Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 195-201
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147286

Hans汉斯

强半-Gorenstein AC-投射模

安亚敏

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年5月30日；录用日期：2024年7月2日；发布日期：2024年7月30日

摘　要

本文引入了强半-Gorenstein AC-投射模和*R*-模的强半-Gorenstein AC-投射维数，并且研究了它们的一些性质。

关键词

强半-Gorenstein AC-投射模，强半-Gorenstein AC-投射维数

Strongly Semi-Gorenstein AC-Projective Modules

Yamin An

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 30th, 2024; accepted: Jul. 2nd, 2024; published: Jul. 30th, 2024

Abstract

The paper introduces strongly semi-Gorenstein AC-projective modules and the strongly semi-Gorenstein AC-projective dimensions of *R*-modules and investigates some properties of them.

Keywords

Strongly Semi-Gorenstein AC-Projective Module, Strongly Semi-Gorenstein AC-Projective Dimension

文章引用：安亚敏．强半-Gorenstein AC-投射模[J]．理论数学, 2024, 14(7): 195-201. DOI: 10.12677/pm.2024.147286

1. 引言

Gorenstein 同调代数起源于 20 世纪 60 年代，是由 Auslander 和 Bridger 等的相关研究成果发展而来的。为进一步研究有限生成模的性质，Auslander 等[1]在双边诺特环上引入了 G-维数的概念，这种维数是投射维数的细化。1995 年，Enochs 等[2]在任意结合环 R 上引入了 Gorenstein 投射模的概念，自此 Gorenstein 同调理论的研究引起了学者们的广泛关注。作为 Gorenstein 投射模的特殊情况，2009 年，Ding 等[3]引入了强 Gorenstein-平坦模的概念。2010 年，Gillespie 在文献[4]中将强 Gorenstein-平坦模和 Gorenstein FP-内射模分别命名为 Ding 投射模和 Ding 内射模。为了研究一般环上的稳定模范畴，2014 年，Bravo 等[5]利用超有限表示模引入了 level 模，进而又利用 level 模引入了 Gorenstein AC-投射模，并且讨论了 Gorenstein AC-投射模的一些性质及其模型结构。二十世纪末，Enochs 等在文献[6]中将 Gorenstein 投射(内射)模的概念推广到复形范畴。此后，越来越多的学者对 Gorenstein 投射(内射)复形的性质作了进一步的研究。

为了研究 Gorenstein 同调猜想(即所有的 Gorenstein 投射模都是 Gorenstein 平坦模)，Šaroch 等在文献[7]中引入了投射余可解的 Gorenstein 平坦模(简称 PGF-模)的概念。即称 R-模 M 是 PGF-模，如果存在投射 R-模的正合序列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to \cdots$，使得 $M \cong Ker\left(P_0 \to P_{-1}\right)$，且对任意内射右 R-模 I，$I \otimes_R$ -保持正合。Iacob 则在文献[8]中进一步研究了 PGF-模的性质。

2020 年，Ringel 等[9]引入了半-Gorenstein 投射模的概念，即称有限生成 R-模 M 是半-Gorenstein 投射模，如果对任意的 $i \ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i\left(M, R\right) = 0$，他们研究了半-Gorenstein 投射模的性质，并且给出了 Gorenstein 投射模和半-Gorenstein 投射模之间的关系。2021 年，白等[10]在一般环上引入了强半-Gorenstein 投射模的概念，即称 R-模 M 是强半-Gorenstein 投射模，如果对任意的 $i \ge 1$ 及任意的投射 R-模 P，有 $\mathrm{Ext}_R^i\left(M, P\right) = 0$，并且给出了投射余可解的 Gorenstein 平坦模与强半-Gorenstein 投射模之间的关系。

受以上工作的启发，本文引入并研究了强半-Gorenstein AC-投射模和 R-模的强半-Gorenstein AC-投射维数，并且研究了它们的一些性质。后续将在此基础上讨论强半-Gorenstein AC-投射模和 Gorenstein 同调模之间的关系，并且在特殊环上构造出一个完备并且遗传的余挠对，从而讨论其稳定性。本文所讨论的环均为有单位元的结合环，如果没有特别声明，模都表示左 R-模，我们用 Prj 表示所有投射 R-模构成的类，$\widetilde{Prj}$ 表示所有投射维数有限的 R-模构成的类，$pd_R\left(M\right)$ 表示 R-模 M 的投射维数，$Gpd_R\left(M\right)$ 表示 R-模 M 的 Gorenstein 投射维数。

2. 预备知识

下面给出本文所需要的一些基本概念。

定义 1.1 [5]称 R-模 M 是超有限表示模，如果 M 具有有限生成投射模的投射分解。

定义 1.2 [5]称 R-模 L 是 level 模，如果对任意的超有限表示右 R-模 M，有 $\mathrm{Tor}_1^R\left(M, L\right) = 0$。

定义 1.3 [11]设 M 是 R-模。M 的 level 维数定义为 $\text{lev-dim}_R\left(M\right) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid$ 存在左 R-模的正合列 $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$，其中 $L_i\left(0 \le i \le n\right)$ 是 level 左 R-模 $\}$。

我们用 $\widetilde{ld}$ 表示所有 level 维数有限的 R-模构成的类。

定义 1.4 [12]设 $\mathscr{X}$ 是 R-模类。称 $\mathscr{X}$ 是投射可解的，如果 $\mathscr{X}$ 包含投射 R-模类，且对任意正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$，其中 $X'' \in \mathscr{X}$，都有 $X' \in \mathscr{X}$ 当且仅当 $X \in \mathscr{X}$。

3. 强半-Gorenstein AC-投射模

在这一节中，我们引入并研究了强半-Gorenstein AC-投射模，并且讨论了强半-Gorenstein AC-投射模与投射维数有限的模之间的关系。

定义 2.1 称 R-模 M 是强半-Gorenstein AC-投射模，如果对任意的 $i\ge 1$ 及任意的 level 左 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$。

我们用 $SSG_{AC}P$ 表示所有强半-Gorenstein AC-投射 R-模构成的类。

注记 2.2 强半-Gorenstein AC-投射模是强半-Gorenstein-投射模。

命题 2.3 设 R 是任意环。则 R-模 M 是强半-Gorenstein AC-投射模当且仅当对任意的 level 维数有限的 R-模 N 及任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$。

证明 “$\Rightarrow$”设 $M\in SSG_{AC}P$。则对任意的 level 左 R-模 L 及任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$，任取 $N\in\widetilde{ld}$，下证对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$。不妨设 $\text{lev-dim}_R(N)=n$。则存在正合序列

$0\to L_n\to L_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}L_0\xrightarrow{f_0}N\to 0$，其中每个 L_i 是 level 左 R-模。设 $K_i=\mathrm{Ker}(f_{i-1})$。由长正合列引理知，存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L_0)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,K_1)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,L_0)$。因为 $M\in SSG_{AC}P$，所以对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L_0)=0$。因此，$\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,K_1)$。重复以上过程，对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+n}(M,L_n)=0$。

“$\Leftarrow$”显然成立。

命题 2.4 设 R 是任意环。则 $SSG_{AC}P\cap\widetilde{Prj}=Prj$。

证明 “$\subseteq$”设 $K\in SSG_{AC}P\cap\widetilde{Prj}$。则 $K\in SSG_{AC}P$ 且 $K\in\widetilde{Prj}$。下证 $K\in Prj$。考虑正合列 $0\to K'\to P\to K\to 0$，其中 $P\in Prj$。因为 $K\in\widetilde{Prj}$，所以 $K'\in\widetilde{Prj}$。因此，$K'\in\widetilde{ld}$。由命题 2.3 可知，$\mathrm{Ext}_R^1(K,K')=0$。则上述正合列可裂，即 $P\cong K\oplus K'$。又因为投射模关于直和项封闭，所以 $K\in Prj$。

“$\supseteq$”显然成立。

命题 2.5 设 R 是任意环。则 $SSG_{AC}P$ 是投射可解的，并且强半-Gorenstein AC-投射模关于直和与直和项封闭。

证明 显然 $Prj\subseteq SSG_{AC}P$。考虑 R-模的正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，其中 $C\in SSG_{AC}P$。设 $A\in SSG_{AC}P$，下证 $B\in SSG_{AC}P$。对任意的 level 左 R-模 L，由长正合列引理知，存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^i(C,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(B,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(A,L)$。因为 $C\in SSG_{AC}P$，$A\in SSG_{AC}P$，所以对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(C,L)=0=\mathrm{Ext}_R^i(A,L)$。因此，对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(B,L)=0$，故 $B\in SSG_{AC}P$。设 $B\in SSG_{AC}P$，下证 $A\in SSG_{AC}P$。对任意的 level 左 R-模 L，由长正合列引理知，存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^i(B,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(A,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(C,L)$。又因为 $C\in SSG_{AC}P$，$B\in SSG_{AC}P$，所以对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(C,L)=0=\mathrm{Ext}_R^i(B,L)$。因此，对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(A,L)=0$，故 $A\in SSG_{AC}P$。因此，$SSG_{AC}P$ 是投射可解的。

设 $\{M_i\mid i\in I\}$ 是一簇强半-Gorenstein AC-投射模。则对任意的 level 左 R-模 L 及任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i\left(\bigoplus_{i\in I}M_i,L\right)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^i(M_i,L)=0$，故 $\bigoplus_{i\in I}M_i\in SSG_{AC}P$，即强半-Gorenstein AC-投射模关于直和封闭。而由文献[13]中的命题 1.4 可知，强半 Gorenstein AC-投射模关于直和项封闭。

命题 2.6 设 $0\to G'\to G\to M\to 0$ 是 R-模的正合列，其中 G 和 G' 是强半-Gorenstein AC-投射模。若对任意的 level 左 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$，则 M 是强半-Gorenstein AC-投射模。

证明 设 L 是任意的 level 左 R-模。由长正合列引理知，存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^{i-1}(G',L)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(G,L)$，其中 $i\ge 2$。因为 $G'\in SSG_{AC}P$，$G\in SSG_{AC}P$，所以对任意的 $i\ge 2$，有 $\mathrm{Ext}_R^{i-1}(G',L)=0=\mathrm{Ext}_R^i(G,L)$。因此，对任意的 $i\ge 2$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$。再由已知条件可知，对任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$。故 M 是强半-Gorenstein AC-投射模。

引理 2.7 设 $0 \to K_n \to G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $G_i\,(0 \le i \le n-1)$ 是强半-Gorenstein AC-投射模。则对任意的 level 维数有限的 R-模 L 及任意的 $i \ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, L)$。

证明 由维数转移可得。

命题 2.8 设 $0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$ 和 $0 \to K'_n \to G'_{n-1} \to \cdots \to G'_0 \to M \to 0$ 是 R-模的正合列，其中每个 G_i 和 G'_i 是强半-Gorenstein AC-投射模。则 K_n 是强半-Gorenstein AC-投射模当且仅当 K'_n 是强半-Gorenstein AC-投射模。

证明 由引理 2.7 可知，对任意的 Level 维数有限的 R-模 L 及任意的 $i \ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, L)$ 和 $\mathrm{Ext}_R^i(K'_n, L) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, L)$。因此，对任意的 Level 维数有限的 R-模 L 及任意的 $i \ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(K'_n, L) \cong \mathrm{Ext}_R^i(K_n, L)$。故由命题 2.3 可知，$K_n$ 是强半-Gorenstein AC-投射模当且仅当 K'_n 是强半-Gorenstein AC-投射模。

4. R-模的强半-Gorenstein AC-投射维数

在这一节中，我们引入并研究了 R-模的强半-Gorenstein AC-投射维数。

定义 3.1 设 M 是 R-模。M 的强半-Gorenstein AC-投射维数定义为：

$SSG_{AC}P - pd_R(M) = \sup\{i \ge 0 \mid$ 存在 level 维数有限的 R-模 L，使得 $\mathrm{Ext}_R^i(M, L) \ne 0\}$。

显然，$SSG_{AC}P - pd_R(M) = 0$ 当且仅当 M 是强半-Gorenstein AC-投射模。

命题 3.2 设 $0 \to K \to G \to M \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 G 是强半-Gorenstein AC-投射模。若 M 是强半-Gorenstein AC-投射模，则 K 是强半-Gorenstein AC-投射模；否则 $SSG_{AC}P - pd_R(K) = SSG_{AC}P - pd_R(M) - 1$。

证明 若 $M \in SSG_{AC}P$，由命题 2.5 知 $K \in SSG_{AC}P$。若 $M \notin SSG_{AC}P$，则 $SSG_{AC}P - pd_R(M) > 0$。当 $SSG_{AC}P - pd_R(M) = \infty$ 时，由引理 2.7 可知，结论成立。设 $SSG_{AC}P - pd_R(M) = n < \infty$。则存在 level 维数有限的 R-模 L，使得 $0 \ne \mathrm{Ext}_R^n(M, L) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(K, L)$，因此 $SSG_{AC}P - pd_R(K) \ge n-1$。若 $SSG_{AC}P - pd_R(K) > n-1$，则由引理 2.7 可知，$SSG_{AC}P - pd_R(M) > n$，这与 $SSG_{AC}P - pd_R(M) = n$ 矛盾！故 $SSG_{AC}P - pd_R(K) = n-1 = SSG_{AC}P - pd_R(M) - 1$。

定理 3.3 设 M 是 R-模，$n \ge 0$ 是整数。则以下等价：

1) $SSG_{AC}P - pd_R(M) \le n$；

2) 存在 R-模的正合列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$，其中每个 G_i 是强半-Gorenstein AC-投射模；

3) 对任意的 $i > n$ 及任意的 level 维数有限的 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, L) = 0$；

4) 对任意的 $i > n$ 及任意的 level 左 R-模 Q，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) = 0$；

5) 对任意 R-模的正合列 $0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$，其中每个 G_i 是强半-Gorenstein AC-投射模，有 $K_n \in SSG_{AC}P$。

证明 3) $\Rightarrow$ 4)、5) $\Rightarrow$ 2)显然成立。

1) $\Rightarrow$ 2) 设 $SSG_{AC}P - pd_R(M) \le n$。则对 n 进行数学归纳。当 $n = 0$ 时，$M \in SSG_{AC}P$，结论显然成立。设 $n > 0$ 时，结论对 $n-1$ 成立。考虑 R-模的正合列 $0 \to K \to G_0 \to M \to 0$，其中 $G_0 \in SSG_{AC}P$。由命题 3.2 可知，$SSG_{AC}P - pd_R(K) = SSG_{AC}P - pd_R(M) - 1 \le n-1$。再由归纳假设知，存在 R-模的正合列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to K \to 0$，其中每个 $G_i \in SSG_{AC}P$。因此，存在 R-模的正合列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$，其中每个 $G_i \in SSG_{AC}P$。

2) $\Rightarrow$ 3) 设 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $G_i \in SSG_{AC}P\ \ (0 \le i \le n)$。由引理 2.7 可知，对任意的 $i > n$ 及任意的 level 维数有限的 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, L) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-n}(G_n, L) = 0$。

4) $\Rightarrow$ 5) 考虑 R-模的正合列 $0\to K_n\to G_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}G_0\xrightarrow{f_0}M\to 0$，其中每个 $G_i\in SSG_{AC}P$。由引理 2.7 和条件 4)可知，对任意 level 左 R-模 Q 及任意的 $i\ge 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i\left(K_n,Q\right)\cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}\left(M,Q\right)\cong 0$。故 $K_n\in SSG_{AC}P$。

2) $\Rightarrow$ 1) 设 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\xrightarrow{f_1}G_0\xrightarrow{f_0}M\to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $G_i\in SSG_{AC}P$ $(0\le i\le n)$。对 n 进行数学归纳。当 $n=0$ 时，$M\in SSG_{AC}P$，结论显然成立。设 $n>0$ 时，结论对 $n-1$ 成立。令 $K=\mathrm{Ker}\left(f_0\right)$，则有 R-模的正合列 $0\to K\to G_0\to M\to 0$ 和 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to K\to 0$，由归纳假设得 $SSG_{AC}P-pd_R\left(K\right)\le n-1$。若 $M\in SSG_{AC}P$，则结论显然成立。若 $M\notin SSG_{AC}P$，则由命题 3.2 可知，$SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)=SSG_{AC}P-pd_R\left(K\right)+1\le n-1+1=n$。

命题 3.4 设 $\left\{M_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\right\}$ 是一簇 R-模。则 $SSG_{AC}P-pd_R\left(\oplus M_\lambda\right)=\sup\left\{SSG_{AC}P-pd_R\left(M_\lambda\right)\mid\lambda\in\Lambda\right\}$。

证明 “$\le$”设 $\sup\left\{SSG_{AC}P-pd_R\left(M_\lambda\right)\mid\lambda\in\Lambda\right\}=n<\infty$。则对任意的 $\lambda\in\Lambda$，都有 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M_\lambda\right)\le n$。由定理 3.3-2)可知，存在正合列 $0\to G_{\lambda_n}\to\cdots\to G_{\lambda_0}\to M_\lambda\to 0$，其中 $G_{\lambda_i}\in SSG_{AC}P$ $(0\le i\le n)$，即存在正合列 $0\to\oplus G_{\lambda_n}\to\cdots\to\oplus G_{\lambda_0}\to\oplus M_\lambda\to 0$。由命题 2.5 可知，$\oplus G_{\lambda_i}\in SSG_{AC}P$ $(0\le i\le n)$。因此，由定理 3.3-1)可知，$SSG_{AC}P-pd_R\left(\oplus M_\lambda\right)\le n$。

“$\ge$”下证对任意的 $\lambda\in\Lambda$，$SSG_{AC}P-pd_R\left(M_\lambda\right)\le SSG_{AC}P-pd_R\left(\oplus M_\lambda\right)$。设 $SSG_{AC}P-pd_R\left(\oplus M_\lambda\right)=m<\infty$。则由定理 3.3-3)可知，对任意的 $i>m$ 及任意的 level 维数有限的 R-模 L，有 $\Pi\mathrm{Ext}_R^i\left(M_\lambda,L\right)\cong\mathrm{Ext}_R^i\left(\oplus M_\lambda,L\right)=0$，因此 $\mathrm{Ext}_R^i\left(M_\lambda,L\right)=0$。故由定理 3.3-1)可知，$SSG_{AC}P-pd_R\left(M_\lambda\right)\le m$。

命题 3.5 设 R 是左诺特环，M 是有限生成 R-模，且 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)\le m$。则 M 有长度为 m 的由有限生成强半-Gorenstein AC-投射模构成的强半-Gorenstein AC-投射分解。

证明 因为 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)\le m$，所以由定理 3.3-2)可知，存在 R-模的正合列 $0\to G_m\to G_{m-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中 $G_i\in SSG_{AC}P$ $(0\le i\le m)$。因为 R 是左诺特环，所以 M 是有限表示的。因此，存在正合列 $0\to K_1\to F_0\to M\to 0$，其中 F_0 是有限生成自由模，K_1 是有限生成模。同理，对有限生成模 K_1，存在正合列 $0\to K_2\to F_1\to K_1\to 0$，其中 F_1 是有限生成自由模，K_2 是有限生成模。按此方法进行下去，则有正合列 $0\to K_m\to F_{m-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$，其中 F_i 是有限生成自由模$(0\le i\le m-1)$，K_m 是有限生成模。因为有限生成自由模是投射模，投射模是强半 Gorenstein AC-投射模，所以 F_i 是有限生成的强半-Gorenstein AC-投射模。由命题 2.8 可知，$K_m\in SSG_{AC}P$，因此 K_m 是有限生成的强半-Gorenstein AC-投射模。故 M 有长度为 m 的由有限生成强半-Gorenstein AC-投射模构成的强半-Gorenstein AC-投射分解。

命题 3.6 设 M 是 R-模。若 $pd_R\left(M\right)<\infty$，则 $Gpd_R\left(M\right)=pd_R\left(M\right)=SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)$。

证明 由文献[13]中的命题 2.27 可知，若 $pd_R\left(M\right)<\infty$，则 $Gpd_R\left(M\right)=pd_R\left(M\right)$。因此，只需证 $pd_R\left(M\right)=SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)$。因为 $Prj\subseteq SSG_{AC}P$，所以 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)\le pd_R\left(M\right)$。设 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)=n<\infty$。取 M 的投射分解 $\cdots\to P_n\to P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}P_{n-2}\to\cdots\to P_0\to M\to 0$，令 $K=\mathrm{Ker}\left(f_{n-1}\right)$。则有正合列 $0\to K\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to M\to 0$。因为 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)=n$ 且 $Prj\subseteq SSG_{AC}P$，所以由定理 3.3-5)可知，$K\in SSG_{AC}P$。又因为 $pd_R\left(M\right)<\infty$，所以 $pd_R\left(K\right)<\infty$，即 $K\in\widetilde{Prj}$。因此，$K\in SSG_{AC}P\cap\widetilde{Prj}$。又由命题 2.4 可知，$K\in Prj$。因此，$pd_R\left(M\right)\le n$。故 $pd_R\left(M\right)\le SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)$。

命题 3.7 设 R 是环，$0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R-模的正合列，则以下成立：

1) 令 $n\ge 0$ 且 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M''\right)\le n$，则 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)\le n$ 当且仅当 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M'\right)\le n$，并且有不等式 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M'\right)\le\max\left\{SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right),SSG_{AC}P-pd_R\left(M''\right)\right\}$ 和 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)\le\max\left\{SSG_{AC}P-pd_R\left(M'\right),SSG_{AC}P-pd_R\left(M''\right)\right\}$。

2) 当 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M'\right)>SSG_{AC}P-pd_R\left(M''\right)$ 或 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)>SSG_{AC}P-pd_R\left(M''\right)$ 时，则有 $SSG_{AC}P-pd_R\left(M\right)=SSG_{AC}P-pd_R\left(M'\right)$。

3) $SSG_{AC}P-pd_R(M'')\le\max\{SSG_{AC}P-pd_R(M'),SSG_{AC}P-pd_R(M)\}+1$。

证明 1) 当 $n=0$ 时，有 $M''\in SSG_{AC}P$，则由命题 2.5 知，M 是强半-Gorenstein AC-投射模当且仅当 M' 是强半-Gorenstein AC-投射模。当 $n>0$ 时，考虑 M' 和 M'' 的部分投射分解 $0\to K'\to P'_{n-1}\xrightarrow{f'_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f'_1}P'_0\xrightarrow{f'_0}M'\to 0$ 和 $0\to K''\to P''_{n-1}\xrightarrow{f''_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f''_1}P''_0\xrightarrow{f''_0}M''\to 0$，由马掌引理可得以下行列正合的交换图：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P'_{n-1} & \to & P'_{n-1}\oplus P''_{n-1} & \to & P''_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow f'_{n-1} & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f''_{n-1} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow f'_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f''_1 & & \\
0 & \to & P'_0 & \to & P'_0\oplus P''_0 & \to & P''_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow f'_0 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f''_0 & & \\
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

其中，$K'=\mathrm{Ker}(f'_{n-1})$，$K''=\mathrm{Ker}(f''_{n-1})$，$K=\mathrm{Ker}(f_{n-1})$。因为 $SSG_{AC}P-pd_R(M'')\le n$，所以由定理 3.3-5)可知 $K''\in SSG_{AC}P$。则由命题 2.5 可知，$K\in SSG_{AC}P$ 当且仅当 $K'\in SSG_{AC}P$。故 $SSG_{AC}P-pd_R(M)\le n$ 当且仅当 $SSG_{AC}P-pd_R(M')\le n$。

设 $\max\{SSG_{AC}P-pd_R(M),SSG_{AC}P-pd_R(M'')\}=m<\infty$。则 $SSG_{AC}P-pd_R(M)\le m$，$SSG_{AC}P-pd_R(M'')\le m$。设 L 是 level 维数有限的 R-模。由长正合列引理知，则存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(M',L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M'',L)$，其中 $i>m$。由定理 3.3-3)可知，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0=\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M'',L)$。因此，对任意的 $i>m$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M',L)=0$。故由定理 3.3-1)可知，$SSG_{AC}P-pd_R(M')\le m$。

同理可证 $SSG_{AC}P-pd_R(M)\le\max\{SSG_{AC}P-pd_R(M'),SSG_{AC}P-pd_R(M'')\}$。

2) 若 $SSG_{AC}P-pd_R(M')>SSG_{AC}P-pd_R(M'')$。则由 1)可知，$SSG_{AC}P-pd_R(M)\le SSG_{AC}P-pd_R(M')$。若 $SSG_{AC}P-pd_R(M)<SSG_{AC}P-pd_R(M')$，则 $SSG_{AC}P-pd_R(M')>\max\{SSG_{AC}P-pd_R(M),SSG_{AC}P-pd_R(M'')\}$，这与 1)中的事实相矛盾！故 $SSG_{AC}P-pd_R(M)=SSG_{AC}P-pd_R(M')$。

同理可证 $SSG_{AC}P-pd_R(M)>SSG_{AC}P-pd_R(M'')$ 时，$SSG_{AC}P-pd_R(M)=SSG_{AC}P-pd_R(M')$。

3) 设 $\max\{SSG_{AC}P-pd_R(M'),SSG_{AC}P-pd_R(M)\}=m<\infty$。则 $SSG_{AC}P-pd_R(M')\le m$，$SSG_{AC}P-pd_R(M)\le m$。设 L 是 level 维数有限的 R-模。由长正合列引理知，存在正合列 $\mathrm{Ext}_R^i(M',L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M'',L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,L)$，其中 $i>m$。则由定理 3.3-3)可知，$\mathrm{Ext}_R^i(M'',L)=0=\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,L)$，因此对任意的 $i>m$，有 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M'',L)=0$。故由定理 3.3-1)可知 $SSG_{AC}P-pd_R(M'')\le m+1$。

4. 结论

本文主要引入了强半-Gorenstein AC-投射模和 R-模的强半-Gorenstein AC-投射维数，并且研究了它们的性质以及讨论了强半-Gorenstein AC-投射模和投射维数有限的模之间的关系。后续将在本文性质的基础

上，讨论强半-Gorenstein AC-投射模和 Gorenstein 同调模之间的关系，并且在特殊环上构造出一个完备且遗传的余挠对，从而讨论其稳定性。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Modules Theory. American Mathematical Society.

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/bf02572634

[3] Ding, N., Li, Y. and Mao, L. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/s1446788708000761

[4] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology*, *Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/hha.2010.v12.n1.a6

[5] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. arXiv: 1405.5768. https://doi.org/10.48550/arXiv.1405.5768

[6] Enochs, E.E. and Garcí Rozas, J.R. (1998) Gorenstein Injective and Projective Complexes. *Communications in Algebra*, **26**, 1657-1674. https://doi.org/10.1080/00927879808826229

[7] Šaroch, J. and Št'ovíček, J. (2020) Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules. *Selecta Mathematica*, **26**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s00029-020-0543-2

[8] Iacob, A. (2020) Projectively Coresolved Gorenstein Flat and Ding Projective Modules. *Communications in Algebra*, **48**, 2883-2893. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1723612

[9] Ringel, C.M. and Zhang, P. (2020) Gorenstein-Projective and Semi-Gorenstein-Projective Modules. *Algebra & Number Theory*, **14**, 1-36. https://doi.org/10.2140/ant.2020.14.1

[10] 白九红, 梁力. PGF-模和强半-Gorenstein-投射模[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(8): 105-110.

[11] Wu, D. and Zhou, H. (2022) Gorenstein AC-Projective and AC-Injective Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Algebra Colloquium*, **29**, 475-490. https://doi.org/10.1142/s1005386722000360

[12] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter.

[13] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007