inscribed with quadrilaterals to solve algebraic problems. By geometricizing algebraic problems, many problems can be solved more conveniently and simply. Through the study of the various applications of Ptolemy's theorem in high school mathematics, this article aims to stimulate students' interest in mathematics, improve their understanding of mathematical concepts, provide effective teaching tools for teachers, enable students to have a deeper understanding of mathematical knowledge, and flexibly apply learned concepts in practical problems.

Keywords

Ptolemy's Theorem, The Inverse Theorem of Ptolemy's Theorem, High School Mathematics

1. 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》通过调整课程目标、更新课程内容、改革教学方式和评价方式，旨在培养学生的综合能力和创新能力，同时也对教师的教学方法和评价方式提出了新的要求。这一改革将促使数学教育更加贴近实际，培养具有全面能力的学生，为他们未来的学习和发展奠定坚实的基础。

“高观点视角”是一种宏观、系统化的思维方式，它要求学生在学习中不仅要掌握具体的数学知识和技能，还要理解这些知识的整体结构和应用背景。通过这种视角，学生能够更全面地把握数学知识的本质，提高问题解决能力，促进综合能力的培养。同时，这也对教师提出了更高的要求，需要设计更加系统化和有深度的教学内容，推动学生在探索和讨论中提升理解和应用能力。

托勒密定理，作为数学中一项具有深远影响的重要几何原理，在高中数学课程中占据着重要的地位。其广泛的应用领域涵盖几何证明、三角函数以及圆锥曲线等多个数学学科，为学生提供了探索问题的新视角和独特解决方法。这一定理不仅仅局限于平面几何中的矩形四边形关系，而且在圆的几何学中展现出了广泛而深刻的应用。将托勒密定理引入高中数学教学，不仅有助于学生拓宽数学知识面，还能让解决一些看似复杂的问题变得更加简洁明了[1]。通过具体的数学推导和几何分析，学生可以更好地理解托勒密定理的几何意义和应用价值，同时培养他们的数学思维和解决问题的能力。托勒密定理在解析几何和圆锥曲线学习中有着重要的作用，不仅是一种解题工具，更是学生理解几何形态与关系、分析和解决几何问题的重要途径。具体而言，通过托勒密定理的实际应用，学生可以加深对几何图形特性的理解，并能够在实际问题中运用几何知识解决问题，从而提高他们的综合运用能力和创新能力。

深入研究托勒密定理，有助于更好地理解其在几何学和三角学中的内在联系。这一定理在解决实际问题和推导数学结论方面具有重要性，为学生提供了有效的工具来解决几何问题。同时，通过应用托勒密定理，学生得以培养数学思维和问题解决的能力。深入探索这一定理，不仅使学生更全面地理解几何

学的概念，而且提高了数学思维水平，为进一步涉足更复杂的数学领域奠定了坚实的基础。托勒密定理的深入研究和应用，使学生在数学学科中更加自信地运用这一工具解决各类几何难题，为他们未来的数学学习提供了坚实的支持。因此，托勒密定理在高中数学中的应用对学生的数学学习和能力培养具有重要意义。

2. 托勒密定理及其证明

2.1. 托勒密定理

托勒密定理(Ptolemy's Theorem)是古代几何学中的一个重要定理，涉及圆内接四边形的性质。它的提出者是一位约公元 90 年至 168 年之间的古希腊天文学家和数学家克劳狄乌斯·托勒密(Claudius Ptolemy)，其理论在其著作《天文学大成》(Almagest)中进行了阐述[2]。以下是托勒密定理的详细背景和证明过程，以及其数学意义和应用价值的介绍。

托勒密定理是指在一个圆内接四边形(即四个顶点都在同一个圆上的四边形)中，四边形的对角线长度与四边形的边长度之间满足特定的关系。该定理不仅在古代数学中具有重要地位，也在现代数学、几何学和其他领域中有着广泛的应用。其证明过程如下：

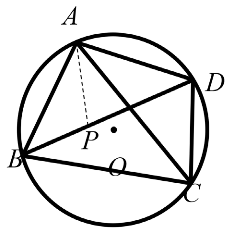

Figure 1. The proof of Ptolemy's theorem
图 1. 托勒密定理的证明

如图 1，四边形 ABCD 为圆内接四边形，在 BD 上取点 P，使得∠BAP = ∠CAD，因此我们可以得出 $\Delta BAP \backsim \Delta CAD$，从而有 $\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CD}$，即有 $AB\cdot CD=AC\cdot BP$ ①；同理 $\Delta ABC \backsim \Delta APD$，$\frac{BC}{AC}=\frac{PD}{CD}$，所以有 $BC\cdot AD=AC\cdot PD$ ②；

由① + ②得：$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot\left(BP+PD\right)=AC\cdot BD$

由此得证[3]。

2.2. 托勒密定理的逆定理

根据托勒密定理我们还可以推广出托勒密定理的逆定理：如果某四边形的两组对边乘积之和等于它的两条对角线的乘积，那么该四边形为圆内接四边形。其证明过程如下：

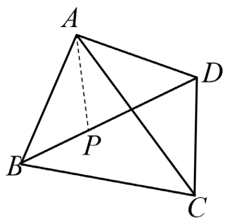

Figure 2. The proof of Ptolemy's inverse theorem
图 2. 托勒密逆定理的证明

如图 2，四边形 ABCD 满足 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，在四边形 ABCD 内取一点 P，使得$\angle BAP=\angle CAD$，$\angle ABP=\angle DCA$，因此有$\Delta BAP\backsim\Delta CAD$，从而有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{CD}$，即有 $AB\cdot CD=AC\cdot BP$ ①；又由 $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AC}{AD}$ 得 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AP}{AD}$ 且$\angle BAC=\angle PAD$，因此有$\Delta ABC\backsim\Delta APD$，由 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{PD}{AD}$ 得 $BC\cdot AD=AC\cdot PD$ ②；

由① + ②得：$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot(BP+PD)$，

所以 $BP+PD=BD$，即 P 在 BD 上，因此有$\angle DCA=\angle ABD$，

因此四边形 ABCD 为圆内接四边形[4]。

2.3. 广义托勒密定理

根据托勒密定理可以得出一个关于四边形的不等式，即广义托勒密定理，又称托勒密不等式：凸四边形的两组对边乘积之和大于等于两对角线的乘积，当且仅当四边形四点共圆时取等号。其证明过程如下：

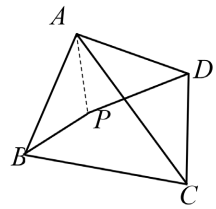

Figure 3. The proof of generalized Ptolemy's theorem
图 3. 广义托勒密定理的证明

如图 3，在任意凸四边形 ABCD 中，作$\triangle ABP$ 使$\angle BAP=\angle CAD$，$\angle ABP=\angle ACD$，连接 DP，可得$\triangle ABP\backsim\triangle ACD$，所以有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{CD}$，即 $BP\cdot AC=AB\cdot CD$ ①；由$\triangle ABP\backsim\triangle ACD$ 得 $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AC}{AD}$，且$\angle BAC=\angle PAD$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle APD$，由 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{PD}{AD}$ 得 $PD\cdot AC=BC\cdot AD$ ②；

由① + ②得：$AC\cdot(BP+PD)=AB\cdot CD+BC\cdot AD$。

又因为 $BE+ED\geq BD$，

所以 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$ (当且仅当四边形 ABCD 是圆内接四边形时，等号成立) [5]。

3. 托勒密定理在高中数学中的应用

3.1. 托勒密定理在求最值中的应用

3.1.1. 例一

(2022 全国高考甲卷)如图 4，已知$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$，当$\dfrac{AC}{AB}$最小时，BD 等于多少？

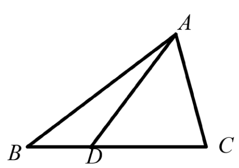

Figure 4. Example 1
图 4. 例一

(一) 一般解法：

设 BD = x，则 CD = $2x$

在ΔABD 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot AB}$，可得 $AB^2=x^2+2x+4$；

同理在ΔACD 中，$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$ 可得 $AC^2=4x^2-4x+4$；

所以 $\dfrac{AD^2}{AB^2}=\dfrac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4}=4-\dfrac{12(x+1)}{x^2+2x+4}=4-\dfrac{12}{x+1+\dfrac{3}{x+1}}\geq 4-2\sqrt{3}$；

因为 $x > 0$ 得 $x + 1 > 1$；

所以 $\dfrac{AC}{AB}$ 最小即 $\dfrac{AC^2}{AB^2}\min=4-2\sqrt{3}$，此时 $\dfrac{3}{x+1}$ 即 $x=\sqrt{3}-1$；

所以当 $\dfrac{AC}{AB}$ 最小时，$BD=\sqrt{3}-1$。

(二) 托勒密定理解法：

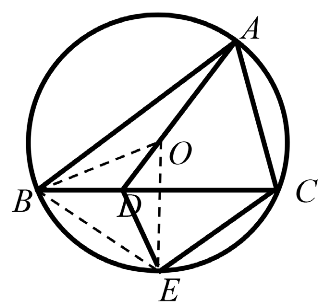

Figure 5. Solution of Ptolemy theorem in Example 1
图 5. 例一的托勒密定理解法

如图 5，作点 B 关于 AD 的对称点 E，则 AB = AE，∠ADB = ∠ADE = 120˚；

设 BD = DE = x，则 CD = $2x$；

在ΔBED 中，可得 $BE=\sqrt{3}x$；

在ΔBED 中，由 $\cos\angle EDC=\dfrac{ED^2+CD^2-CE^2}{2ED\cdot CD}$，可得 $EC=\sqrt{3}x$；

在四边形 ABEC 中，由托勒密定理有：$AB\cdot EC+BE\cdot AC\geq BC\cdot AE$，代入数据得：

$$\frac{AC}{AB}\geq\sqrt{3}-1\ \text{(当且仅当 A、B、E、C 四点共圆取等号)}$$

由于 AD 为弦 BE 的中垂线，所以圆心 O 在 AD 上，有 OB = OE，可得ΔOBE 为等边三角形；

因此 $AD=AO+OD=\sqrt{3}x+x=2$；

解得 $BD=x=\sqrt{3}-1$。

点评：这道题如果采用普通解法，学生在对 $\dfrac{AC^2}{AB^2}$ 进行整理化简时可能会存在问题，计算较复杂，无法快速得出正确的结果，因此也就无法利用基本不等式得出 $\dfrac{AC}{AB}$ 的最小值。如果利用托勒密定理做出正确的辅助线，这道题就会简单很多，代入数据进行简单计算得出 $\dfrac{AC}{AB}$ 的最小值，从而快速求出 BD 的值。

3.1.2. 例二

(2019 • 衡水二模)如图 6，在平面四边形 ABCD 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{5}$，BD⊥BC，$BD=2BC$，则 AD 的最小值为多少？

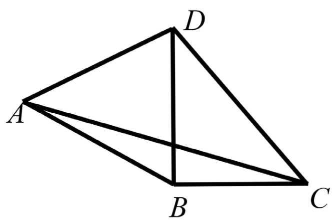

Figure 6. Example 2
图 6. 例二

(一) 一般解法：

设 $BC=x$，则 $BD=2x$，$\angle ABD=\theta$

在ΔABD 中，由 $\cos\theta=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$ 得 $AD^2=1+4x^2-4x\cos\theta$；

在ΔABC 中，由 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot AC}$ 得 $\sin\theta=\dfrac{4-x^2}{2x}$，$0<x<2$；

则 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{12x^2-x^4-16}}{2x}$；

设 $f(x)=1+4x^2-4x\cos\theta=1+4x2-4x\dfrac{\sqrt{12x^2-x^4-16}}{2x}=1+4x^2-2\sqrt{12x^2-x^4-16}\ (0<x<2)$；

则 $f'(x)=8x-\dfrac{24x-4x^3}{\sqrt{12x^2-x^4-16}}$，当 $f'(x)=0$ 时，解得 $x=\sqrt{2}$

因此在 $\left(0,\sqrt{2}\right)$，$f(x)$为减函数，在 $\left[\sqrt{2},2\right)$，$f(x)$为增函数；

$f(x)\min=f\left(\sqrt{2}\right)=5$，所以得出 AD 的最小值为 $\sqrt{5}$。

(二) 托勒密定理解法：

设 $BC=x$，则 $BD=2x$

因为 BD⊥BC，通过勾股定理计算出 $CD=\sqrt{5}x$；

由托勒密定理有 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geq AC\cdot BD$，代入数据得，

$$\sqrt{5}x+x AD\geq 2\sqrt{5}x$$

计算得出 $AD\geq\sqrt{5}$，当且仅当 A、B、C、D 四点共圆即当四边形 ABCD 为圆内接四边形时取等号；所以 AD 的最小值为 $\sqrt{5}$。

点评：如果按照一般的解法来解决这道题，解题过程可能会显得有些繁琐，同时需要学生具备一定的计算水平。特别是利用正弦定理及函数求导，这需要较多的计算步骤。在考试中，这种方法可能会耗费过多的时间。然而，若采用托勒密定理，只需利用勾股定理计算出各边的长度，然后将结果代入相应的公式即可得出答案，这样简化了计算过程，也能更快地得到结果。

3.1.3. 小结

利用托勒密定理解决最值问题，用到的是广义托勒密定理，其过程可以分为以下几个步骤：

构造凸四边形：首先，选择适当的四个点，构造一个凸四边形。这个四边形的边长可以代表我们需要求解的问题中的各个变量。

计算各边的值：根据已知条件，找出各边之间的关系，通过设未知数等方法将各边表示出来。

应用广义托勒密定理：将凸四边形的各边代入广义托勒密定理，得到相应的不等式关系。广义托勒密定理的一般形式为：如果四边形 ABCD 是一个凸四边形，那么有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$，将这个不等式将各边的长度联系起来。

解不等式：利用广义托勒密定理得到的不等式，结合其他条件，解出各个变量的范围。

取等号情况：当凸四边形为内接四边形时，等号成立。这时，四边形的四个顶点在一个圆上，满足广义托勒密定理的等号条件。

得出最终结果：将得到的各个变量的范围代入问题的具体条件，得到最终的结果。这可能需要进一步的数学推导或计算。

3.2. 托勒密定理在解三角形中的应用

3.2.1. 例三

(山西省 2022 届高考考前第一次适应性测试)如图 7，已知圆内接四边形 ABCD 中，AB = 7，BC = 24，CD = 20，$\angle ADC = \frac{\pi}{2}$，则 BD 等于多少？

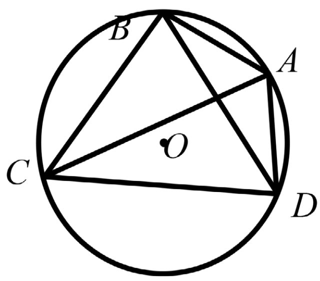

Figure 7. Example 3
图 7. 例三

(一) 一般解法：

因为在圆内接四边形 ABCD 中，$\angle ADC = \frac{\pi}{2}$，所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$；

利用勾股定理得 AC = 25，AD = 15；

在ΔABD 中，由 $\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{274 - BD^2}{210}$；

在ΔCBD 中，由 $\cos\angle BCD = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD} = \frac{976 - BD^2}{960}$；

因为 $\angle BAD + \angle BCD = \pi$，所以 $\cos\angle BAD = -\cos\angle BCD$，即

$$\frac{274 - BD^2}{210} = \frac{274 - BD^2}{210}$$

解得 BD = ±20。

因为 BD 为三角形一条边，所以 BD = 20。

(二) 托勒密定理解法：

因为在圆内接四边形 ABCD 中，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$

利用勾股定理得 AC = 25，AD = 15；

由托勒密定理有 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，代入数据得

$$7\times20+24\times15=25BD$$

解得 BD = 20。

点评：这道题目中，如果采用一般解法，需要使用余弦定理并利用两角互补的性质，将两角的余弦值互为相反数列方程求解，这个过程中的计算量相对较大，可能会在考试中占用较多的时间。然而，由于题目中给出的是一个已知为圆内接四边形的情况，我们可以直接应用托勒密定理来求解，避免了繁琐的计算过程，并且能够更快速地得出结果，从而提高解题效率。

3.2.2. 例四

(河南省 2021 届高三 4 月联考)如图 8，在平面四边形 ABCD 中，∠BCD = 2∠BAD = 120˚，3AB = 4AD，$BD=\sqrt{13}$，∠ABC = 90˚，则 CD 等于多少？

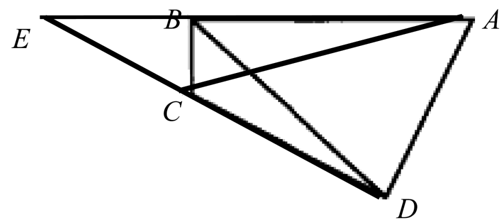

Figure 8. Example 4
图 8. 例四

延长 AB、DC 交于点 E；

设 AB = 4x，AD = 3x；

因为∠BCD = 2∠BAD = 120˚，∠ABC = 90˚；

可得∠BAD = 60˚，∠ADC = 90˚；

那么由四边形 ABCD 的两组内角分别互补可知四边形 ABCD 为圆内接四边形；

在ΔADE 中，AD = 3x，∠BAD = 60˚，通过已知角度计算可得：

$$AE=6x,\quad BE=2x,\quad BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}x,\quad EC=\frac{4\sqrt{3}}{3}x,\quad CD=\frac{5\sqrt{3}}{3}x,\quad AC=\frac{2\sqrt{39}}{3}x;$$

由托勒密定理有 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，代入数据得：

$$4x\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}x\cdot3=\frac{2\sqrt{39}}{3}x\cdot2\sqrt{13}$$

解得 $x=2$。

因此 $CD=\frac{5\sqrt{3}}{3}x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$。

3.2.3. 例五

(2021 浙江单元测试)如图 9 所示，在平面四边形 ABCD 中，AB⊥BD，AB = BD，BC = CD，AD = 2，在ΔABC 中，角 A，B，C 的对应边分别为 a，b，c，若 $c^2=2ab\cos C$，则ΔACD 的面积为多少？

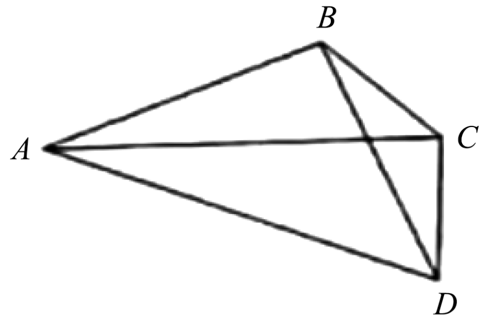

Figure 9. Example 5
图 9. 例五

由 AB⊥BD，AB = BD 计算可得 $AD=\sqrt{2}c$；

在ΔABC 中，$\cos\angle ACB=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$；

将已知条件 $c^2=2ab\cos C$ 带入得 $a^2+b^2=2c^2$；

在ΔACD 中，$BC=CD=a$，那么有 $CD^2+AC^2=AD^2$，所以ΔACD 为直角三角形；

可知ΔABC 与ΔACD 均为斜边为 AD 的直角三角形，即四边形 ABCD 为圆内接四边形；

由托勒密定理有 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，代入数据得

$$ac+\sqrt{2}ac=bc$$

计算得出 $b=\left(\sqrt{2}+1\right)a$；

在ΔACD 中，$CD^2+AC^2=AD^2$，即 $a^2+\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a\right]^2=4$；

解得 $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$，那么 $b=\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}$；

$$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.2.4. 小结

解三角形问题时，我们可以通过构造一个与托勒密定理相关的四边形，并利用已知条件和待求的关系，逐步推导解决问题。以下是解三角形问题的一般步骤：

确定已知条件和待求关系：确定三角形中已知的边长、角度或其他条件，以及需要求解的关系。

确定圆内接四边形：根据已知条件，证明四边形为圆内接四边形。

应用托勒密定理：将托勒密定理的公式应用到构造的四边形上，得到一个关于已知和未知量的方程。

解方程：利用得到的方程，解出未知量的值。

得出最终结果：将求得的值代入问题的具体条件，得到最终的结果。这可能需要进一步的数学推导或计算。

3.3. 托勒密定理在圆锥曲线中的应用

3.3.1. 例六

(2011 年全国高考II卷第 21 题)如图 10，已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 C：$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A、B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=0$。

(1) 证明：点 P 在 C 上；

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A、P、B、Q 四点在同一圆上。

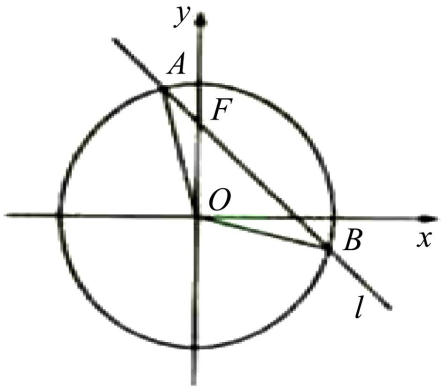

Figure 10. Example 6
图 10. 例六

证明过程：(1) 设 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，P(x_3, y_3)

由题意得 F(0, 1)，可得直线 l： $y=-\sqrt{2}x+1$；

联立方程 $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ y=-\sqrt{2}x+1 \end{cases}$ 得 $4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$；

求出 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$， $B\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$；

由于 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=0$；

所以由 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ y_1+y_2+y_3=0 \end{cases}$ 求得 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$；

带入满足椭圆方程，因此点 P 在 C 上。

(2) 由(1)可得 $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

通过计算可求出： $|AP|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{6+\sqrt{3}}$， $|BP|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{6-\sqrt{3}}$， $|BQ|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6+\sqrt{3}}$， $|AQ|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6-\sqrt{3}}$， $|AB|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$， $|PQ|=\sqrt{6}$。

代入数据发现满足 $|AP|\cdot|BQ|+|AQ|\cdot|BP|=|AB|\cdot|AB|$。

因此由托勒密定理的逆定理可得 A、P、B、Q 四点在同一圆上。

3.3.2. 小结

托勒密定理在圆锥曲线中的应用主要涉及到椭圆、双曲线和抛物线。该定理指出，四边形对角线积的平方等于其相邻两边的积之和。在椭圆上，这可用于关联半长轴、半短轴及焦点间的关系。在双曲线上，可用于推导焦点、半长轴和半短轴的关系。而在抛物线上，它有助于确定焦点、直径和焦半径的关系。总体而言，托勒密定理在解决圆锥曲线的几何问题中提供了有用的工具。在应用托勒密定理解决圆锥曲线问题时，可以按照以下步骤进行[6]：

确定曲线类型：确认所给问题涉及的圆锥曲线类型，是椭圆、双曲线还是抛物线。

识别已知信息：确定已知的参数或条件，例如半长轴、半短轴、焦点之间的关系、直径长度等。

选择合适的托勒密定理应用：根据曲线类型，选择正确的托勒密定理应用。针对椭圆、双曲线或抛物线，应用相应的定理。

建立方程：利用托勒密定理建立方程，根据已知条件列出方程式。

求解未知量：利用建立的方程，求解未知的参数或条件，通过数学运算找到所需的答案。

验证与分析：完成计算后，验证结果是否符合原始问题的要求，并进行必要的分析检查。

3.4. 托勒密定理在实际问题中的应用

3.4.1. 例七

问题：在制造一台精密机械时，需要将圆形部件划分为多个内接四边形区域，以确保部件的适配性。已知每个四边形的边长和对角线长度，可以利用托勒密定理来验证这些区域的设计。

已知：一个圆内接四边形区域 ABCD，其边长为 AB = 12 毫米，BC = 16 毫米，CD = 20 毫米，DA = 18 毫米。对角线 AC 的长度为 25 毫米，对角线 BD 的长度为 22 毫米。

求解：使用托勒密定理进行验证： $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ 。

代入已知数据： $25 \times 22 = 12 \times 20 + 18 \times 16$ ，得 $550 \approx 240 + 288 = 528$ 。

虽然等式几乎成立，但存在微小的差异。这表明部件设计接近预期，但可能需要进一步调整精度，以确保机械部件的完美配合。

3.4.2. 小结

托勒密定理在实际问题中的应用展现了其处理圆内接四边形数据的强大能力。无论是在建筑设计、机械制造还是地理勘测中，托勒密定理都能够帮助验证和优化设计，确保数据的准确性和合理性。通过这些实际应用的例子，我们可以看到托勒密定理不仅限于理论计算，而是实际问题解决中的有力工具。在实际应用中，精确地测量和数据验证同样重要，以确保设计和分析的准确性。

4. 总结

托勒密定理在高中数学中的应用对于学生在解析几何和圆锥曲线学习中起着重要作用。通过具体的数学推导和几何分析，学生可以更好地理解托勒密定理的几何意义和应用价值，同时培养他们的数学思维和解决问题的能力[7]。通过托勒密定理的应用实例，学生能够加深对几何图形特性的理解，培养解决实际问题的能力。总的来说，托勒密定理在高中数学中的应用不仅是数学知识的灵活运用，更是培养学生综合运用能力和创新能力的重要途径。通过深入研究托勒密定理，我们能够更好地理解其在高中数学教学中的应用价值。这一定理不仅仅是一种几何工具，更是培养学生数学思维和解决问题能力的利器。通过解析几何和圆锥曲线等相关领域的实际问题，学生可以更直观地感受到托勒密定理的实用性，使学生能够更自信地应对各种几何问题，这不仅有助于学生在数学领域取得更好的成绩，也为他们未来的学术和职业生涯奠定了坚实的数学基础。未来，我们可以进一步探讨将托勒密定理的应用融入到教学实践中，促进学生的数学素养和创新能力的发展。

参考文献

[1] 徐智勇，杨俊林．由托勒密定理说开去[J]．数理天地(高中版), 2023(23): 2-3.

[2] 董立伟．巧用托勒密定理解高考模拟试题[J]．河北理科教学研究, 2023(1): 36-37.

[3] 杜晓霞，王勇．托勒密定理及其应用[J]．高中数学教与学, 2023(3): 14-16.

[4] 许磊. 托勒密定理在考题中的妙用赏析[J]. 新世纪智能, 2022(ZD): 62-66.

[5] 丁奕涵, 张美玲, 唐玉华. 四点共圆之托勒密定理[J]. 中学生数学, 2022(12): 35-36.

[6] 邓文忠. 借助托勒密定理巧解题[J]. 数理天地(初中版), 2021(3): 28-30.

[7] 陈武. 掌握托勒密定理简证一类几何题[J]. 中小学数学(初中版), 2020(12): 29-30.