

新课程背景下图形数字化资源库建设

王迎雪, 王天洋, 王丽娟*, 陈俊英*, 管琳

河北农业大学理学院, 河北 保定

收稿日期: 2024年5月20日; 录用日期: 2024年6月23日; 发布日期: 2024年7月31日

摘要

高等数学、线性代数和解析几何都属于大学中的抽象数学课程, 数学课程大多需要通过抽象符号, 复杂图形来开展教学, 为帮助学生理解数学思想。我们应用MATLAB、Python、GeoGebra等软件的作图功能, 绘制平面曲线、立体曲面的图像, 得到一系列的静图和动图, 将这些资源整合, 辅助高校进行数学课堂教学, 提高学生的学习质量, 提高教师的教学效率。本文通过对数字图像的开发设计, 构建直接具体的数学模型, 为高校师生提供可视化的动图和动态化的图形, 为师生创造一个具体形象、立体交互、能人人操作的动态学习资源库, 为大学数学课程教育教学提供教学工具。

关键词

大学数学, 数字化资源库, 平面图形, 二次曲面

Construction of Digital Resource Library for Graphics under the Background of New Curriculum

Yingxue Wang, Tianyang Wang, Lijuan Wang*, Junying Chen*, Lin Guan

College of Science, Hebei Agricultural University, Baoding Hebei

Received: May 20th, 2024; accepted: Jun. 23rd, 2024; published: Jul. 31st, 2024

Abstract

Advanced mathematics, linear algebra, and analytic geometry are all abstract mathematics courses in universities. Most mathematics courses require teaching through abstract symbols and complex graphics to help students understand mathematical ideas. We use the drawing functions of software

*通讯作者。

文章引用: 王迎雪, 王天洋, 王丽娟, 陈俊英, 管琳. 新课程背景下图形数字化资源库建设[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 223-242. DOI: 10.12677/pm.2024.147289

such as MATLAB, Python, and GeoGebra to draw images of flat curves and three-dimensional surfaces, obtaining a series of static and dynamic graphs. We integrate these resources to assist mathematics classroom teaching in universities, improve the quality of student learning, and enhance the teaching efficiency of teachers. This article constructs a direct and concrete mathematical model through the development and design of digital images, providing visual and dynamic graphics for university teachers and students, creating a dynamic learning resource library that is concrete, interactive, and accessible to everyone, and providing teaching tools for university mathematics curriculum education and teaching.

Keywords

College Mathematics, Digital Respository, Plane Figure, Quadric Surface

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在数学的浩瀚领域中，平面曲线、二次曲线作为初等数学与高等数学、解析几何的交汇点，其独特的形态和丰富的性质一直是数学研究的重要课题。然而，传统的曲线教学方法往往依赖于纸笔绘图和理论推导，在图像的精确度和动态性方面存在局限。随着信息技术的飞速发展，数字图像技术以其高精度、高效率 and 直观性强的特点，为研究和教学提供了新的工具。数字图像技术能够准确绘制出各种形态的曲线，而且能够通过参数调整实时观察曲线的变化，使学生更直观地理解曲线的性质。

从各个专业学生对于专业学习的认知能力方面来说，高等数学、线性代数、概率论与数理统计以及数值分析这四个科目学习的难度比较大。科目中的概念比较抽象复杂，对于习惯于具体、实操的学生来说，抽象思维程度较高，不容易理解学习；且随着时间的推移，知识越来越深奥，抽象知识增加，出现学生学习艰难、教师教学困难等情况。因此，制作一些数字化、可视的、互动式的数学图像辅助学习显得尤为重要。

本研究以数字化图像为始点，结合编程对大学数学课程进行图形研究，创建动态学习资源库，将平面曲线和曲面直观、动态的展示，使教育变得更加可视化、动态化和抽象教育细节化，同时，我们也希望通过本研究，推动数字图像技术在数学教学领域的广泛应用，为数学教学的创新和发展贡献力量。通过数字图像技术绘制和分析二次曲线图像，我们可以更深入地理解其性质，为相关学科的研究提供理论支持；将数字图像技术引入二次曲线教学，可以丰富教学手段，提高教学效果，激发学生的学习兴趣 and 创造力，降低教与学的学习成本，节省纸质化课程资源，符合当今数字化的大背景潮流[1]。本研究还可以为数字图像技术在数学教学领域的应用提供有益的借鉴和参考。

2. 平面曲线资源库的构建

在本文中，我们采用 MATLAB、Python 和 GeoGebra 等软件工具，来辅助数学图像的描绘与教学工作。这些软件不仅具备强大的数值计算和图形处理能力，而且其操作简便、功能丰富，能够很好地满足数学教学的需求。在研究过程中，我们利用软件编写程序，通过编写输入数学方程或函数，自动绘制出对应的数学图像。为确保方法的可操作性和可复现性，我们详细描述了 MATLAB、Python 和 GeoGebra 等软件的使用方法和功能特点，并提供了具体的操作示例和代码。同时，我们还强调了这些软件在数学教学中的实际应用价值，希望为数学教学的创新和发展提供有益的借鉴和参考。

2.1. 摆线和特殊摆线的绘制

摆线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

摆线是指一个圆在一条定直线上滚动时，圆周上一个定点的轨迹，又称圆滚线、旋轮线。 a 为圆的半径， θ 是圆的半径所经过的弧度(滚动角)，当 θ 由 0 变到 2π 时，动点就画出了摆线的一支，称为一拱。

见图 1 为 $a = 2, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$ 的图像。

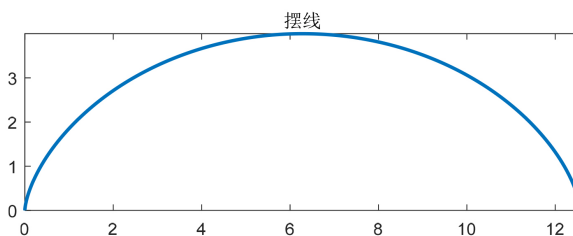


Figure 1. Cycloid
图 1. 摆线

摆线在生活中较为常见，补充两种特殊摆线：心形线(外摆线的一种)、星形线(内摆线的一种)摆线图像作为一种直观的几何表示，能够将摆线的复杂概念转化为可视化的形式，使学生更易于理解和掌握。例如，通过摆线图像，学生可以直观地观察到摆线的周期性、对称性等特点，从而深入理解摆线的定义和性质。通过观察和学习具有独特的几何美感和动态特性的摆线图，将复杂的数学方程以直观、生动的方式呈现出来，有助于学生更好地理解 and 接受，提升空间想象能力。

心形线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = 16 \sin 3t \\ y = 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t \end{cases}$$

星形线的方程为

$$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t - \cos 2t \sin t \\ y = 3 \sin^3 t - \cos t \sin 2t, \text{ 其中 } t \in (-2\pi, 2\pi) \end{cases}$$

绘制图如图 2 和图 3。

资源库中心形线和星形线图像属于特殊的摆线，其形状和变化规律能够吸引学生的注意力，增强他们对高等数学的学习兴趣。通过探索和研究摆线图像，学生可以感受到数学的趣味性和实用性，从而更加积极地投入到数学的学习中。

2.2. 螺线

螺线，也称为螺旋线，是一种围绕一个中心点或一条轴旋转，同时又逐渐远离的动点的轨迹。

资源库中的螺线图有助于学生更好地明白数学概念，如旋转、距离、切线等。学生能够通过观察螺线的形状和性质，更直观地理解这些抽象概念，从而增强对数学的理解和应用能力，教师可引导学生尝试将螺线的概念与其他知识相结合，这样不仅可以帮助学生更好地掌握数学知识，还可以培养他们的实际应用能力 and 创新思维。因此，将资源库中螺线模型融入课堂教学，作为一种教学工具能够提高教学质量和效果。

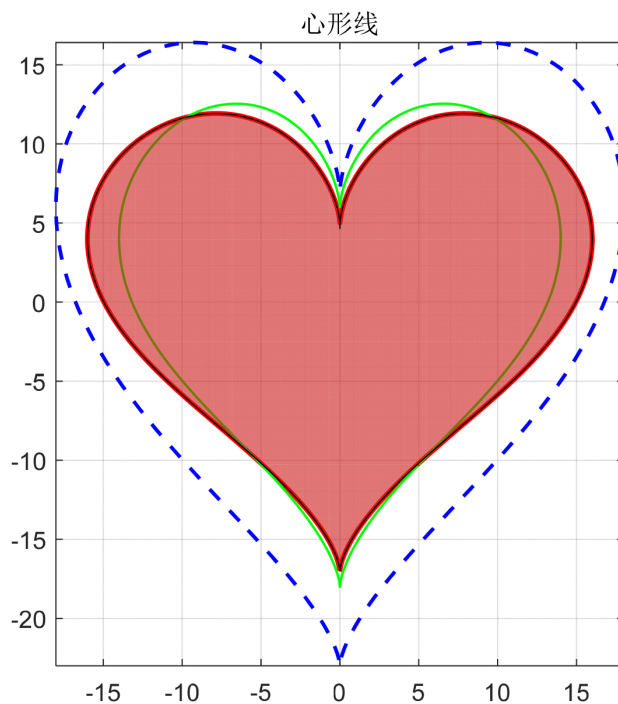


Figure 2. Heart line
图 2. 心形线

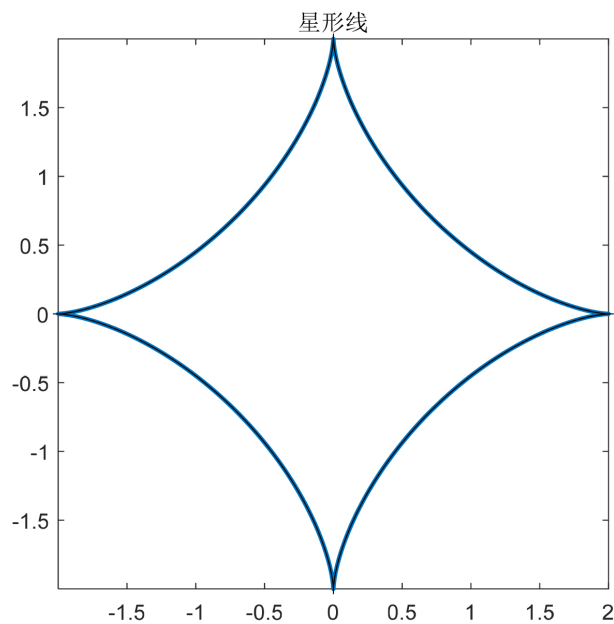


Figure 3. Star line
图 3. 星形线

对数螺线: $r = e^{a\theta}$

双曲螺线: $r\theta = a$

阿基米德螺线: $r = a\theta$

下面是三种螺线的展示, 见图 4~6。

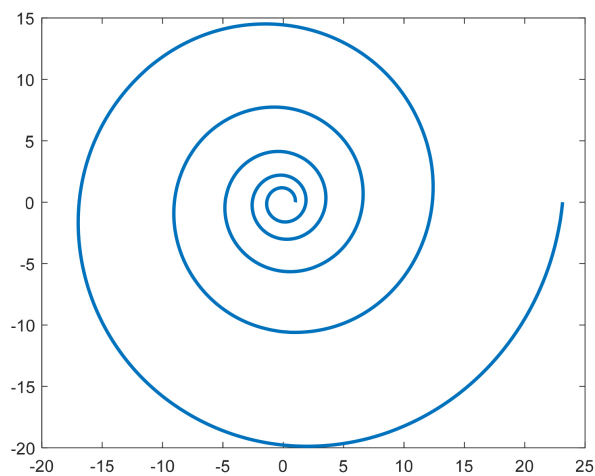


Figure 4. Logarithmic spiral

图 4. 对数螺线

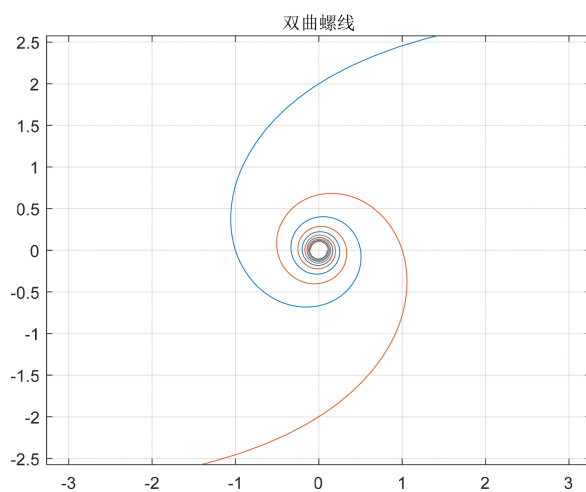


Figure 5. Hyperbolic spiral

图 5. 双曲螺线

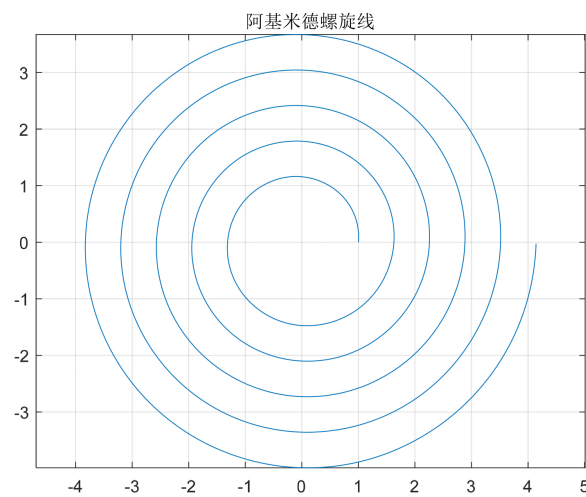


Figure 6. Archimedean spiral

图 6. 阿基米德螺线

2.3. 玫瑰线

生活中有许多曲线可以用数学知识进行描绘，比如三叶玫瑰线和四叶玫瑰线。

MATLAB 是一款功能强大的科学计算软件，提供了丰富的数学函数和工具箱，能进行高效的数值计算、数据分析和算法开发。用户可以在其直观的编程环境中编写代码，并利用其数据可视化功能制作高质量的图形。此外，MATLAB 还支持与多种编程语言混合编程，具有良好的可扩展性，方便用户根据需求进行功能扩展。MATLAB 的特点在于其简单易懂的编程语言和丰富的功能工具箱，能满足不同领域的需求，如信号处理、图像处理、控制系统等。同时，其强大的数据可视化和图形处理能力使得复杂数据得以直观展示。这些优势使得 MATLAB 成为科研、数学设计和数据分析等领域的首选工具，广泛应用于各种复杂计算和仿真任务中。

在绘制曲线的过程中我们使用 MATLAB 编写绘制玫瑰线程序，打开 MATLAB 软件，创建新的脚本文件；编写程序，输入玫瑰线的数学方程；运行程序，绘制数学图像，并通过修改方程参数绘制对应的三叶玫瑰线和四叶玫瑰线。调整图像属性，如三叶玫瑰线颜色为红色，四叶玫瑰线颜色为蓝色，线型为 2.5 磅等，确保图像准确且美观；导出图像为数字文件。

三叶玫瑰线 MATLAB 代码为：

```
clc
clear all;
figure('Color', 'w');
axis equal;
hold on;
theta = 0:0.01:pi;
a=1;
for i = 0:0.05:pi
    r = a*cos(3*theta);
    x = a*cos(3*theta).*cos(theta);
    y = a*cos(3*theta).*sin(theta);
    plot(x, y, 'LineWidth', 2.5);
end
title('三叶玫瑰线');
xlabel('X');
ylabel('Y');
hold off;
```

也可通过修改上方的代码中的曲线方程得出美丽的四叶玫瑰线，以下图 7 为三叶玫瑰线和四叶玫瑰线整合图示例。

三叶玫瑰线，又称为极坐标叶状线或三叶玫瑰线，是一种美丽而神秘的几何曲线。三叶玫瑰线具有对称性，每个花瓣都沿着对称轴成对出现，这种对称性使得它在视觉上极具吸引力。四叶玫瑰线则是另一种具有独特美感的曲线。它的定义与三叶玫瑰线类似，但具有不同的参数和特性。

在数学研究中，三叶玫瑰线和四叶玫瑰线在二维平面上呈现出复杂而有序的形状，有助于学生深入理解曲线的几何结构和性质，帮助学生在脑海中构建其空间形态，锻炼学生的空间想象能力，为学习更高级的空间几何和微分几何课程打下坚实基础。将这些在日常生活中蕴含着数学美的曲线加入到平面曲

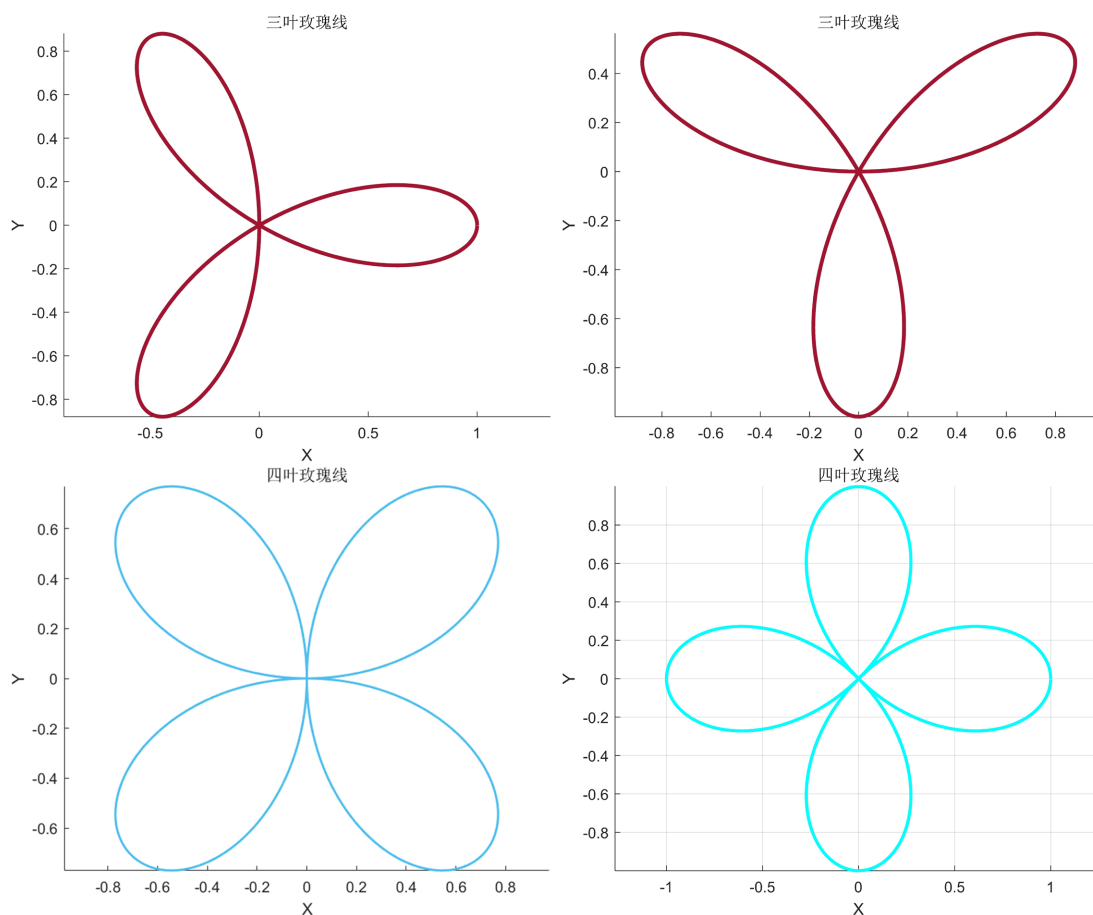


Figure 7. Rose line
图7. 玫瑰线

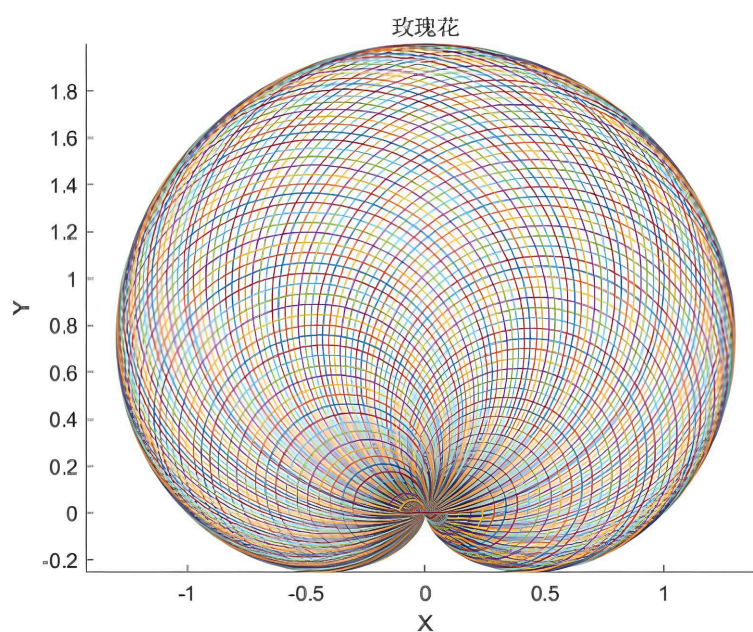


Figure 8. Special rose line
图8. 特殊玫瑰线

线资源库中,通过欣赏、学习和研究这些玫瑰线,可以使学生的数学思维更加发散,观察生活中的事物,试着应用数学知识通过计算机来描绘出来;学生也可以更深入地理解数学和自然的奥秘,欣赏数学和艺术之间的美妙连接。

2.4. 伯努利双纽线

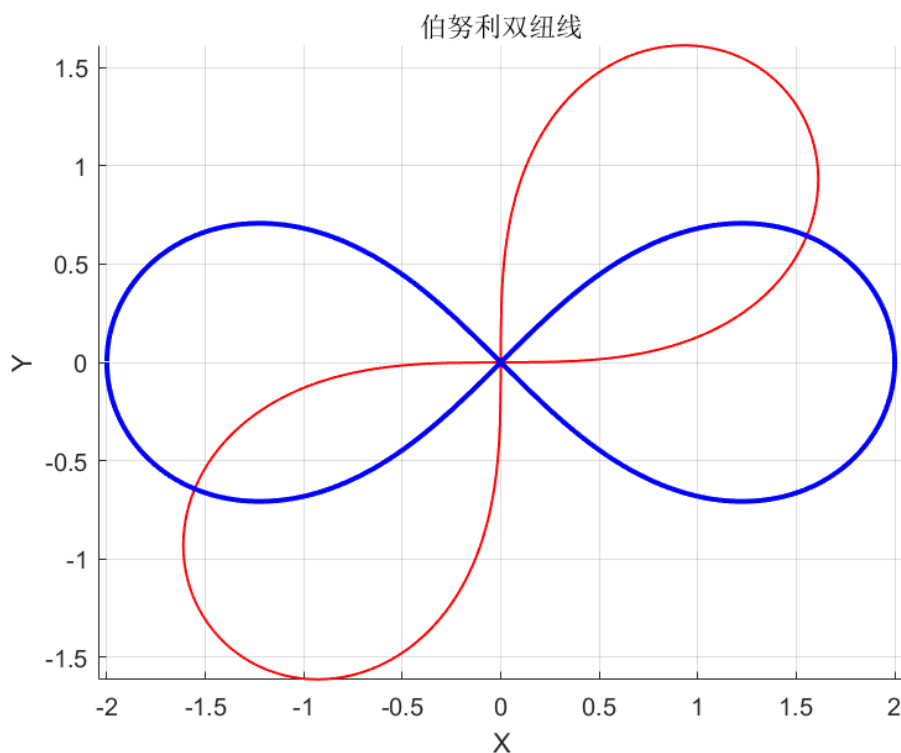


Figure 9. Lemniscate line

图 9. 伯努利双纽线

其红色和蓝色的双纽线方程分别为

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \\ r^2 = a^2 \sin 2\theta \end{cases}, \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ r^2 = a^2 \cos 2\theta \end{cases}$$

伯努利双纽线(见图 9)是一种具有特殊对称性质和美观形状的曲线,在数学乃至多个领域都有广泛的应用。该曲线不仅可以帮助学生用于研究拓扑和流形等方面的问题,还可以作为其他复杂曲线的特例,帮助学生更好地理解和研究这些曲线。

2.5. 正态分布及卡方分布曲线

若随机变量 X 服从一个数学期望为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布,记为 $N(\mu, \sigma^2)$ 。其概率密度函数为正态分布的期望值 μ 决定了其位置,其标准差 σ 决定了分布的幅度。当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时的正态分布是标准正态分布。

使用 GeoGebra 软件绘制正态分布及卡方分布的图像。创建和编辑数学对象,如点、线等,并设置动画展示数学图像的变化过程。打开 GeoGebra 软件,创建新的工作区;在工作区中创建和编辑正态分布曲线、卡方分布曲线,设置方程参数,增加不同参数的曲线,引导学生观察在不同参数下的曲线的区别;

导出图像为图片。

正态分布(Normal distribution)的图像如下图 10 所示,观察图像,理解正态分布中的期望值和标准差(即 μ 、 σ)改变时分布的图像。

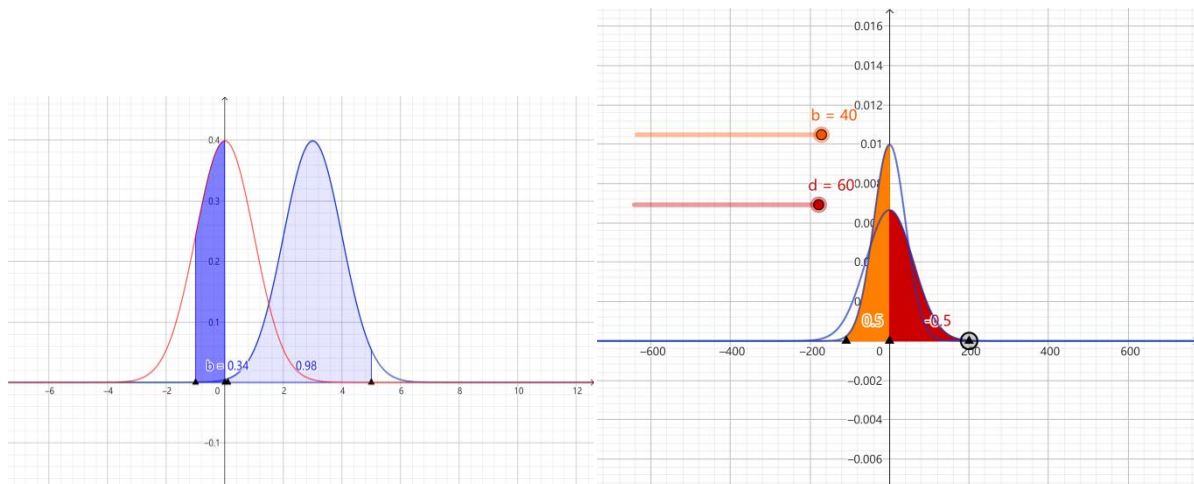


Figure 10. Normal distribution curve

图 10. 正态分布曲线

对于大学中概率论与数理统计的初学者而言图像的表述比文字更为直观易理解,利用 GeoGebra 作出能够改变具体参数的标准正态分布和一般正态分布的图像,利用滑动条对 μ 、 σ 进行赋值,可以动态的展示 μ 、 σ 改变对其分布的影响,进一步加深学生对正态分布的认识,提高学生的理解程度。

卡方分布是一种常见的概率分布,描述的是 n 个相互独立的随机变量,当这些随机变量都服从标准正态分布时,它们的平方和所构成的新随机变量的分布规律。

卡方分布图像如图 11,分布在第一象限,且呈正偏态。随着自由度(参数 n)的增加,卡方分布逐渐趋向于对称。当自由度很大时,它接近正态分布;当自由度趋向于正无穷大时,分布即为正态分布。

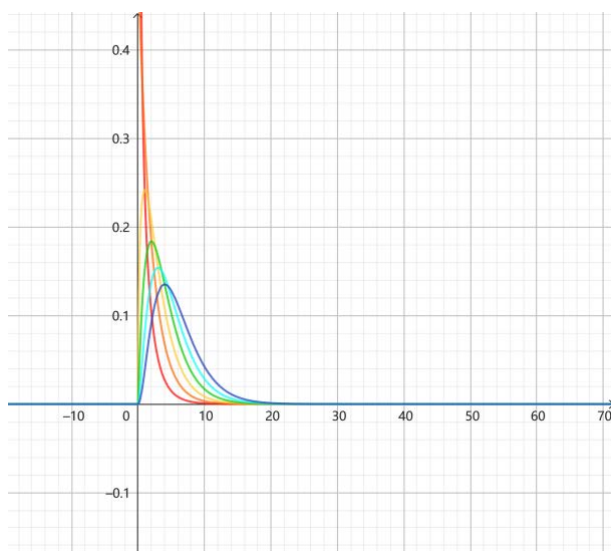


Figure 11. Chi-square distribution curve

图 11. 卡方分布曲线

利用卡方分布在不同自由度下的图像帮助学生检验观察到的数据与理论预期数据之间的差异，让学生在使用卡方分布评估预测性能，测量关联性，判断独立性，以及计算变量的置信区间等情况时易于分析问题。

3. 立体资源库

3.1. 旋转曲面

3.1.1. 对顶圆锥面

对顶圆锥面方程：

$$(x-h_x)^2 + (y-h_y)^2 + (z-h_z)^2 = r^2 \left(1 + \frac{(z-h_z)^2}{d^2} \right)$$

在解析几何中，当用平面去截对称的对顶圆锥时，平面和圆锥侧面相交的曲线统称为圆锥曲线。这表明对顶圆锥面与平面相交时可以产生不同的几何形状，表现了其几何特性的丰富性。

对顶圆锥面的概念和应用在数学、物理、工程等领域都有所体现。如圆锥状灯罩的设计也利用了圆锥面的特性，使得光线在散射时更加柔和和均匀。见图 12。

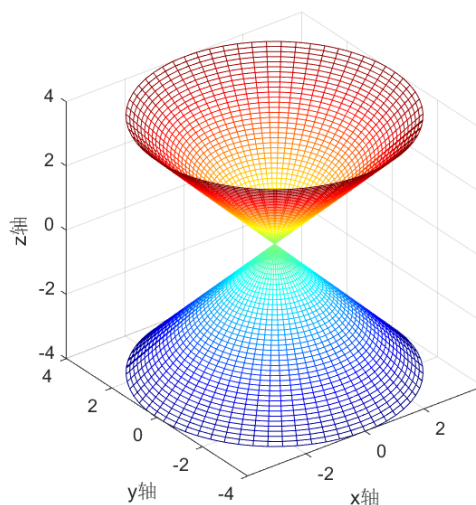


Figure 12. Opposite conical surface
图 12. 对顶圆锥面

对顶圆锥面的形成可以看成是两条相交的直线旋转得到的，资源库中对顶圆锥面图像可以帮助学生深入理解圆锥、截面、曲线等几何元素。在教学中，教师可以利用资源库中所给对顶圆锥面图像引导学生进行观察和思考，进而锻炼她们的空间想象以及立体感知能力。

作为一种立体交互式教学工具有助于提高学生的几何素养和问题解决能力，同时也可以培养学生的空间想象能力，通过合理的教学设计和引导，教师可以充分利用对顶圆锥的特性来丰富教学内容和提升教学质量。

3.1.2. 直纹面

直纹面是由一根直线在三维空间中运动所经过的轨迹所形成的曲面，这根运动的直线被称为该直纹面的直母线。如果曲面方程为 $r(u, v) = a(u) + v * l(u)$ ，其中 $l(u)$ 为单位向量，称此时的曲面为直纹面(见图 13)。此时的 v 曲线为直线，因此直纹面是由一条条直线所织成的。

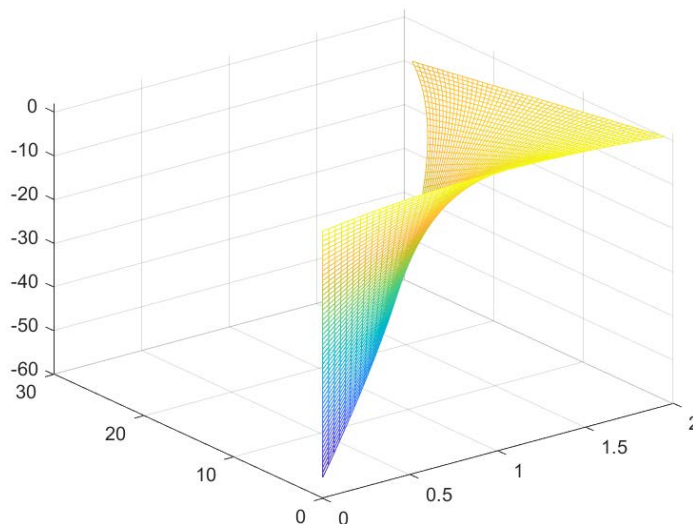


Figure 13. Ruled surface
图 13. 直纹面

直纹面的形成过程可以看成是由一根直线在三维空间中运动所经过的轨迹所形成的曲面，这条直线被称为是直纹面的直母线。当直线在空间中连续运动时，其经过的点集合就构成了直纹面。直纹面在建筑、机械等领域有着广泛的应用。例如，飞机机翼、汽轮机叶轮、流体机械中的叶片类零件通常就采用直纹面作为型面；在建筑领域，单叶双曲面和双曲抛物面常用于大型建筑结构的设计，如发电厂的冷却塔、电视塔，以及仓库、礼堂、站台的屋面等。

3.1.3. 球面

球面是指与球心距离相等的所有点的轨迹，通常用 S 表示。球面可以看作是平面绕着同一中心点旋转形成的曲面。在三维空间中，球面是一个二维曲面，它的特点是曲率处处相等。

球面的方程可以表示为：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \text{ 其中, } (a,b,c) \text{ 为球心的坐标, } r \text{ 是球的半径。}$$

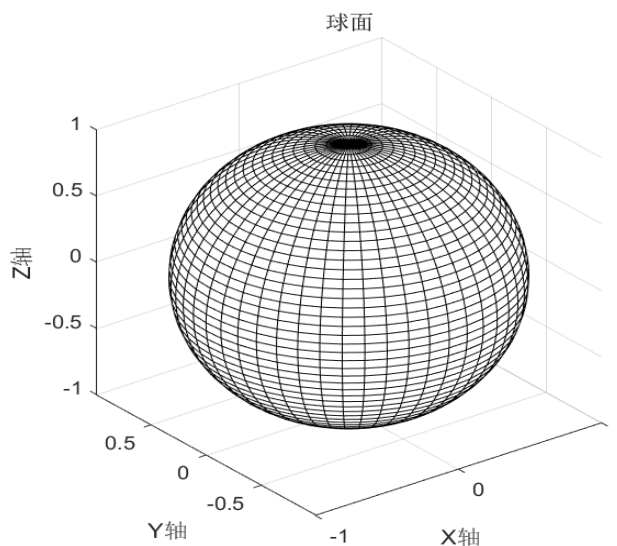


Figure 14. Sphere
图 14. 球面

该图 14 展示了球面的形成，它可以看作是平面上固定的一个圆绕其圆心旋转得到的，该平面的圆心就是球面的球心。

球面作为一种特殊的图像形式，具有直观展示三维空间信息的特性，在资源库中占据重要地位。它以静态的方式呈现出球面的完整形态，使观察者可以直观地理解球面的结构、特征和分布。这种直观性使得球面静图在资源库中成为一种重要的信息展示工具。此外，球面在资源库中还具有教学辅助的作用。对于研究数学、地理等学科的学生，该图可以帮助他们更好地理解 and 掌握地球、星球等球体的形态。

3.1.4. 圆柱面

动直线沿着一条定曲线进行平行移动所形成的曲面为柱面。当准线是圆时所得柱面称为圆柱面。其中，动直线称为柱面的直母线，定曲线称为柱面的准线[2]。

圆柱面的方程： $x^2 + y^2 = r^2, z = 1$

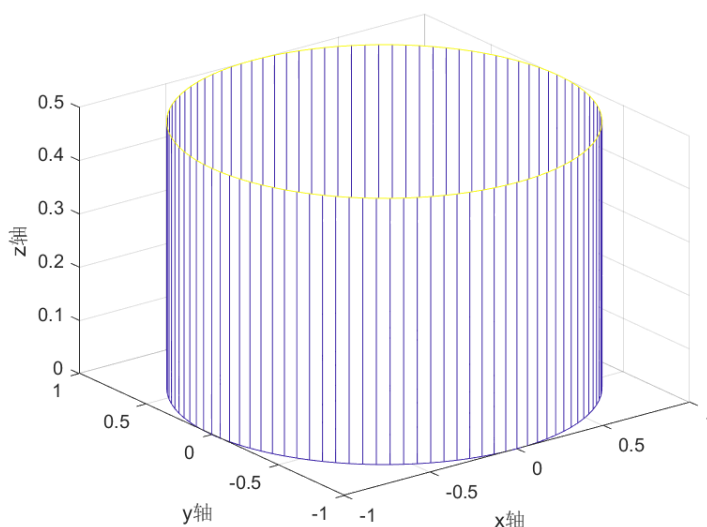


Figure 15. Cylindrical surface

图 15. 圆柱面

圆柱面(见图 15)的形成可以看作是一个圆在竖直方向上上下运动所形成的，其构成相对而言较为简单。通过绘图让学生直观的感受圆柱面的形成。教师可以引导学生通过观察资源库中圆柱面模型进而探索更多与圆柱面相关的数学问题和应用场景，对圆柱面有更深更直观的理解，从而培养创新精神和实践能力。它不仅有助于提高学生的数学素养，还能培养学生的空间观念、几何直观能力、创新思维 and 实践能力。因此，资源库中立体交互式模型工具的引用对教育教学有重要作用。

3.2. 二次曲面

3.2.1. 动态面

利用程序制作出一个可以动态变换的曲面，分析曲面的波动情况。打开 MATLAB，创建新的脚本文件；编写程序，输入曲面方程；运行程序，绘制数学图像，并调整图像属性；在软件操作过程中，记录参数设置，确保实验的可复现性；对于动态图像，使用软件自带的导出功能，提取关键帧作为数字图像进行展示。观察数学图像的变化规律和特征得出此动态面的相关结论。

MATLAB 程序代码如下：

```

cle
clear all
x = -6:0.1:6;
y = -6:0.1:6;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
r = sqrt(X.^2 + Y.^2);
Z = sin(r)/(r + eps);
p = surf(X,Y,Z);
set(p,'LineStyle','None');
axis([-6,6,-6,6,-1,1])
M = moviein(20);
filename = '动画.gif';
for j = 0.1:0.1:10
    p = surf(X,Y,sin(j*pi)*Z);
    axis([-6,6,-6,6,-1,1])
    axis off;
    set(p,'LineStyle','None');
    M(:,end+1) = getframe;
    [A,map] = rgb2ind(frame2im(getframe),256);
    if j == 0.1
        imwrite(A,map,filename,'gif', 'Loopcount',inf,'DelayTime',0.1);
    else
        imwrite(A,map,filename,'gif','WriteMode','append','DelayTime',0.1);
    end
end
end
movie(M,2)

```

通过绘图得到如下的曲面如图 16，Movie 命令让特殊曲面 1 进行 2 次上下变换，形成动画。该动画演示了曲面的上下活动，同时展示了振幅变化，生动形象的展示给学生动态图像变换。

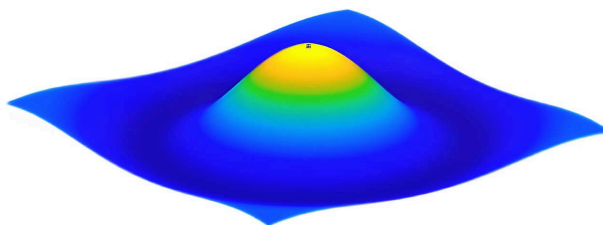


Figure 16. Dynamic surface
图 16. 动态面

上下振动的动态面作为一种动态图像或动画，能够直观地展示一个面在垂直方向上的振动情况。图像的直观展示使学生在观察时能够迅速捕捉到动态面的振动特征、振幅和频率等信息，从而更加深入地理解其运动规律。学生通过观察和分析这种动态面，他们可以更加直观地理解振动的基本概念、原理和应用。同时，在资源库中，这种动态面可以为研究或教学展示提供有力的视觉支持，帮助学生将理论知识与实际现象相结合，提高学习效果。

3.2.2. 马鞍面

马鞍面，也被称为双曲抛物面，是一个三维空间中的曲面，其形状类似于马鞍。马鞍面是一个典型的直纹面，它可以通过一系列直线(直母线)来构造。

马鞍面的标准表达式为： $z = a^2x^2 - b^2y^2$

其中， a 和 b 为常数，它们决定了马鞍面在 x 和 y 方向上的曲率。当 a 和 b 取不同的值时，马鞍面的形状会有所不同[3]。

代码

```
[X,Y]=meshgrid(-7:0.1:7);
Z=X.^2./8-Y.^2./6;
meshc(X,Y,Z);
view(85,20)
axis('square')
xlabel('x 轴');ylabel('y 轴');zlabel('z 轴');
shading flat;
title('双曲抛物面')
```

画图结果下图 17 的左图所示。

Python 是一种高级编程语言，因其简洁明了的语法、强大的功能库以及跨平台的特性而广受欢迎。Python 的使用方法灵活多样，既可用于编写小脚本进行自动化任务，也可用于构建大型应用程序。其功能特点包括易读易写的代码风格，这使得 Python 成为初学者和经验丰富的开发者都偏爱的语言。此外，Python 支持面向对象编程，具备强大的数据结构和错误处理能力。Python 的另一个显著特点是其丰富的第三方库，这些库为开发者提供了从数据分析到机器学习，从网络编程到自动化测试的各种功能，极大地拓展了 Python 的应用范围。总的来说，Python 是一种功能强大、易于上手且高度灵活的编程语言。

利用 Python 软件绘制马鞍面的动态图像，安装 Python 环境，并导入 matplotlib 库；编写 Python 程序，使用 matplotlib 绘制马鞍面图像；调试编写的程序，确保图像绘制正确；保存图像，以便后续进行观察分析。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.animation import FuncAnimation
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax=fig.add_subplot(projection='3d')
ax.set_axis_off()
x=np.arange(-10,10,0.25)
y=np.arange(-10,10,0.25)
a,b=1,1
X,Y=np.meshgrid(x,y)
Z=(X**2/a**2-Y**2/b**2)/2
ax.plot_surface(X,Y,Z,cmap='cool',alpha=0.3)
y2=y
def update(h):
    x2=0*np.ones_like(y2)
```



```

z2=-y2**2/b**2/2
ax.plot(x1,y1,z1,color='red',lw=1.5)
x1=x
def update(h):
    y1=h*np.ones_like(x1)
    z1=x1**2/a**2/2-y1**2/b**2/2
    ax.plot(x1,y1,z1, color='blue', lw=1.5)
ani=FuncAnimation(fig, update, frames=np.linspace(-10,10,30), interval=300, repeat=False)
ani.save("an.gif")
plt.show()

```

画图结果如图 17 的右图所示。

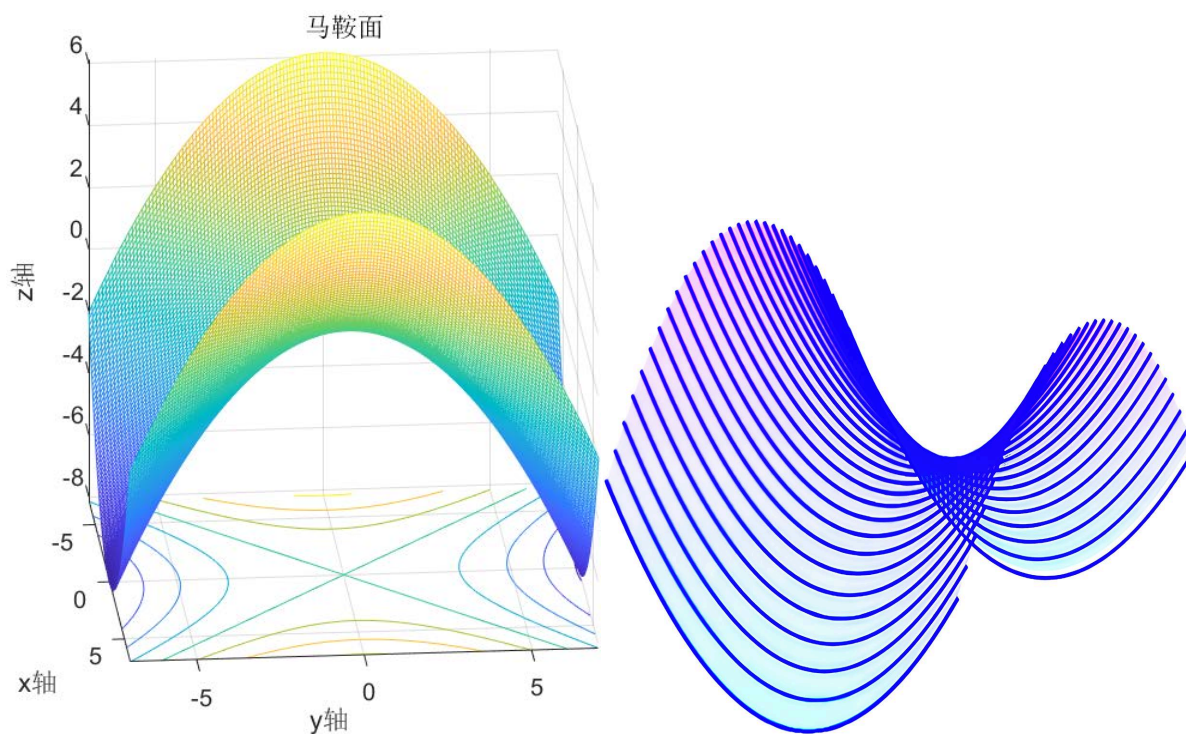


Figure 17. Saddle face

图 17. 马鞍面

图 10 是使用 Python 作出的动态图形，从此图的绘制中可以看出，它是一条抛物线开始顺着第二条抛物线上滑动。随着这条抛物线的滑动，它扫的面就形成了一个特殊的曲面，这个曲面就被形象的称为“马鞍面”。在物理学中，马鞍面函数可用来建立一些物理现象的模型，例如在电场和磁场的分析中，可以使用马鞍面函数来描述电势和磁势的分布。

马鞍面 - 作为资源库中一种复杂的几何形状，有助于培养学生的空间想象能力和几何直观能力。通过学习资源库中马鞍面图像模型，学生可以更深入地理解三维空间中几何体的构造和性质，提升对空间形状的认识和理解。此外，教师可以利用资源库中模型作为教学工具设计一些与马鞍面相关的创新性问题，可以让学生深入理解多元微积分中的概念和技巧，提高学生的兴趣和参与度，引导学生自主探索和

解决问题，从而培养学生的创新精神。

3.2.3. 抛物柱面

抛物柱面是指一个二次曲面，其平面截面是平行于某个坐标轴的一条二次曲线。我们可以将其形象地比喻为一个沿着该坐标轴方向无限延伸的抛物线。

抛物柱面的表达式可以表示为： $(x-h)^2 = 4 * p * (y-k)$ 其中 (h,k) 为抛物线的顶点， p 为抛物线的焦距。这个表达式可以简化为：

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k$$

抛物柱面的截面是一条抛物线，焦点为 (h,k) 。抛物柱面的形状取决于焦距 p 的大小，当 $p > 0$ 时，抛物柱面开口向上，当 $p < 0$ 时，抛物柱面开口向下。下图 18 为抛物柱面的静态展示和动态展示。

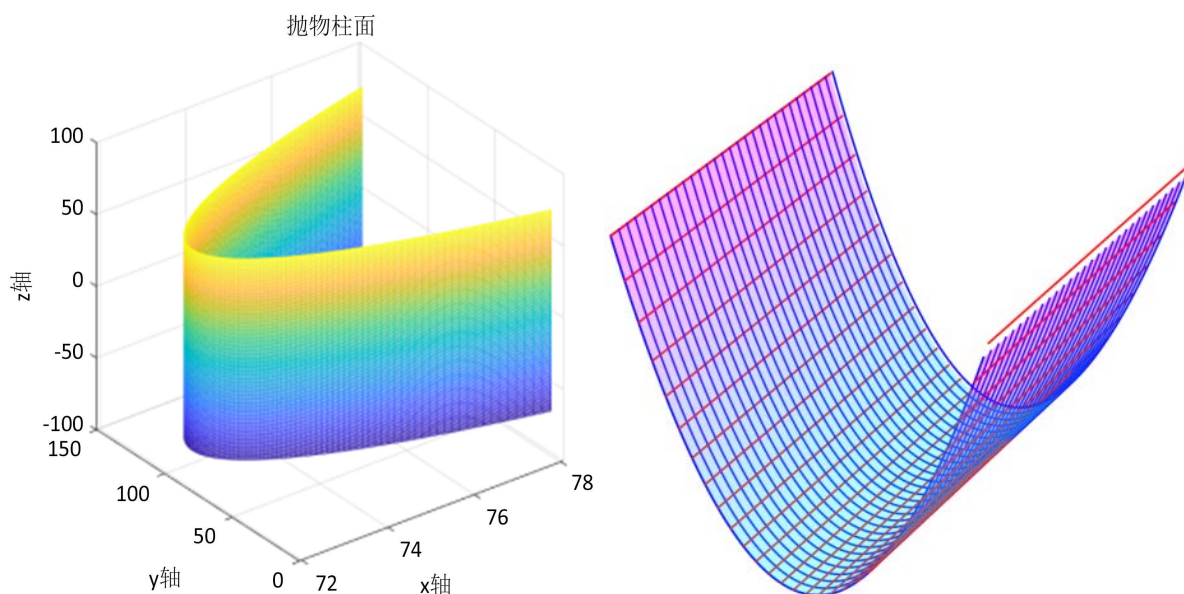


Figure 18. Parabolic cylinder
图 18. 抛物柱面

从图中可以看出抛物柱面是由一条抛物线和一条直线沿着抛物线上滑动而形成的曲面，且此对称轴与抛物线的对称轴重合，利用动态图形让学生对抛物柱面的形成较好理解。

在立体资源库中，抛物柱面作为重要的教学资源，通过展示抛物柱面的图像和模型，教师可以让学生更为直观地理解其形状和性质，从而更好地掌握相关的数学和物理知识。此外，抛物柱面还可以作为学生实验和研究的对象，用于探索其在实际应用中的表现和优化方法。

3.2.4. 椭球面

通过绘制椭球面的图像，加深学生对椭球面的理解。在空间直角坐标系下，椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0),$$

其中 $|x| \leq a$ ， $|y| \leq b$ ， $|z| \leq c$ ，其中 a, b, c 按其大小，分别称为椭圆的长半轴、中半轴和短半轴。

MATLAB 程序如下：

```

clear;close;
u=-4:0.1:4;
v=-4:0.1:4;%设置参数范围
[U,V]=meshgrid(u,v)
X=3.*cos(U).*sin(V);
Y=2.*cos(U).*cos(V);
Z=sin(U);%数学方程
surf(X,Y,Z);
axis equal

```

运行程序会得到静态椭球。

还通过运用 GeoGebra 创出一个椭球面(见图 19), 打开 GeoGebra 软件, 创建新的三维工作区; 在工作区中创建和编辑数学对象 - 椭球, 输入椭球面方程, 并设置一条参考线, 设置动画效果, 播放动画, 观察到参考线绕坐标轴一圈形成椭球面的变化过程; 导出动画为的关键帧作为数字图像数据。通过高校数学课本进行数据收集和整理, 将椭球参数设置为自定义大小, 教师可以改变参数得到不同的椭球面, 让学生观察椭球面大小随参数变化而变化的图形[4]。此图像还可以使在面 $z=0$ 上的曲线旋转, 让学生直观地感受椭球面旋转形成的过程。

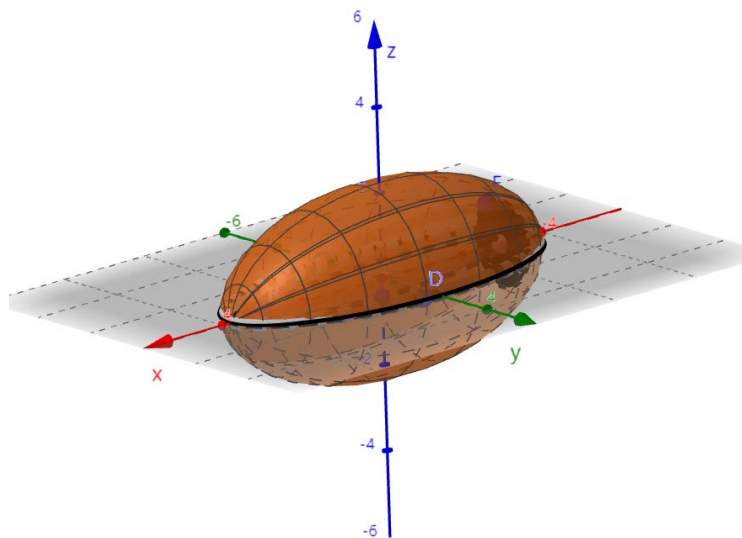


Figure 19. Ellipsoid surface
图 19. 椭球面

3.2.5. 椭圆抛物面

在直角坐标系下, 椭圆抛物面的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (a > 0, b > 0)$$

使用 GeoGebra 软件, 创建新的三维演示工作区; 在工作区中创建和编辑数学对象, 设置动画效果; 拨动滑动条, 观察数学图像的变化过程。在实验过程中, 使用软件自带的截图或导出功能保存数学图像。通过 GeoGebra 调整椭圆抛物面的参数观察图像, a 为 x 轴方向上的半轴长度, b 为 y 轴方向上的长度, 通过参数轴的滑动调整 a 、 b 的值让曲面放大或缩小, 通过改变参数出来的图像可以让学生进一步认识到

椭圆抛物面(见图 20)形状的改变是随参数改变的, 体会数学中“数形结合”思想[5]。

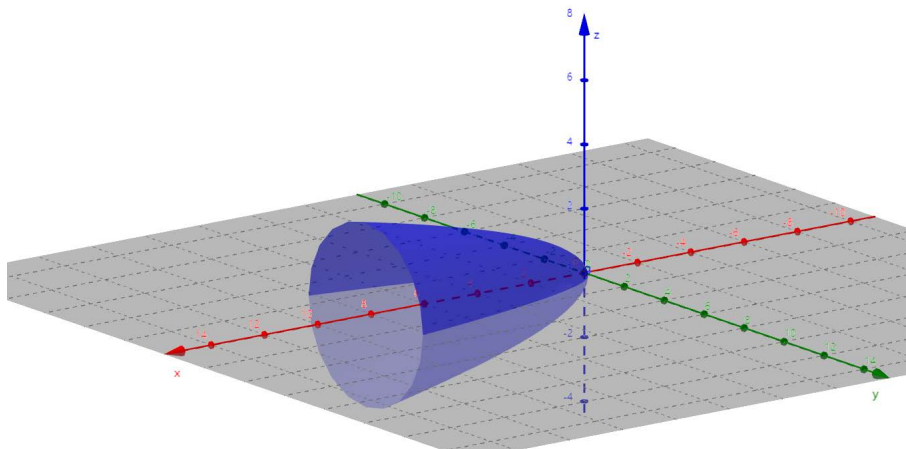


Figure 20. Elliptical paraboloid
图 20. 椭圆抛物面

3.2.6. 水滴面

除了以上常见的曲面, 还有一个特殊的曲面, 水在生活中不可缺少, 则水滴就会构成一个水滴形状的曲面。水滴形曲面方程比较特殊, 它是一种描述水滴形状的数学模型, 其方程式可以写为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中 a 、 b 分别代表椭圆的主轴长度。这个方程实际上是一个椭圆型曲线方程(或者为水滴形椭圆方程)。当 $a = b$ 时, 这个椭圆就变为了圆形。

绘制水滴面的 MATLAB 程序如下

```
clf;
cla;
[x, y] = meshgrid(-1:0.1:1, -1:0.1:1);
z = x.^2 + y.^2 - 0.5*x.*y.*abs(x.*y);
z = z - min(z(:));
figure;
surf(x, y, z);
shading interp;
colormap('blue');
camlight left;
lighting gouraud;
title('水滴面');
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
axis off;
view(3)
```

画图结果:

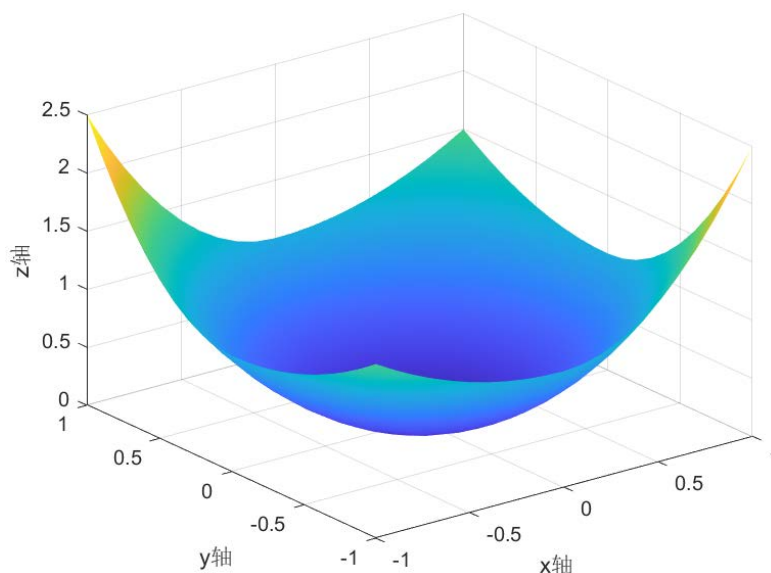


Figure 21. Water drop surface
图 21. 水滴面

教师引导学生通过观察和分析资源库中水滴面模型的形态,可以更直观地理解三维空间中几何体的构造和特性,利用资源库中水滴面(见图 21)模型可以帮助检验学生对数学知识的掌握程度,还可以锻炼他们的计算能力和问题解决能力;水滴面在教学中可以帮助学生深化对空间几何的理解、提升数学建模和计算能力、拓宽知识视野以及激发学习兴趣。所以在教学中应充分利用水滴面这一教学资源,发挥其独特的教育价值。

4. 结论

基于可视化背景下,将从曲面由易到难进行分类;通过绘图软件进行编码操作形成动态的可视可操作的动图;进行数据整合,构造一个立体交互式的动态学习资源库的研究基本完成,将抽象数学更加直观具体的集中展现出来,用新技术新技能动态化呈现球面、圆柱面、对顶圆锥面、马鞍面、直纹面等曲面,教师可以利用数学资源库中的现成素材,减少备课时间,提高教学效率。同时,资源库中的资源也可以帮助学生更快地理解和掌握数学知识,提高学习效率;师生可以通过网络平台共享资源库这一教学资源,交流学习心得共同解决数学问题,这种互动有助于增强学习效果。无论是传统的课堂教学还是现代的在线教学,数学资源库都能提供相应的教学资源。通过直观、动态的图像展示,复杂的数学概念和原理得以简化,帮助学生更好地理解和掌握数学知识。提高了学生的学习兴趣 and 参与度,还促进了学生空间想象能力和逻辑推理能力的发展。

综上所述,为了充分发挥数字图像在数学教学中的作用,需要不断丰富和优化教学资源,需要教师根据实际需要灵活选择教学模式,提高教学的灵活性和适应性。数字图像资源在数学教学中具有显著的应用效果和广阔的发展前景。我们要充分利用数字图像技术的优势,创新教学方法和手段,提高数学教学的质量和效率。同时,也要关注数字图像应用中存在的问题和挑战,不断寻求解决方案,让数字图像在教学中的应用不断取得新的突破。

致 谢

随着这篇论文的完成,我们意识到已经走过了一段漫长而富有挑战性的学术旅程。在此,我们谨向

所有在论文撰写中给予的指导、支持、鼓励和帮助的人表示最诚挚的感谢。

首先,我们要感谢导师王丽娟副教授、陈俊英教授以及管琳老师提供的帮助。从论文的选题、构思到撰写,她们都给予了我们悉心的指导和无私的帮助。她们严谨的治学态度、深厚的学术造诣和敏锐的洞察力深深地影响了我们,使我们受益终身。在此,我们向她们表示最崇高的敬意和最衷心的感谢。再次向所有给予我们帮助和支持的人表示衷心的感谢!

基金项目

河北农业大学大学生创新创业训练计划基金项目(No. 2024317);河北农业大学第十二批教研项目(No. 202329; No. 202342);河北农业大学数值分析专创融合优质课程支持;河北农业大学多元统计分析专创融合优质课程支持。

参考文献

- [1] 洪晓芬. 基于 Matlab 的动画演示与高等数学教学[J]. 计算机与现代化, 2011(4): 112-114+118.
- [2] 周明. 特殊旋转二次曲面的性质[J]. 上饶师范学院学报, 2014, 34(6): 11-14.
- [3] 张纪平, 沈晓斌, 洪佳瑜, 陈秋媛. Matlab 在绘制解析几何二次曲面图像的应用[J]. 科技风, 2021(31): 25-27.
- [4] 肖凡, 刘奇, 王翠, 等. 用 Matlab 辅助解析几何教学[J]. 科教导刊(上旬刊), 2013(17): 136-137.
- [5] 朱永慧, 刘冬云, 张毅. 基于 GeoGebra 曲线的图案设计及其应用[J]. 毛纺科技, 2024, 52(3): 81-87.