Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 196-208
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148318

基于含参模糊数距离的模糊数排序

易姝伶，潘小东*

西南交通大学数学学院，四川 成都

收稿日期：2024年7月22日；录用日期：2024年8月19日；发布日期：2024年8月26日

摘　要

为提出新的模糊数排序方法并验证其可行性，首先通过综合考虑区间数中各对应点对区间数距离的影响程度，构造了一种新的区间数距离，并利用该区间数距离建立了一种新的模糊数距离。在此基础之上，给出了一种新的模糊数排序方法，并证明了该方法仍然具备Wang和Kerre提出的关于模糊数排序的一系列性质。最后，通过实例验证了所提模糊数排序方法的可行性与有效性。

关键词

区间数，模糊数，模糊数距离，模糊数排序

Fuzzy Number Ranking Based on Parametric Fuzzy Number Distance

Shuling Yi, Xiaodong Pan*

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Jul. 22nd, 2024; accepted: Aug. 19th, 2024; published: Aug. 26th, 2024

Abstract

In order to propose a new fuzzy number ranking method and verify its feasibility, a new interval number distance is constructed by comprehensively considering the influence degree of each corresponding point in the interval numbers on the interval number distance, and a new fuzzy number distance is established by this interval number distance. On this basis, a new fuzzy number ranking method is given, and it is proved that the method still has a series of properties about fuzzy number ranking proposed by Wang and Kerre. Finally, the feasibility and effectiveness of this fuzzy number ranking method are verified by some examples.

*通讯作者。

文章引用: 易姝伶, 潘小东. 基于含参模糊数距离的模糊数排序[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 196-208.
DOI: 10.12677/pm.2024.148318

Keywords

Interval Numbers, Fuzzy Numbers, Fuzzy Number Distance, Fuzzy Numbers Ranking

1. 引言

现实世界中的决策问题往往涉及不确定性和模糊性，建立模糊决策的数学理论和方法是决策领域的一个重要研究方向。在模糊决策分析中，决策者通常使用模糊数作为方案的评估工具，这就需要对模糊数进行比较和排序。为此，众多学者基于不同的理论基础和应用背景，提出了各种各样的模糊数排序方法。总的来说，这些模糊数排序方法主要被归为以下三类：

(1) 第一类是先将每个待排序模糊数都转化为一个实数，然后通过比较它们对应实数的大小关系，从而确定出所有待排序模糊数的排序结果。如：文献[1]利用一个与模糊数截集有关的函数给出排序指标，创建了一种能对单位区间上的模糊数进行排序的模糊数排序方法。文献[2]为反映出决策者的风险态度，对模糊数截集的左右端点区别对待，然后基于左右积分值的凸组合提出了一种排序指标对模糊数进行排序。文献[3]发现 Liou 和 Wang 提出的模糊数排序方法[2]在区分正规与非正规梯形模糊数方面存在局限性，为解决这一缺陷，他们重新构造了一种基于模糊数中值和新积分值的模糊数排序指标。文献[4]通过广义梯形模糊数的指数区域定义出其排序指标，进而得到一种用于广义梯形模糊数的排序方法。文献[5]利用广义梯形模糊数的平均位置、面积、周长构造了一种排序指标，基于此提出了一种可对广义梯形模糊数进行排序的方法。

(2) 第二类是先利用所有待排序模糊数构造一个或多个参考模糊数，然后通过比较每个待排序模糊数与这些选定参考模糊数的某种接近程度(或远离程度)来得到排序指标，从而得到所有待排序模糊数的排序结果。如：文献[6]通过比较待排序模糊数到预定目标之间的距离，提出了一种基于模糊数距离的模糊数排序新方法。文献[7]指出文献[6]中所定义的区间数及模糊数之间的距离并不完全满足距离的定义，以确保其满足距离的定义对其修正后，重新提出了一种新的模糊数排序方法。文献[8]通过定义一种新的区间数、三角形模糊数之间的距离，然后在待排序三角形模糊数中选出一个模糊极大集作为比较标准，利用该模糊数距离计算出每个待排序模糊数与选定模糊极大集的距离，进而提出了一种用于三角形模糊数排序的方法。

(3) 第三类是先通过构造所有待排序模糊数集上的模糊关系、模糊偏好关系等，再利用构造的模糊关系、模糊偏好关系等对待排序模糊数进行成对比较，最终得出所有待排序模糊数的排序结果。如：文献[9]提出了一种评估两个模糊数之间比较关系的满意度函数，基于该函数进一步建立了模糊偏好关系，并据此提出了一种适用于模糊偏好关系的模糊数排序方法。文献[10]在整个模糊数集合中引入了一种新的模糊二元关系，并利用该模糊二元关系提出了一种适用于整个模糊数集合的排序方法。文献[11]提出了一种用于比较两个三角形模糊数之间大小关系的可能度计算公式，并结合加权平均模型构造了一种新的三角形模糊数排序方法。文献[12]通过引入相对模糊优势度来刻画模糊数的一些形状特征，提出了一种基于模糊数相对关系和形状特征的模糊数排序方法。

虽然这些排序方法在理论研究和实际应用中均有重要作用，但它们各自都有其特定的适用范围和局

限性。因此，关于模糊数排序方法的研究仍需要不断探索与创新。通过分析上述文献，本文发现朱章遐和曹炳元[8]所定义的区间数距离虽然考虑了区间数中各对应点对它们之间距离的影响程度，但并未充分考量到区间数中各对应点可能对区间数间距离产生不同影响的情况。为此，本文首先考虑了区间数中各对应点对区间数距离影响程度的差异情况，引入加权函数 $x^{\alpha}(\alpha>0)$，推广改进了上述区间数距离，并给出其重要性质。接着利用该区间数距离，构造了一种新的模糊数距离，并基于该模糊数距离和选定参考模糊数建立了排序指标，进而提出了新的模糊数排序方法，同时证明了其相关性质。最后，通过三个数值示例与其他排序方法进行比较，说明了本文所提出的排序方法的可行性与有效性。

2. 预备知识

本节主要介绍区间数、模糊数、距离的公理化定义等基本概念。

定义 2.1 [13] 设 $a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]=\left\{x:\underline{a}\le x\le\overline{a}\right\}$，则称 a 为一个区间数。特别地，如果 $\underline{a}=\overline{a}$，那么区间数 a 就是一个实数。

区间数的基本运算法则[13]：设区间数 $a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$，$b=\left[\underline{b},\overline{b}\right]$，$k\in\mathbb{R}$，则有

(1) 加法运算：$a+b=\left[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\right]$；

(2) 数乘运算：$ka=\begin{cases}\left[k\underline{a},k\overline{a}\right],k\ge 0\\ \left[k\overline{a},k\underline{a}\right],k<0\end{cases}$；

(3) 减法运算：$a-b=a+(-b)=\left[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}\right]$。

定义 2.2 [14] 实数域 $\mathbb{R}$ 上的模糊集 A 称为模糊数，如果 A 还满足如下条件：

(1) A 是正规的，即存在 $x_0\in\mathbb{R}$，使得 $A(x_0)=1$；

(2) A 是模糊凸的，即有 $A(kx_1+(1-k)x_2)\ge\min(A(x_1),A(x_2))$，$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$，$k\in[0,1]$；

(3) A 是上半连续的，即对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\forall x\in\mathbb{R}$，且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $A(x)-A(x_0)<\varepsilon$；

(4) A 的支集是有界的，即 $\overline{\{x\in\mathbb{R}:A(x)>0\}}$ 是有界的。

可将上述定义的模糊数 A 的隶属函数描述为：

$$A(x)=\begin{cases}L_A(x), a\le x\le b\\ 1, b\le x\le c\\ R_A(x), c\le x\le d\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

其中 $L_A(x):[a,b]\to[0,1]$，$R_A(x):[c,d]\to[0,1]$，且 $L_A(x)$ 单增上半连续，$R_A(x)$ 单减上半连续。$L_A(x)$ 和 $R_A(x)$ 分别称为模糊数 A 的左、右隶属函数。

记实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体模糊数构成的集合为 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$。

注：(1) 当模糊数 A 对应的左右隶属函数分别为 $L_A(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$，$R_A(x)=\dfrac{x-d}{c-d}$ 时，称 A 为梯形模糊数；若其还满足 $b=c$，则称 A 为三角形模糊数。

(2) 一般记梯形模糊数为 $A=(a,b,c,d)$，其对应的 λ-截为 $A_{\lambda}=\left[a+(b-a)\lambda,d+(c-d)\lambda\right]$，$\lambda\in[0,1]$。

定义 2.3 [13] 设有模糊数 A，定义

$$A_{\lambda}=\{x\in\mathbb{R}:A(x)\ge\lambda\},\quad \lambda\in[0,1],\quad kerA=A_1=\{x\in\mathbb{R}:A(x)\ge 1\},\quad suppA=\overline{\{x\in\mathbb{R}:A(x)>0\}},$$

此时分别称 A_{λ} 为模糊数 A 的 λ-截(cut)，$kerA$ 为模糊数 A 的核(kernel)，$suppA$ 为模糊数 A 的支撑(support)。由模糊数及其截集的定义可知下面的结论是显然的。

定理 2.1 [14] 实数域 $\mathbb{R}$ 上的模糊集 A 是模糊数当且仅当存在两个左连续映射 $\underline{A},\overline{A}:[0,1]\to\mathbb{R}$，使得

$A_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda),\bar{A}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，其中 $\underline{A}$ 非减，$\bar{A}$ 非增。

上述定理说明：任意模糊数 A 的 λ-截是区间数，可记为 $A_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda),\bar{A}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

下面通过模糊数的 λ-截来定义模糊数的基本运算，仅给出加法、数乘以及减法运算法则[14]。

设有两模糊数 $A,B\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$，其对应的 λ-截分别为 $A_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda),\bar{A}(\lambda)\right]$，$B_\lambda=\left[\underline{B}(\lambda),\bar{B}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，设 $k\in\mathbb{R}$，则有：

(1) 加法运算：$(A+B)_\lambda=A_\lambda+B_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda)+\underline{B}(\lambda),\bar{A}(\lambda)+\bar{B}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$；

(2) 数乘运算：

$$(kA)_\lambda=kA_\lambda=\begin{cases}\left[k\underline{A}(\lambda),k\bar{A}(\lambda)\right],k\ge 0\\ \left[k\bar{A}(\lambda),k\underline{A}(\lambda)\right],k<0\end{cases},\forall\lambda\in[0,1];$$

(3) 减法运算：$(A-B)_\lambda=A_\lambda-B_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda)-\bar{B}(\lambda),\bar{A}(\lambda)-\underline{B}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

定义 2.4 [15] 设 X 是任一非空集合，若映射 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ 满足下列条件：对任意 $x,y,z\in X$，有

(1) $d(x,y)\ge 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $d(x,y)=d(y,x)$；

(3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$；

则称 d 是 X 上的一个度量，$d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离。

3. 模糊数之间的(p,α,f)-距离

本节主要给出一种含参数 p 和 α 的改进型区间数距离公式，并基于该区间数距离公式构造出一种模糊数距离。

定义 3.1 [8] 对任意区间数 $a=[\underline{a},\bar{a}]$，$b=[\underline{b},\bar{b}]$，定义 $d(a,b)=\int_0^1\left|\left[\underline{a}+(\bar{a}-\underline{a})x\right]-\left[\underline{b}+(\bar{b}-\underline{b})x\right]\right|\mathrm{d}x$，则称 $d(a,b)$ 为 a 与 b 之间的距离。

注：上述距离公式将两区间数中各自的对应点都考虑在内，这些对应点通过各区间数的下端点值和上端点值的凸组合来表示。从另一角度分析，该距离公式是通过 x 来刻画区间数中各对应点对区间数距离的影响程度的，可以看出区间数中各对应点对它们之间的距离的影响程度都是相同的，但该区间数距离并未充分考量到区间数中各对应点可能对区间数间距离产生不同影响的情况。

为了充分考虑区间数中各对应点对区间数距离影响程度，下面引入了一个加权函数 x^α，其中 $\alpha>0$，$x\in[0,1]$，使得当 $\alpha>1$ 时，远离区间上端点的对应点在区间数距离中所占权重随 α 的增加而提高；当 $\alpha=1$ 时，区间数中各对应点对它们之间的距离的影响程度都是相同的；当 $0<\alpha<1$ 时，远离区间上端点的对应点在区间数距离中所占权重随 α 的增加而降低，从而更加细致地反映了各对应点对区间数距离的影响情况，也进一步实现了对上述区间数距离公式的改进与推广。下面图 1 分别给出 $\alpha=1$，$\alpha>1$，以及 $0<\alpha<1$ 时区间数 a,b 中各对应点对区间数 a 与 b 的距离的影响程度图(其中黑色与蓝色实线分别表示区间数 a 与 b 中各对应点的影响程度)。

下面给出含参数 p 和 α 的改进型区间数距离公式。

定理 3.1 对任意区间数 $a=[\underline{a},\bar{a}]$，$b=[\underline{b},\bar{b}]$，定义

$$\begin{aligned}d_{p,\alpha}(a,b)&=\left\{\int_0^1\left|\left[\underline{a}+(\bar{a}-\underline{a})x^\alpha\right]-\left[\underline{b}+(\bar{b}-\underline{b})x^\alpha\right]\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\\&=\left\{\int_0^1\left|\left[(\bar{a}-\underline{a})-(\bar{b}-\underline{b})\right]x^\alpha+(\underline{a}-\underline{b})\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}(p\ge 1,\alpha>0)\end{aligned}$$

，则 $d_{p,\alpha}(a,b)$ 为区间数 a 与 b 之间的距离。

证明 非负性、严格正性、对称性均由 $d_{p,\alpha}$ 的定义可直接证得。下只需证其满足三角不等式。

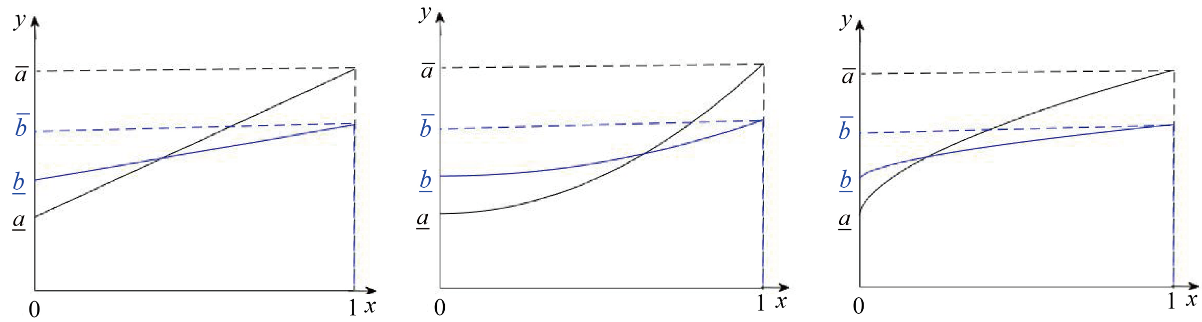

Figure 1. Graph of the influence degree of each corresponding point in interval number a and b on distance
图 1. 区间数 a 与 b 中各对应点对距离的影响程度图

对任意区间数 $a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$，$b=\left[\underline{b},\overline{b}\right]$，$c=\left[\underline{c},\overline{c}\right]$有

$$\begin{aligned}
d_{p,\alpha}(a,c)&=\left\{\int_0^1\left|\left[\underline{a}+\left(\overline{a}-\underline{a}\right)x^{\alpha}\right]-\left[\underline{c}+\left(\overline{c}-\underline{c}\right)x^{\alpha}\right]\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&=\left\{\int_0^1\left|\left[\underline{a}+\left(\overline{a}-\underline{a}\right)x^{\alpha}\right]-\left[\underline{b}+\left(\overline{b}-\underline{b}\right)x^{\alpha}\right]+\left[\underline{b}+\left(\overline{b}-\underline{b}\right)x^{\alpha}\right]-\left[\underline{c}+\left(\overline{c}-\underline{c}\right)x^{\alpha}\right]\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\le\left\{\int_0^1\left|\left[\underline{a}+\left(\overline{a}-\underline{a}\right)x^{\alpha}\right]-\left[\underline{b}+\left(\overline{b}-\underline{b}\right)x^{\alpha}\right]\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1\left|\left[\underline{b}+\left(\overline{b}-\underline{b}\right)x^{\alpha}\right]-\left[\underline{c}+\left(\overline{c}-\underline{c}\right)x^{\alpha}\right]\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&=d_{p,\alpha}(a,b)+d_{p,\alpha}(b,c)
\end{aligned}$$

证毕。

特别地，当 $p=1,\alpha=1$时，上述距离公式就退化为定义 3.1 中的形式；当 $p=2$时，有

$$d_{2,\alpha}(a,b)=\left\{\frac{1}{2\alpha+1}\left[\left(\overline{a}-\underline{a}\right)-\left(\overline{b}-\underline{b}\right)\right]^2+\frac{2}{\alpha+1}\left[\left(\overline{a}-\underline{a}\right)-\left(\overline{b}-\underline{b}\right)\right]\left(\underline{a}-\underline{b}\right)+\left(\underline{a}-\underline{b}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

命题 3.1 假设 $d_{p,\alpha}$ 是由定理 3.1 所定义的区间数距离，则对任意区间数 $a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$，$b=\left[\underline{b},\overline{b}\right]$，$c=\left[\underline{c},\overline{c}\right]$，有 $d_{p,\alpha}(a+c,b+c)=d_{p,\alpha}(a,b)$。

证明 由区间数的加法运算法则和定理 3.1 可直接得到。证毕。

命题 3.2 假设 $d_{p,\alpha}$ 是由定理 3.1 所定义的区间数距离，则对任意区间数 $a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$，$b=\left[\underline{b},\overline{b}\right]$，$k\in\mathbb{R}$，有

$$d_{p,\alpha}(ka,kb)=\begin{cases}kd_{p,\alpha}(a,b),k\ge 0\\ -kd_{p,\alpha}(-a,-b),k<0\end{cases}$$

证明 由区间数的数乘运算法则和定理 3.1 可以直接得到。证毕。

命题 3.3 假设 $d_{p,\alpha}$ 是由定理 3.1 所定义的区间数距离，则当 a,b 是实数时，有 $d_{p,\alpha}(a,b)=|a-b|$。

证明 由定理 3.1 知，当 a,b 是实数时，$d_{p,\alpha}(a,b)=\left\{\int_0^1|a-b|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}=|a-b|$。

证毕。

由命题 3.3 可知，当 a,b 是实数时，上述区间数距离就化为了实数之间的距离。

命题 3.4 假设 $d_{p,\alpha}$ 是由定理 3.1 所定义的区间数距离，$a=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$是任一区间数，$k_1,k_2$ 是任意实数，则当 $k_1<k_2<\underline{a}$ 时，有 $d_{p,\alpha}(a,k_1)>d_{p,\alpha}(a,k_2)$；当 $\overline{a}<k_1<k_2$ 时，有 $d_{p,\alpha}(a,k_1)<d_{p,\alpha}(a,k_2)$。

证明 由定理 2.1 可得

$$d_{p,\alpha}(a,k_1)=\left\{\int_0^1\left|\left[\left(\bar{a}-\underline{a}\right)\right]x^{\alpha}+\left(\underline{a}-k_1\right)\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}，\ d_{p,\alpha}(a,k_2)=\left\{\int_0^1\left|\left[\left(\bar{a}-\underline{a}\right)\right]x^{\alpha}+\left(\underline{a}-k_2\right)\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}。$$

又由 $k_1<k_2<\underline{a}$ 可得 $\left[\left(\bar{a}-\underline{a}\right)\right]x^{\alpha}+\left(\underline{a}-k_1\right)>\left[\left(\bar{a}-\underline{a}\right)\right]x^{\alpha}+\left(\underline{a}-k_2\right)$。

因此可证得 $d_{p,\alpha}(a,k_1)>d_{p,\alpha}(a,k_2)$。

当 $\bar{a}<k_1<k_2$ 时，同理可证得 $d_{p,\alpha}(a,k_1)<d_{p,\alpha}(a,k_2)$。

证毕。

下述例题可说明定理 3.1 中的改进型区间数距离是符合直觉的。

例 3.1 设有区间数 $a=[0,0]$，$b=[-1,2]$，$c=[1,2]$，此时 a 包含在 b 内且在 c 外，直观上 a 与 b 之间的距离应小于 a 与 c 之间的距离。同时利用定理 2.1 中的区间数距离公式可以得到

$$d_{2,\alpha}(a,b)=\sqrt{\frac{9}{2\alpha+1}-\frac{6}{\alpha+1}+1}，\ d_{2,\alpha}(a,c)=\sqrt{\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{2}{\alpha+1}+1}$$

又因为 $\left(\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{2}{\alpha+1}+1\right)-\left(\frac{9}{2\alpha+1}-\frac{6}{\alpha+1}+1\right)=\frac{8\alpha}{(2\alpha+1)(\alpha+1)}>0$，$\forall\alpha>0$。

所以不管决策者如何区间数中各对应点对区间数距离影响程度，都有 $d_{2,\alpha}(a,b)<d_{2,\alpha}(a,c)$。由此可说明定理 3.1 中的区间数距离是符合直觉的。

根据定理 2.1 可知，运用区间数距离构造模糊数距离是合理且可行的。下面基于定理 3.1 中的改进型区间数距离，利用 $[0,1]$ 区间上的一个连续正加权函数 $f(\lambda)$ 构造了一种模糊数距离，并且两模糊数 λ-截之间的距离对模糊数距离的权重影响随着 λ 增大而加强，还给出了其重要性质。

定理 3.2 对任意模糊数 $A,B\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$，记它们的 λ-截分别为 $A_\lambda=\left[\underline{A}(\lambda),\bar{A}(\lambda)\right]$，$B_\lambda=\left[\underline{B}(\lambda),\bar{B}(\lambda)\right]$，$\forall\lambda\in[0,1]$ 定义 $D_{p,\alpha,f}(A,B)=\left\{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\Big/\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right\}^{\frac{1}{p}}$，其中 $d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)=\left(d_{p,\alpha}(A_\lambda,B_\lambda)\right)^p$，$f(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 区间上的连续正加权函数，则 $D_{p,\alpha,f}(A,B)$ 是模糊数 A 与 B 之间的距离。此时称 $D_{p,\alpha,f}(A,B)$ 为模糊数 A 与 B 之间的 (p,α,f)-距离。

证明 非负性、严格正性、对称性均由 $D_{p,\alpha,f}$ 的定义可直接证得。下只需证其满足三角不等式。

对任意模糊数 $A,B,C\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$，由定理 2.1 的证明可知

$$d_{p,\alpha}(A_\lambda,C_\lambda)\le d_{p,\alpha}(A_\lambda,B_\lambda)+d_{p,\alpha}(B_\lambda,C_\lambda),\forall\lambda\in[0,1]$$

所以 $d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,C_\lambda)\le d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)+d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,C_\lambda),\forall\lambda\in[0,1]$。

又由 $f(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 区间上的一个连续的正函数，

可得 $d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,C_\lambda)\times f(\lambda)\le d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)\times f(\lambda)+d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,C_\lambda)\times f(\lambda),\forall\lambda\in[0,1]$，

所以

$$\begin{aligned}D_{p,\alpha,f}(A,C)&=\left\{\frac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,C_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\frac{\left[\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)\times f(\lambda)+d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,C_\lambda)\times f(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\le\left\{\frac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,B_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\frac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,C_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}=D_{p,\alpha,f}(A,B)+D_{p,\alpha,f}(B,C)\end{aligned}$$

证毕。

特别地，当 $p=2$ 时，令 $F(\lambda)=(\bar{A}(\lambda)-\underline{A}(\lambda))-(\bar{B}(\lambda)-\underline{B}(\lambda))$，$G(\lambda)=\underline{A}(\lambda)-\underline{B}(\lambda)$，有

$$D_{2,\alpha,f}(A,B)=\left\{\int_0^1\left\{\frac{1}{2\alpha+1}(F(\lambda))^2+\frac{2}{\alpha+1}F(\lambda)G(\lambda)+(G(\lambda))^2\right\}\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\Big/\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

命题 3.5 假设 $D_{p,\alpha,f}$ 是由定理 3.2 所定义的模糊数距离，则对任意模糊数 $A,B,C\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$，有 $D_{p,\alpha,f}(A+C,B+C)=D_{p,\alpha,f}(A,B)$。

证明 由模糊数的加法运算法则和定理 3.2 可直接得到。证毕。

命题 3.6 假设 $D_{p,\alpha,f}$ 是由定理 3.2 所定义的模糊数距离，则对任意模糊数 $A,B\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$，$k\in\mathbb{R}$，有

$$D_{p,\alpha,f}(kA,kB)=\begin{cases}kD_{p,\alpha,f}(A,B),k\ge 0\\ -kD_{p,\alpha,f}(-A,-B),k<0\end{cases}$$

证明 由模糊数的数乘运算法则和定理 3.2 可直接得到。证毕。

命题 3.7 假设 $D_{p,\alpha,f}$ 是由定理 3.2 所定义的模糊数距离，则当 A,B 是实数时，有 $D_{p,\alpha,f}(A,B)=|A-B|$；当 A,B 是区间数，有 $D_{p,\alpha,f}(A,B)=d_{p,\alpha}(A,B)$。

证明 当 A,B 是实数时，有 $A_\lambda=A$，$B_\lambda=B$，$\forall\lambda\in[0,1]$，由命题 2.3 和定理 2.2 可得，$D_{p,\alpha,f}(A,B)=|A-B|$。当 A,B 是区间数时，也有 $A_\lambda=A$，$B_\lambda=B$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

所以 $D_{p,\alpha,f}(A,B)=\left\{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A,B)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\Big/\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right\}^{\frac{1}{p}}=d_{p,\alpha}(A,B)$，

证毕。

命题 3.8 假设 $D_{p,\alpha,f}$ 是由定理 3.2 所定义的模糊数距离，A 是任一模糊数，k_1,k_2 是任意实数，则当 $k_1<k_2<inf(suppA)$ 时，有 $D_{p,\alpha,f}(A,k_1)>D_{p,\alpha,f}(A,k_2)$；当 $sup(suppA)<k_1<k_2$ 时，有 $D_{p,\alpha,f}(A,k_1)<D_{p,\alpha,f}(A,k_2)$。

证明 因为 $k_1,k_2\in\mathbb{R}$，所以 $k_{1\lambda}=k_1$，$k_{2\lambda}=k_2$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

由定理 3.2 可得

$$D_{p,\alpha,f}(A,k_1)=\left\{\frac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,k_1)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}},\quad D_{p,\alpha,f}(A,k_2)=\left\{\frac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,k_2)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}。$$

因为 $k_1<k_2<inf(suppA)$，所以利用命题 3.4 可得，$d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,k_1)<d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,k_2)$。

故有 $D_{p,\alpha,f}(A,k_1)>D_{p,\alpha,f}(A,k_2)$。

当 $sup(suppA)<k_1<k_2$ 时，同理可证得 $D_{p,\alpha,f}(A,k_1)<D_{p,\alpha,f}(A,k_2)$。证毕。

4. 基于模糊数 (p,α,f)-距离的模糊数排序

模糊数的排序是模糊算法中的一个基本问题。本节将利用第 3 节提出的模糊数 (p,α,f)-距离，实现对模糊数的排序。下面假设 $\mathcal{A}$ 表示一给定非空有限模糊数子集。

定义 4.1 [16] 设 L 是一模糊数，如果对任意 $A\in\mathcal{A}$，都有 $sup(suppL)\le inf(suppA)$，则称模糊数 L 为 $\mathcal{A}$ 的一下界(lower horizon)。

定义 4.2 [16] 设 U 是一模糊数，如果对任意 $A\in\mathcal{A}$，都有 $inf(suppU)\ge sup(suppA)$，则称模糊数 U 为 $\mathcal{A}$ 的一上界(upper horizon)。

下面基于定理 3.2 提出模糊数之间的 (p,α,f)-距离，构造模糊数排序函数，进而实现模糊数的排序。

定义 4.3 设 L 是 $\mathcal{A}$ 的一取定下界，当 p,α,f 取定时，定义 $R_L:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$，$R_L(A)=D_{p,\alpha,f}(A,L)$，$A\in\mathcal{A}$，其中 $D_{p,\alpha,f}(A,L)=\left\{\dfrac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,L_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}$。

定义 4.4 设 U 是 $\mathcal{A}$ 的一取定上界，当 p,α,f 取定时，定义 $R_U:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$，$R_U(A)=-D_{p,\alpha,f}(A,U)$，$A\in\mathcal{A}$，其中 $D_{p,\alpha,f}(A,U)=\left\{\dfrac{\int_0^1 d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,U_\lambda)\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}$。

也可以根据决策者的偏好，综合考虑 $D_{p,\alpha,f}(A,L)$ 与 $D_{p,\alpha,f}(A,U)$，定义 $R:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$，$R(A)=\beta_1 D_{p,\alpha,f}(A,L)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(A,U)$，$\beta_1,\beta_2\geq 0$，$A\in\mathcal{A}$。当 $\beta_1=1,\beta_2=0$ 时，R 退化为 R_L；当 $\beta_1=0,\beta_2=1$ 时，R 退化为 R_U。

因此，对任意模糊数 $A,B\in\mathcal{A}$ 的排序定义如下：

$$A\succ_R B\Leftrightarrow R(A)>R(B);$$

$$A\prec_R B\Leftrightarrow R(A)<R(B);$$

$$A\sim_R B\Leftrightarrow R(A)=R(B);$$

$$A\succeq_R B\Leftrightarrow A\succ_R B\text{或}A\sim_R B\Leftrightarrow R(A)>R(B)\text{或}R(A)=R(B)\Leftrightarrow R(A)\geq R(B);$$

$$A\preceq_R B\Leftrightarrow A\prec_R B\text{或}A\sim_R B\Leftrightarrow R(A)<R(B)\text{或}R(A)=R(B)\Leftrightarrow R(A)\leq R(B)\text{。}$$

下面主要探讨前面提出的模糊数排序方法是否具备 Wang 和 Kerre 在文献[17]中提出的模糊数排序性质。

定理 4.1 设 L 和 U 分别是关于 $\mathcal{A}$ 的取定下界和上界，对任意 $A\in\mathcal{A}$，定义 $R(A)=\beta_1 D_{p,\alpha,f}(A,L)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(A,U)$（$\beta_1,\beta_2\geq 0$，为决策者的偏好度），有以下结论成立：

(1) 对任意 $A\in\mathcal{A}$，有 $A\succeq_R A$；

(2) 对任意 $A,B\in\mathcal{A}$，若 $A\succeq_R B$ 且 $B\succeq_R A$，则有 $A\sim_R B$；

(3) 对任意 $A,B,C\in\mathcal{A}$，若 $A\succeq_R B$ 且 $B\succeq_R C$，则有 $A\succeq_R C$；

(4) 对任意 $A,B\in\mathcal{A}$，若 $inf(suppA)\geq sup(suppB)$，则有 $A\succeq_R B$。

证明 (1)~(3)由排序的定义即可得证。下面只需证明(4)。

(4)：因为 $inf(suppA)\geq sup(suppB)$，所以 $\bar{A}(\lambda)\geq\underline{A}(\lambda)\geq\bar{B}(\lambda)\geq\underline{B}(\lambda),\forall\lambda\in[0,1]$。

$$\underline{A}(\lambda)+\left(\bar{A}(\lambda)-\underline{A}(\lambda)\right)x^\alpha\geq\underline{B}(\lambda)+\left(\bar{B}(\lambda)-\underline{B}(\lambda)\right)x^\alpha,\quad\forall\lambda\in[0,1],x\in[0,1],\alpha>0\text{。}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left[\underline{A}(\lambda)+\left(\bar{A}(\lambda)-\underline{A}(\lambda)\right)x^\alpha-\left[\underline{L}(\lambda)+\left(\bar{L}(\lambda)-\underline{L}(\lambda)\right)x^\alpha\right]\right]\\&-\left[\underline{B}(\lambda)+\left(\bar{B}(\lambda)-\underline{B}(\lambda)\right)x^\alpha-\left[\underline{L}(\lambda)+\left(\bar{L}(\lambda)-\underline{L}(\lambda)\right)x^\alpha\right]\right]\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\underline{A}(\lambda)+\left(\bar{A}(\lambda)-\underline{A}(\lambda)\right)x^\alpha-\left[\underline{U}(\lambda)+\left(\bar{U}(\lambda)-\underline{U}(\lambda)\right)x^\alpha\right]\right]\\&-\left[\underline{B}(\lambda)+\left(\bar{B}(\lambda)-\underline{B}(\lambda)\right)x^\alpha-\left[\underline{U}(\lambda)+\left(\bar{U}(\lambda)-\underline{U}(\lambda)\right)x^\alpha\right]\right]\leq 0\end{aligned}$$

故有 $d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,L_\lambda)\geq d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,L_\lambda)$，$d_{p,\alpha}^p(A_\lambda,U_\lambda)\leq d_{p,\alpha}^p(B_\lambda,U_\lambda)$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

DOI: 10.12677/pm.2024.148318

又由 $f(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 区间上的一个连续的正函数可得

$$D_{p,\alpha,f}(A,L)\ge D_{p,\alpha,f}(B,L)，\quad D_{p,\alpha,f}(A,U)\le D_{p,\alpha,f}(B,U)$$

所以有 $\beta_1 D_{p,\alpha,f}(A,L)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(A,U)\ge \beta_1 D_{p,\alpha,f}(B,L)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(B,U)$，即有 $A\succeq_R B$。

证毕。

由于上述排序方法与 $L(U)$ 的选择有关，这里并不考虑[17]中提到的第 5 条性质，只将第 6，7 条性质分别弱化为如下定理的(1)和(2)。

定理 4.2 设 A,B 是任意两模糊数，L 和 U 分别是 $\{A,B\}$ 的取定下界和上界，对任意 $X\in\{A,B\}$，定义 $R(X)=\beta_1 D_{p,\alpha,f}(X,L)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(X,U)$ （$\beta_1,\beta_2\ge 0$），有以下结论成立：

(1) 如果在 $\{A,B\}$ 上有 $A\succeq_R B$，则在 $\{A+C,B+C\}$ 上有 $A+C\succeq_{R+C} B+C$，其中 C 是任一模糊数，$(R+C)(Y)\triangleq \beta_1 D_{p,\alpha,f}(Y,L+C)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(Y,U+C)$，$Y\in\{A+C,B+C\}$。

(2) 如果在 $\{A,B\}$ 上有 $A\succeq_R B$，则在 $\{kA,kB\}$ 上有 $kA\succeq_{kR} kB$，其中 $k\in\mathbb{R}$，$k\ge 0$，$(kR)(Y)\triangleq \beta_1 D_{p,\alpha,f}(Y,kL)-\beta_2 D_{p,\alpha,f}(Y,kU)$，$Y\in\{kA,kB\}$。

证明 由命题 3.5 和命题 3.6 即可得证。证毕。

5. 示例

为简便起见，下面只讨论当取 $p=2$，$\alpha=0.5,1,2$，$L=0$，$f(\lambda)=\sqrt{\lambda},\lambda,\lambda^2$ 时，一些模糊数集在 R_L 下的排序情况。设有梯形模糊数 $A=(a_1,b_1,c_1,d_1)$，令 $r=d_1-a_1$，$s=a_1-b_1+c_1-d_1$，$t=b_1-a_1$，此时梯形模糊数 A 对应的 $R_L(A)$ 为

$$R_{L,\alpha,f(\lambda)}(A)=\left\{\frac{\int_0^1\int_0^1\left|(r+s\lambda)x^\alpha+a_1+t\lambda\right|^2\mathrm{d}x\times f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{\int_0^1\int_0^1\left|(r+s\lambda)x^\alpha+a_1+t\lambda\right|^2\times f(\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

例 5.1 [2] 设有两模糊数 A 和 B，其隶属函数分别为：

$$A(x)=\begin{cases}x-1,1\le x\le 2\\ \dfrac{5-x}{3},2\le x\le 5\\ 0,\text{其它}\end{cases}，\quad B(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-2)^2},1\le x\le 2\\ \sqrt{1-\dfrac{1}{4}(x-2)^2},2\le x\le 4\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

试对其进行排序，对应隶属函数图如图 2 所示。

(1) 通过 Liou 和 Wang 的排序方法[2]，当应用不同的乐观指数 α 时，对同一问题将产生不同的排序。如：对于乐观决策者 $(\alpha=1)$，有 $B\succ A$；对于中立决策者 $(\alpha=0.5)$，有 $A\succ B$；对于悲观决策者 $(\alpha=0)$，有 $A\succ B$；

(2) 通过 De Hierro 和 Roldán C 等人提出的排序方法[10]，可得 $A\succ B$；

(3) 通过 Chu 和 Tsao 提出的排序方法[18]，可得 $A\succ B$；

(4) 通过使用本文提出的方法，对 α 取不同的值时，可得出不同的排序：

当 $\alpha=0.5$ 时，有 $B\succ A$；当 $\alpha=1$ 时，有 $B\succ A$；当 $\alpha=2$ 时，有 $A\succ B$。

当然，当权重函数 $f(\lambda)$，L 改变时，本方法得到的排序结果也可能改变。

例 5.2 [19] 给出以下 4 组模糊数(如图 3 所示)，利用本文所提出的排序方法对其进行比较，并将所得结果与其它排序方法所得结果进行对比分析(如表 1 所示)。

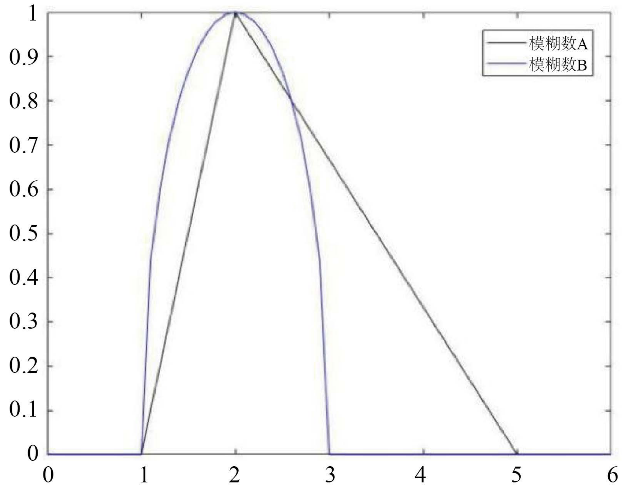

Figure 2. Images of membership functions of fuzzy numbers A and B
图 2. 模糊数 A 和 B 的隶属函数图像

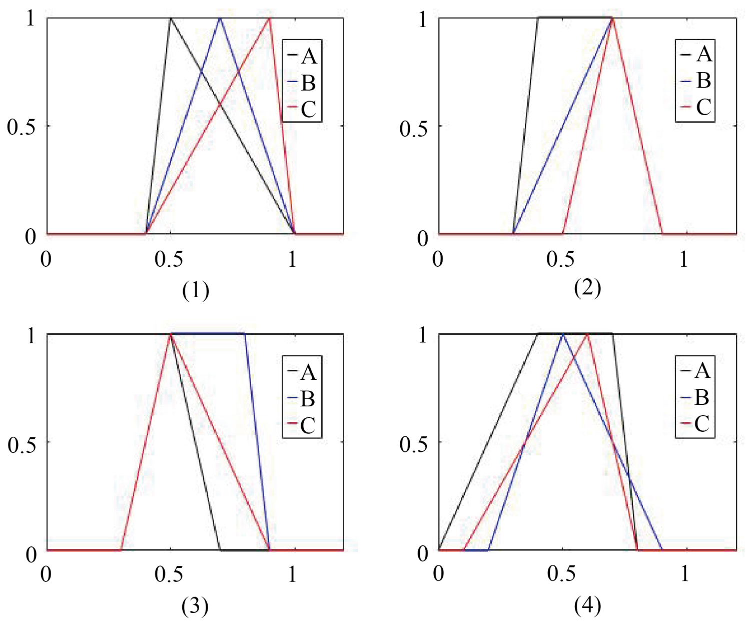

Figure 3. Images of membership functions corresponding to the four sets of fuzzy numbers
图 3. 四组模糊数集分别对应的隶属函数图像

Table 1. Ranking results obtained by other methods
表 1. 由其它方法得到的排序结果

	(1)	(2)	(3)	(4)
Yao 和 Wu [19]	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \sim C$
Yager [1]	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$
Abbasbandy 和 Asady [20] ($p = 2$)	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$

续表

Asady 和 Zendehnam [21]	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \sim C$
Ezzati 和 Allahviranloo [22]	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$B \prec A \prec C$
Aguilar-Peña 等人[23]	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$

(1) $A=(0.4,0.5,1)$，$B=(0.4,0.7,1)$，$C=(0.4,0.9,1)$；

(2) $A=(0.3,0.4,0.7,0.9)$，$B=(0.3,0.7,0.9)$，$C=(0.5,0.7,0.9)$；

(3) $A=(0.3,0.5,0.7)$，$B=(0.3,0.5,0.8,0.9)$，$C=(0.3,0.5,0.9)$；

(4) $A=(0,0.4,0.7,0.8)$，$B=(0.2,0.5,0.9)$，$C=(0.1,0.6,0.8)$。

下面利用本文所提出的排序方法，考虑取 $p=2$，$\alpha=0.5,1,2$，$L=0$，$f(\lambda)=\sqrt{\lambda},\lambda,\lambda^2$，分别对如上四组模糊数集进行排序，排序结果如下。

对于(1)组所给模糊数，利用排序指标计算公式以及计算工具可得到如下结果：

$$R_{L,\alpha,\sqrt{\lambda}}(A)=\left\{\frac{\int_0^1\int_0^1\left|(0.6-0.4\lambda)x^\alpha+0.4+0.1\lambda\right|^2\times\sqrt{\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1\sqrt{\lambda}\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}0.7069,\alpha=0.5\\0.6496,\alpha=1\\0.5907,\alpha=2\end{cases},$$

$$R_{L,\alpha,\lambda}(A)=\left\{\frac{\int_0^1\int_0^1\left|(0.6-0.4\lambda)x^\alpha+0.4+0.1\lambda\right|^2\times\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1\lambda\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}0.6948,\alpha=0.5\\0.6416,\alpha=1\\0.5870,\alpha=2\end{cases},$$

$$R_{L,\alpha,\lambda^2}(A)=\left\{\frac{\int_0^1\int_0^1\left|(0.6-0.4\lambda)x^\alpha+0.4+0.1\lambda\right|^2\times\lambda^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1\lambda^2\mathrm{d}\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}0.6797,\alpha=0.5\\0.6317,\alpha=1\\0.5824,\alpha=2\end{cases},$$

同理可得

$$R_{L,\alpha,f(\lambda)}(B)=\begin{bmatrix}\alpha\setminus f(\lambda) & \sqrt{\lambda} & \lambda & \lambda^2\\0.5 & 0.7435 & 0.7360 & 0.7266\\1 & 0.7049 & 0.7036 & 0.7021\\2 & 0.6660 & 0.6711 & 0.6776\end{bmatrix},\ R_{L,\alpha,f(\lambda)}(C)=\begin{bmatrix}\alpha\setminus f(\lambda) & \sqrt{\lambda} & \lambda & \lambda^2\\0.5 & 0.8631 & 0.8689 & 0.8764\\1 & 0.8258 & 0.8377 & 0.8526\\2 & 0.7886 & 0.8064 & 0.8290\end{bmatrix}。$$

故利用本文所提出的排序方法，第(1)组模糊数的排序结果恒为 $A\prec B\prec C$。

同理，对于(2)组所给模糊数，利用排序指标计算公式以及计算工具可得第(2)组模糊数的排序结果恒为 $A\prec B\prec C$；对于(3)组所给模糊数，利用排序指标计算公式以及计算工具可得第(3)组模糊数的排序结果恒为 $A\prec C\prec B$；对于(4)组所给模糊数，利用排序指标计算公式以及计算工具可得第(4)组模糊数的排序结果为：

当 $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$ 时，有 $B\prec A\prec C(\alpha=0.5)$，$A\prec B\prec C(\alpha=1)$，$A\prec B\prec C(\alpha=2)$；

当 $f(\lambda)=\lambda$ 时，有 $B\prec A\prec C(\alpha=0.5)$，$A\prec B\prec C(\alpha=1)$，$A\prec B\prec C(\alpha=2)$；

当 $f(\lambda)=\lambda^2$ 时，有 $B\prec A\prec C(\alpha=0.5)$，$B\prec A\prec C(\alpha=1)$，$A\prec B\prec C(\alpha=2)$。

运用其它模糊数排序方法可得到上述四组模糊数集的排序结果如表 1 所示。

通过上述示例，可以说明本文所提出的模糊数排序方法是可行的。同时，在实际应用中，决策者可以根据实际情况和偏好，选取不同的 $p,\alpha,L,U,f(\lambda),\beta_1,\beta_2$，对模糊数的排序赋予不同的重视程度，从而

得到更具个性化和广泛适用性的排序结果。

6. 结束语

本文基于加权函数 $x^{\alpha}(\alpha>0)$ 所建立的区间数及模糊数之间的含参距离，结合所选定参考模糊数建立了排序指标，设计出了一种模糊数排序新方法。该方法不仅可对所有类型的模糊数进行比较排序，还能有效体现决策者的个性化偏好，但由于区间数中对应点对区间数距离的影响程度是受 α 控制的，故其并不能很好的展现决策者的态度。未来，可考虑引入一般的加权函数 $w(x)$，进一步改进区间数、模糊数距离，进而提出更一般化的模糊数排序方法，更好地体现决策者的态度。也可以考虑结合计算机科学、逻辑学等领域的研究成果，探讨出更准确可靠的模糊数排序方法，为解决现实世界中的复杂决策问题提供更加有力的理论支持和技术工具。

基金项目

国家自然科学基金(12301595, 62106206)。

参考文献

[1] Yager, R.R. (1981) A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval. *Information Sciences*, **24**, 143-161. https://doi.org/10.1016/0020-0255(81)90017-7

[2] Liou, T. and Wang, M.J. (1992) Ranking Fuzzy Numbers with Integral Value. *Fuzzy Sets and Systems*, **50**, 247-255. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90223-q

[3] Yu, V.F. and Dat, L.Q. (2014) An Improved Ranking Method for Fuzzy Numbers with Integral Values. *Applied Soft Computing*, **14**, 603-608. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.10.012

[4] Dutta, P. (2019) A Straightforward Advanced Ranking Approach of Fuzzy Numbers. In: Satapathy, S., Bhateja, V., Mohanty, J. and Udgata, S., Eds., *Smart Innovation, Systems and Technologies*, Springer, 475-483. https://doi.org/10.1007/978-981-13-9282-5_45

[5] Patra, K. (2021) Fuzzy Risk Analysis Using a New Technique of Ranking of Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers. *Granular Computing*, **7**, 127-140. https://doi.org/10.1007/s41066-021-00255-5

[6] Tran, L. and Duckstein, L. (2002) Comparison of Fuzzy Numbers Using a Fuzzy Distance Measure. *Fuzzy Sets and Systems*, **130**, 331-341. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(01)00195-6

[7] 刘华文. 基于距离测度的模糊数排序[J]. 山东大学学报(理学版), 2004, 39(2): 30-36.

[8] 朱章遐，曹炳元. 具有模糊变量的线性规划问题[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(1): 115-119.

[9] Lee, K., Cho, C. and Lee-Kwang, H. (1994) Ranking Fuzzy Values with Satisfaction Function. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**, 295-309. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90153-8

[10] Roldán López de Hierro, A.F., Roldán, C. and Herrera, F. (2018) On a New Methodology for Ranking Fuzzy Numbers and Its Application to Real Economic Data. *Fuzzy Sets and Systems*, **353**, 86-110. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.003

[11] 甘庭聪，徐义红，张雨涵. 三角模糊数的一种排序方法[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(13): 116-121.

[12] Van Hop, N. (2022) Ranking Fuzzy Numbers Based on Relative Positions and Shape Characteristics. *Expert Systems with Applications*, **191**, Article ID: 116312. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116312

[13] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 第 3 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2010: 97-98.

[14] Goetschel, R. and Voxman, W. (1986) Elementary Fuzzy Calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 31-43. https://doi.org/10.1016/0165-0114(86)90026-6

[15] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2011: 45-46.

[16] Grzegorzewski, P. (1998) Metrics and Orders in Space of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, **97**, 83-94. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(96)00322-3

[17] Wang, X. and Kerre, E.E. (2001) Reasonable Properties for the Ordering of Fuzzy Quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems*, **118**, 375-385. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(99)00062-7

[18] Chu, T. and Tsao, C. (2002) Ranking Fuzzy Numbers with an Area between the Centroid Point and Original Point.

Computers & Mathematics with Applications, **43**, 111-117. https://doi.org/10.1016/s0898-1221(01)00277-2

[19] Yao, J. and Wu, K. (2000) Ranking Fuzzy Numbers Based on Decomposition Principle and Signed Distance. *Fuzzy Sets and Systems*, **116**, 275-288. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(98)00122-5

[20] Abbasbandy, S. and Asady, B. (2006) Ranking of Fuzzy Numbers by Sign Distance. *Information Sciences*, **176**, 2405-2416. https://doi.org/10.1016/j.ins.2005.03.013

[21] Asady, B. and Zendehnam, A. (2007) Ranking Fuzzy Numbers by Distance Minimization. *Applied Mathematical Modelling*, **31**, 2589-2598. https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.10.018

[22] Ezzati, R., Allahviranloo, T., Khezerloo, S. and Khezerloo, M. (2012) An Approach for Ranking of Fuzzy Numbers. *Expert Systems with Applications*, **39**, 690-695. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.07.060

[23] Aguilar-Peña, C., Roldán-López de Hierro, A., Roldán-López de Hierro, C. and Martínez-Moreno, J. (2014) A Family of Fuzzy Distance Measures of Fuzzy Numbers. *Soft Computing*, **20**, 237-250. https://doi.org/10.1007/s00500-014-1497-0