Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 74-82
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143086

模糊Riesz空间上模糊序有界线性算子的研究

陈　强，周姮媛，刘艳丽

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年1月30日；录用日期：2024年3月20日；发布日期：2024年3月27日

摘　要

本文首先研究了模糊Riesz空间上模糊线性算子的一些性质，其次讨论了具有模糊主投影性质的模糊Riesz空间上任意两个模糊序有界线性算子的上确界和下确界的存在性，最后给出了模糊线性泛函是模糊序有界的刻画。

关键词

模糊Riesz空间，模糊线性算子，模糊序有界线性泛函

A Study of Fuzzy Ordered Bounded Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces

Qiang Chen, Hengyuan Zhou, Yanli Liu

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 30th, 2024; accepted: Mar. 20th, 2024; published: Mar. 27th, 2024

Abstract

In this paper, we first study some properties of fuzzy linear operators on fuzzy Riesz spaces. Secondly, we discuss the existence of supremum and infimum of any two fuzzy ordered bounded linear operators on fuzzy Riesz spaces with fuzzy principal projection properties. Finally, we give a characterization that fuzzy linear functionals are fuzzy ordered bounded.

Keywords

Fuzzy Riesz Space, Fuzzy Linear Operator, Fuzzy Ordered Bounded Linear Functional

文章引用: 陈强, 周姮媛, 刘艳丽. 模糊 Riesz 空间上模糊序有界线性算子的研究[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 74-82.
DOI: 10.12677/pm.2024.143086

1. 引言

自 1965 年，Zadeh [1] [2]提出模糊集和模糊序的概念后，1992 年 Venugopalan [3]对模糊序进行了系统的研究，引入了模糊偏序集的概念。此后，许多学者对模糊序和模糊关系进行了研究。

在 Venugopalan 的基础上，Beg 等人对模糊序线性空间[4]，模糊 Riesz 空间[5]和σ-完备模糊 Riesz 空间[7]进行了研究。在[4]中引入了模糊序收敛的定义。他们还研究了模糊 Riesz 分解性质[5]。在[6]中，引入了模糊 Archimedean 空间，并给出了模糊 Archimedean 空间的等价刻画。后来，Beg [7]讨论了σ-完备模糊 Riesz 空间与模糊 Archimedean 空间之间的关系。1998 年，Beg [8]研究了模糊 Riesz 正线性算子的扩张，证明了模糊 Riesz 空间上的 Hahn-Banach 定理。2015 年，Hong [9]在文献[4] [5] [6] [7]的基础上，定义并研究了模糊 Riesz 子空间、模糊理想、模糊带、模糊带投影等概念。2018 年，Park [10]等人引入和研究了模糊赋范 Riesz 空间，讨论了序列的一致有界性和收敛性，并在模糊 Banach Riesz 空间中验证了格同态的 Hyers-Ulam 稳定性。2020 年，Iqbal 和 Bashir [11]给出了模糊 Riesz 同构的条件。2021 年，Guirao [12]等人研究了模糊 Riesz 空间上模糊正算子的相关性质，研究了所有模糊序有界线性泛函的相关性质，并给出了模糊序对偶空间的定义。2022 年，Cheng [13]讨论了模糊向量空间中非空凸子集上模糊次线性算子的延拓问题，并且研究了模糊 Riesz 空间上的模糊 Riesz 子空间上模糊正线性算子的延拓。

本文的结构如下：在第二节中，我们给出了本文将要用到的一些定义和初步结果。第三节是本文的主要结论，其中我们给出了具有模糊主投影性质的 Riesz 空间中线性算子的上确界和下确界的计算公式，给出了模糊线性泛函的模糊序有界性的刻画。

2. 预备知识

定义 2.1 [2]假设 H 是论域。H 中的模糊关系如果满足以下条件：

(i) 假设 $k\in H$，则 $\mu(k,k)=1$ (自反性)；

(ii) 假设 $k,l\in H$，若 $\mu(k,l)+\mu(l,k)>1$，则 $k=l$ (反对称性)；

(iii) 假设 $k,s\in H$，则 $\mu(k,s)\geq\vee_{l\in H}\left[\mu(k,l)\wedge\mu(l,s)\right]$ (传递性)。

则称其为模糊偏序关系，其中 $\mu:H\times H\to[0,1]$ 是 $H\times H$ 的模糊子集的隶属函数。若集合 H 存在模糊偏序关系 μ，则称 H 是模糊偏序集。

定义 2.2 [4]假设 H 是模糊偏序集，Q 是 H 的子集。则在 H 上 Q 的上界 $U(Q)$ 定义如下：

$$U(Q)(v)=\begin{cases}0, & \text{对 } u\in Q, \text{当} (\uparrow u)(v)\leq\frac{1}{2};\\ \left(\bigcap_{u\in Q}\uparrow u\right)(v), & \text{其他情况}.\end{cases}$$

同样地，则在 H 上 Q 的下界 $L(Q)$ 的定义如下：

$$L(Q)(v)=\begin{cases}0, & \text{对 } u\in Q, \text{当} (\downarrow u)(v)\leq\frac{1}{2};\\ \left(\bigcap_{u\in Q}\downarrow u\right)(v), & \text{其他情况}.\end{cases}$$

若$U(Q)(u)>0$，则记为$u\in U(Q)$，在此情况下，我们称Q是有上界的并且u是Q的上界。同样地，若$L(Q)(u)>0$，则记为$u\in L(Q)$，在此情况下，我们称Q是有下界的并且u是Q的下界。如果Q有上界且有下界，则称Q有界。

若元素$w\in H$满足：(i) $w\in U(Q)$，(ii)若$v\in U(Q)$，则$v\in U(w)$，则称w是Q的上确界，记作$\sup Q$。同样地，若元素$w\in H$满足：(i) $w\in L(Q)$，(ii)若$v\in L(Q)$，则$v\in L(w)$，则称w是Q的下确界,记作$\inf Q$。

定理 2.3 [4]设H是模糊偏序集。则对任意$u,v\in H$，下列等式成立：

(i) (幂等性) $u\wedge u=u$，$u\vee u=u$；

(ii) (交换性) $u\wedge v=v\wedge u$，$u\vee v=v\vee u$；

(iii) (吸收性) $u\wedge(u\vee v)=u\vee(u\wedge v)=u$；

(iv) (一致性) $\mu(u,v)>\frac{1}{2}$当且就当$u\wedge v=u$当且仅当$u\vee v=v$。

定义 2.4 [4]设H是模糊偏序集。若H的所有有限子集都有上确界和下确界，则称H是模糊格。若H的任意子集都有上确界和下确界，则H称为完备的模糊格。

定义 2.5 [9]设H是模糊偏序集，H中序列$\{u_n\}_{n\in N}$，若对任意n,m，当$n\le m$时有$\mu(u_n,u_m)>\frac{1}{2}$，则$\{u_n\}_{n\in N}$是递增序列，记作$u_n\uparrow$。若$u=\sup_{n\in N}\{u_n\}$存在，则$u_n\uparrow u$；同样地，可以定义H中的递减序列。设Q是H的子集，用$Q\uparrow$表示Q是递增的，$Q\downarrow$表示Q是递减的。若$Q\uparrow$且$u=\sup Q$，则记为$Q\uparrow u$，同样若$Q\downarrow$且$u=\inf Q$，则记为$Q\downarrow u$。

定义 2.6 [4]设H是模糊偏序集，序列$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in H$，$u\in H$。若存在$H$中的序列$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足：

(i) 对所有的$n\in\mathbb{N}$，都有$\mu(v_n,u_n)>\frac{1}{2}$，$\mu(u_n,w_n)>\frac{1}{2}$；

(ii) $v_n\uparrow u$且$w_n\downarrow u$。

则称$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$模糊序收敛于u，记作$u_n\to u(fo)$。u称为$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的模糊序极限，记作$u=(fo)-\lim_n u_n$。

定义 2.7 [4]设H是(实)线性空间。若H中存在模糊偏序关系μ，使得向量结构和模糊偏序结构兼容，即对任意$k_1,k_2\in H$下列条件成立：

(i) 对任意$k\in H$，若$\mu(k_1,k_2)>\frac{1}{2}$，则$\mu(k_1,k_2)\le\mu(k_1+k,k_2+k)$；

(ii) 对任意$0<\alpha\in R$，若$\mu(k_1,k_2)>\frac{1}{2}$，则$\mu(k_1,k_2)\le\mu(\alpha k_1,\alpha k_2)$。

则称(H,μ)是模糊序线性空间。

定义 2.8 [5]设(H,μ)是模糊序线性空间。若(H,μ)也是模糊格，则(H,μ)是模糊 Riesz 空间。

命题 2.9 [5]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，则对任意$u_1,u_2\in H$，有$u_1+u_2=u_1\vee u_2+u_1\wedge u_2$。

定义 2.10 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间。H中所有正元素组成的集合称为H的正部，记为H^+，即

$$H^+=\left\{u\in H\mid\mu(0,u)>\frac{1}{2}\right\}.$$

定义 2.11 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间。

(i) 若(H,μ)的每个有上界的非空子集都有一个上确界，则称(H,μ)是模糊 Dedekind 完备或模糊序完备的。在这种情况下，我们也说(H,μ)是模糊 Dedekind 完备 Riesz 空间。

(ii) 若(H,μ)的每个有上界或有下界的非空可数子集分别有一个上确界或下确界，则称(H,μ)是模糊 Dedekind σ-完备的。

定义 2.12 [9]假设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，Q 是 H 的子空间，如果它满足以下两个条件：

(i) $u\in Q$ 当且仅当$|u|\in Q$；

(ii) 对任意$v\in Q$，且$\mu(u,v)>\frac{1}{2}$，有$u\in Q$。

则 Q 是 H 的模糊理想。

定义 2.13 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，Q 是 H 的子集。H 中包含 Q 最小模糊理想被称为由 Q 生成的模糊理想，记作A_Q。若 Q 是单元集，即$Q=\{u\}$ (其中$u\in H$)，则A_Q常写为A_u，并称A_u为由元素 u 生成的模糊主理想。

定义 2.14 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，B 是 H 中的模糊理想。B 是模糊带当且仅当$Q\subset B$且$u=\sup Q$时，有$u\in B$。设 Q 是 H 的子集。H 中包含 Q 最小模糊带被称为由 Q 生成的模糊带，记作B_Q。若 Q 是单元集，即$Q=\{u\}$ (其中$u\in H$)，则B_Q常写为B_u，并称B_u为由元素 u 生成的模糊主带。

推论 2.15 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，$u\in H$。则模糊主理想A_u为

$$A_u=\left\{v\in H\mid \mu\left(|v|,\lambda|u|\right)>\frac{1}{2},\lambda\ge 0\right\}.$$

定义 2.16 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，B 是 H 中的模糊带。如果$H=B\oplus B^d$，则称 B 为模糊投影带。

定义 2.17 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间。对任意$u\in H$，若由 u 生成的带是模糊投影带，则称 u 为模糊投影向量。若(H,μ)中每个元素都是模糊投影向量，则称(H,μ)具有模糊主投影性质。

设 B 是(H,μ)中的模糊投影带。则对任意$u\in H$都有唯一分解$u=u_1+u_2$ (其中$u_1\in B$，$u_2\in B^d$)。因此，由$P_B(u)=u_1$定义的映射$P_B:H\to H$是一个投影映射。

定理 2.18 [9]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，若元素$u\in H$是模糊投影向量当且仅当对于任意$v\in H$，集合$H_v=\{v\wedge n|u|\}_{n\in N}$上确界存在，并且对任意$v\in H^+$有$P_u(v)=\sup H_v=\sup\{v\wedge n|u|\}_{n\in N}$。

定义 2.19 [11]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，$(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in H$，$k\in H$。若存在另一个向下为零的网$(w_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}\in H^+$，且对每一个$\gamma\in\Gamma$都存在$\lambda_0\in\Lambda$，使得当$\lambda\ge\lambda_0$时，$\mu\left(|k_\lambda-k|,w_\gamma\right)$成立。则称$(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$模糊序收敛于 k，记作$k_\lambda\to k(fo)$。

定义 2.20 [11]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，序列$\{v_n\}\in H$，$v\in H^+$。若对任意$\varepsilon>0$，存在$n(\varepsilon)$，使得当$n>n(\varepsilon)$时，有$\mu\left(|v-v_n|,\varepsilon u\right)>\frac{1}{2}$，则称$\{v_n\}$模糊 u 一致收敛于 v，记作$v_n\to v(fu-un)$。并且 v 是序列$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的模糊 u 一致极限。

定义 2.21 [14]设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，序列$\{v_n\}\in H$，若存在$u\in H$满足条件$\mu(0,u)>\frac{1}{2}$，使得$v_n\to v(fu-un)$，则$\{v_n\}$模糊相对一致收敛于$v\in H$，记作$v_n\to v(f-un)$，其中 u 称作模糊调控值。

定义 2.22 [9]设(H,μ)，(L,η)是模糊 Riesz 空间，$G:(H,\mu)\to(L,\eta)$是线性算子。若$\mu(0,u)>\frac{1}{2}$，有$\eta\left(0,G(u)\right)>\frac{1}{2}$，则称 G 是模糊正算子。

定义 2.23 [11]设(H,μ)，(L,η)是两个模糊 Riesz 空间，$G:(H,\mu)\to(L,\eta)$是正线性算子，则

(i) 当$C\subseteq H$是模糊序有界时，$G(C)\subseteq L$是模糊序有界的，称 G 是模糊序有界算子；

(ii) 若在 H 中，可由$k_\lambda\to 0(fo)$推得$G(k_\lambda)\to 0(fo)$，称 G 是模糊序连续算子；

(iii) 若在 H 中，可由$(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0(fo)$推得$G(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0(fo)$，称 G 是模糊 σ-序连续算子。

3. 模糊 Riesz 空间上模糊线性泛函

在本节中，我们的重点是讨论定义在两个模糊 Riesz 空间之间的模糊线性算子的各种性质。此外，我们还给出了模糊线性泛函是模糊序有界的特征表述。

引理 3.1 假设 (H,μ) 是模糊 Riesz 空间，$[A_w]$ 是由 $w\in H^+$ 生成的模糊主理想。假设 $Q=\left\{u:u\in[A_w],v\in H^+,\mu(u,v)>\frac{1}{2}\right\}$，$Q'=\left\{v\wedge nw:v\in H^+,n=1,2,\cdots\right\}$，则 Q 与 Q' 有相同上界。

证明:假设 $u\in Q'$，则 $\mu(u,nw)>\frac{1}{2}$，$\mu(u,v)>\frac{1}{2}$，即得 $\mu(u,v\wedge nw)>\frac{1}{2}$，所以 $u\in Q$。另一方面，假设 $u\in Q^+$ 满足 $u=\sup\left\{k:k\in A_w,\mu(k,u)>\frac{1}{2}\right\}$。记 $S=\left\{k:k\in A_w,\mu(k,u)>\frac{1}{2}\right\}$，则 $u=\sup S$，其中任何一个 $k\in S^+$ 使得 $\mu(k,n_k w)>\frac{1}{2}$ 对某些 n_k 成立。由 $\mu(k,v)>\frac{1}{2}$，$\mu(k,n_k w)>\frac{1}{2}$ 可知 $\mu(k,v\wedge n_k w)>\frac{1}{2}$。则 Q' 的任一上界 s 是所有 $k\in S$ 的上界，即 $\mu(k,s)>\frac{1}{2}$。所以 s 也是 Q 的上界。因此，Q 和 Q' 有相同的上界。

定理 3.2 设 (H,μ) 模糊 Riesz 空间，(L,η) 是模糊 σ -完备的 Riesz 空间。设 $G:(H,\mu)\to(L,\eta)$ 是模糊正算子。则对任意 $u\in H$，有 $G(u^+)=\max\{S(u):0\le S\le G\}$，$G(|u|)=\max\{S(u):-G\le S\le G\}$。

特别地，如果 $\tau:(H,\mu)\to R$ 是模糊正线性泛函，则对任意 $u\in H$，有 $\tau(u^+)=\max\{\rho(u):0\le\rho\le\tau\}$，$\tau(|u|)=\max\{\rho(u):-\tau\le\rho\le\tau\}$。

证明：令 $u\in H$，$0\le S\le G$，则 $\eta\left(S(u),S(u^+)\right)>\frac{1}{2}$，$\eta\left(S(u^+),G(u^+)\right)>\frac{1}{2}$，可得 $\eta\left(S(u),G(u^+)\right)>\frac{1}{2}$，所以 $G(u^+)$ 是集合 $\{S(u):0\le S\le G\}$ 的一个上界。为了证明 $G(u^+)$ 是这个集合的最大值，不妨假设 G_{u^+} 是 G 对由 u^+ 生成的模糊主理想的限制的最小正扩张。因为 (L,η) 是模糊 σ -完备的 Riesz 空间，则由引理 3.1 和[12]定理 2.13 可得

$$G_{u^+}=\sup\left\{G(v\wedge nu^+):v\in H^+,n=1,2,\cdots\right\}$$

并且满足条件 $0\le G_{u^+}\le G$。由于 $u^-\wedge u^+=0$，则有 $G_{u^+}(u^-)=0$，

$$G_{u^+}(u)=G_{u^+}(u^+)-G_{u^+}(u^-)=G(u^+)-0=G(u^+)$$

因此，$G(u^+)$ 是集合 $\{S(u):0\le S\le G\}$ 的最大值。

令 $u\in H$，$-G\le S\le G$，则有 $\eta\left(S(u^+),G(u^+)\right)>\frac{1}{2}$，$\eta\left(S(u^-),G(u^-)\right)>\frac{1}{2}$。由 $S(u)=S(u^+)-S(u^-)$，$G(|u|)=G(u^+)+G(u^-)$，可得

$$\eta\left(S(u^+)-S(u^-),G(u^+)+G(u^-)\right)>\frac{1}{2}$$

即 $\eta\left(S(u),G(|u|)\right)>\frac{1}{2}$，所以 $G(|u|)$ 是集合 $\{S(u):-G\le S\le G\}$ 的一个上界。为了证明 $G(|u|)$ 是这个集合的最大值，假设 $S=G_{u^+}-G_{u^-}$，则有 $-G\le S\le G$，

$$S(u)=G_{u^+}(u)-G_{u^-}(u)=G(u^+)+G(u^-)=G(|u|)$$

因此，$G(|u|)$ 是集合 $\{S(u):-G\le S\le G\}$ 的最大值。

假设(H,μ)，(L,η)是模糊 Riesz 空间，G 是 H 到 L 的模糊正线性算子。$\mathcal{L}_b(H,L)$表示从 H 到 L 的所有模糊序有界线性算子的集合，$\mathcal{L}_n(H,L)$表示从 H 到 L 所有模糊序连续线性算子。此外，H 上所有模糊线性泛函，记为$H^{\sim}$，即$H^{\sim}=\mathcal{L}_b(H,R)$。同样地，$H_n^{\sim}=\mathcal{L}_n(H,R)$。

定理 3.3 设(H,μ)是具有模糊主投影性质的模糊 Riesz 空间，设(L,η)是模糊 Dedekind 完备 Riesz 空间。则对任意$G,S\in\mathcal{L}_b(H,L)$，$w\in H^+$，下列等式成立：

$$[G\vee S](w)=\sup\{G(u)+S(v):u\wedge v=0 \text{ and } u+v=w\}$$

$$[G\wedge S](w)=\inf\{G(u)+S(v):u\wedge v=0 \text{ and } u+v=w\}$$

证明：由等式$G\vee S=-[(-G)\wedge(-S)]$，可得第一个公式可由第二个公式推导出来。并且由等式$[G-(G\wedge S)]\wedge[G-(G\wedge S)]=0$，可知当$G\wedge S=0$时，第二个公式成立，则其在一般情况下也是成立的。为此，在$\mathcal{L}_b(H,L)$令$G\wedge S=0$，并且固定$w\in H^+$，记$l=\inf\{G(u)+S(w-u):u\wedge(w-u)=0\}$，则下面需要证明$l=0$。

设$u\in H^+$满足$\mu(u,w)>\frac{1}{2}$，P 是(H,μ)到由$(2u-w)^+$生成的带的模糊序映射，$v=P(w)$。由$\mu\left(w,2u+(w-2u)^+\right)>\frac{1}{2}$，可得$\mu\left(P(w),2P(u)+P(w-2u)^+\right)>\frac{1}{2}$。

又由于$(w-2u)^+\wedge(2u-w)^+=0$，可得$P\left((w-2u)^+\right)=0$，$\mu\left(P(w),2P(u)\right)>\frac{1}{2}$。再根据[9]定义 6.1，可得$\mu\left(P(u),u\right)>\frac{1}{2}$。因此得到

$$\mu(v,2u)>\frac{1}{2} \tag{*}$$

由$\mu\left((2u-w)^+,(2w-w)^+\right)>\frac{1}{2}$，可得$\mu\left((2u-w)^+,w\right)>\frac{1}{2}$。

又由于$\mu\left(2u-w,(2u-w)^+\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(P(2u-w)^+,(2u-w)^+\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(P(2u-w)^+,P(w)\right)>\frac{1}{2}$，可以推出$\mu(2u-w,v)>\frac{1}{2}$，最后得到

$$\mu\left(w-v,2(w-u)\right)>\frac{1}{2} \tag{**}$$

结合(*)和(**)可得$\eta\left(G(v),G(2u)\right)>\frac{1}{2}$，$\eta\left(S(w-v),2S(w-u)\right)>\frac{1}{2}$。

则对任意$u\in H^+$，当$\mu(u,w)>\frac{1}{2}$时，$\eta\left(l,2\left(G(u)+S(w-u)\right)\right)>\frac{1}{2}$是成立的。由[12]中定理 1 可推出$\inf\left\{G(u)+S(w-u):\mu(u,w)>\frac{1}{2}\right\}=0$，由此可得$l=0$。

命题 3.4 设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，ξ是 H 上模糊线性泛函，并且对任意$u\in H^+$，$\sup\left\{\xi(w):w\in H^+ \text{ and } \mu(w,u)>\frac{1}{2}\right\}$存在，则

$$\xi^+(u)=\sup\left\{\xi(w):w\in H^+ \text{ and } \mu\left(w,u^+\right)>\frac{1}{2}\right\}-\sup\left\{\xi(w):w\in H^+ \text{ and } \mu\left(w,u^-\right)>\frac{1}{2}\right\}$$

证明：设$u,w\in H^{+}$，则有$\xi^{+}(u+w)=\xi^{+}(u)+\xi^{+}(w)$，$\xi^{+}(u-w)=\xi^{+}(u)-\xi^{+}(w)$。给定$\alpha\in R(\alpha\geq 0)$，$u\in H^{+}$，假设$\alpha\xi^{+}(u)\neq\xi^{+}(\alpha u)$。若$\alpha>0$，则有$\alpha\xi^{+}(u)=\xi^{+}(\alpha u)$，这与假设矛盾，所以$\alpha=0$，即$\alpha\xi^{+}(u)=0=\xi^{+}(\alpha u)$。对任意的$u,w\in H$和$\alpha\in R$，都有$u+w=u^{+}+w^{+}-(u^{-}+w^{-})$，$\alpha\xi^{+}(u)=\xi^{+}(\alpha u)$。

此外，对任意$u\in H^{+}$，有

$$\xi^{+}(u)=\sup\left\{\xi(w):\mu(0,w)>\frac{1}{2}\text{ and }\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right\}\geq\xi(0)=0$$

并且ξ^{+}是正的。

对任意$u\in H^{+}$，当ξ^{+}是集合$\{\xi,0\}$的上界时，有$\xi(u)\leq\sup\{\xi[0,u]\}=\xi^{+}(u)$，$\xi^{+}(u)\geq 0$。假设$\rho$是一模糊线性泛函且满足条件$\rho<\xi^{+}$，则对一些$u\in H^{+}$，$\rho(u)<\xi^{+}(u)$是成立的。则存在$w\in H^{+}$满足$\mu(w,u)>\frac{1}{2}$，$\rho(u)<\xi(w)$。所以$\rho(u)<\rho(w)$或者$\rho(w)<\xi(w)$是成立的。当$\rho(u)<\rho(w)$时，有$\mu(u-w,u)>\frac{1}{2}$，$\rho(u-w)<0$，则$\rho<0$。当$\rho(w)<\xi(w)$时，有$\rho<\xi$。所以$\xi^{+}=\sup\{\xi,0\}$。

引理 3.5 设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，ξ是H上模糊序有界线性泛函，ε是任意的正数，且对任意$u,v\in H^{+}$都有$\mu(v,u)>\frac{1}{2}$。则对任意$w\in[0,u]$，有$\xi(w)\leq\xi(v)+\varepsilon$当且仅当对任意$w_1\in[0,v]$及任意$w_2\in[0,u-v]$，使得$\xi(w_2-w_1)\leq\varepsilon$成立。

证明：令$w_1\in[0,v]$，$w_2\in[0,u-v]$。由$\mu(0,v+w_2-w_1)>\frac{1}{2}$和$\mu(v+w_2-w_1,u)>\frac{1}{2}$，可推出$\xi(v+w_2-w_1)\leq\xi(v)+\varepsilon$，所以$\xi(w_2-w_1)\leq\varepsilon$。

相反地，假设$w_1\in[0,v]$，$w_2\in[0,u-v]$使得$\xi(w_2-w_1)\leq\varepsilon$。记$w_2\equiv\min\{w,u-v\}$，$w_1\equiv v-(w-w_2)$，则$\mu(0,w_1)>\frac{1}{2}$，$\mu(w_1,v)>\frac{1}{2}$，$\mu(0,w_2)>\frac{1}{2}$，$\mu(w_2,u-v)>\frac{1}{2}$。若$w_1=v$，$w_2=w$，则有$\xi(w-v)\leq\varepsilon$，即$\xi(w)\leq\xi(v)+\varepsilon$；若$w_1=u-w$，$w_2=u-v$，则有$\xi((u-v)-(u-w))=\xi(u-v)\leq\varepsilon$。因此，$\xi(w)\leq\xi(v)+\varepsilon$。

定义 3.6 设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，若$e\in H$使得对任意$u\in H$都存在$t>0$满足条件$\mu(|u|,te)>\frac{1}{2}$，则e称为H的模糊序单位。

命题 3.7 设(H,μ)是具有模糊序单位的模糊 Riesz 空间，ξ是H上的模糊线性泛函使得$\sup\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{ and }\mu(u,e)>\frac{1}{2}\right\}$存在，则$\xi\in H^{\sim}$和$\xi^{+}$存在。

证明：给定$\varepsilon>0$，对任意$l\in H^{+}$都有$\mu(l,e)>\frac{1}{2}$，$\sup\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{and }\mu(u,e)>\frac{1}{2}\right\}-\varepsilon<\xi(l)$成立，则对任意$u\in H^{+}$，当$\mu(u,e)>\frac{1}{2}$时，$\xi(u)<\xi(l)+\varepsilon$成立。同样，假设$u_1,u_2\in H^{+}$使得$\mu(u_1,e-l)>\frac{1}{2}$，$\mu(u_2,l)>\frac{1}{2}$成立，则有$\xi(u_1-u_2)\leq\varepsilon$。对任意$v,l\in H^{+}$满足条件$\mu(v,e)>\frac{1}{2}$，$\mu(l,e)>\frac{1}{2}$时，有$\mu(0,v\wedge l)>\frac{1}{2}$，$\mu(v\vee l,e)>\frac{1}{2}$。又由$v+l=v\vee l+v\wedge l$可推得$\mu(v+l,e+v\wedge l)>\frac{1}{2}$，则$\mu(v-v\wedge l,e-l)>\frac{1}{2}$。所以当$\mu(u_1,v-v\wedge l)>\frac{1}{2}$，$\mu(u_2,v\wedge l)>\frac{1}{2}$时，有$\xi(u_1-u_2)\leq\varepsilon$。根据引理 3.5 可知对任意$u\in H^{+}$，当$\mu(u,v)>\frac{1}{2}$时，有$\xi(u)\leq\xi(v\wedge l)+\varepsilon$。

令 $\alpha,\beta\in R$ 满足 $\alpha<\beta$，且 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。则 $\xi(v\wedge l)<\alpha+\varepsilon$ 或者 $\alpha<f(v\wedge l)$ 成立。当 $\xi(v\wedge l)<\alpha+\varepsilon$ 时， $f(v\wedge l)+\varepsilon<\alpha+2\varepsilon=\beta$，所以 β 是集合 $\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{ and }\mu(u,v)>\frac{1}{2}\right\}$ 的上界；当 $\alpha<f(v\wedge l)$ 时，有 $\mu(v\wedge l,l)>\frac{1}{2}$， $\alpha<f(v\wedge l)$，则集合 $\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{ and }\mu(u,v)>\frac{1}{2}\right\}$ 有上确界。

令 $v\in H^{+}$，则存在 $t>0$ 使得 $\mu\left(\frac{1}{t}v,e\right)>\frac{1}{2}$。因此，

$$s=\sup\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{ and }\mu\left(u,\frac{1}{t}v\right)>\frac{1}{2}\right\}$$

存在，所以 $ts=\sup\left\{\xi(u):u\in H^{+}\text{ and }\mu(u,v)>\frac{1}{2}\right\}$。

注解：设 (H,μ) 是模糊 Riesz 空间，ξ 是 H 上模糊线性泛函。若对任意 $\{x_n\}\in H^{+}$ 都有 $\mu\left(x_n,\frac{x_0}{2^n}\right)>\frac{1}{2}$ ($n=1,2,\cdots$)，使得 $\sup\{|\xi(x_n)|\}$ 是有限的，则 ξ 是模糊序有界的。

定理 3.8 设 (H,μ) 是模糊 Riesz 空间，ξ 是 (H,μ) 上模糊线性泛函。则 ξ 是模糊序有界线性泛函当且仅当对任意模糊(相对)一致收敛于 0 的序列 $\{u_n:n=1,2,\cdots\}\in H^{+}$，都有 $\xi(u_n)\to 0$。

证明：只需在一个方向上给出证明即可，假设 $\{x_n\}\in H^{+}$ 满足条件 $\mu\left(x_n,\frac{x_0}{2^n}\right)>\frac{1}{2}$ ($n=1,2,\cdots$)，由于 ξ 是模糊序有界的，则 ξ 将 H 中的模糊序区间 $[0,x]$ 映射到 R 上的模糊序区间。换句话说，我们需要证明 R 中的集合 $\left\{|\xi(y)|:x,y\in H^{+}\text{ and }\mu(y,x)>\frac{1}{2}\right\}$ 是模糊序有界的。如果不是，则存在 H^{+} 中的元素 x_0 使得 $\sup\left\{|\xi(y)|:y\in H^{+}\text{ and }\mu(y,x_0)>\frac{1}{2}\right\}=+\infty$ 成立。

假设

$$\sup\left\{|\xi(y)|:y\in H^{+}\text{ and }\mu\left(y,\frac{x_0}{2}\right)>\frac{1}{2}\right\}=+\infty \tag{*}$$

则存在 $y_1\in H^{+}$ 满足条件 $\mu\left(y_1,\frac{x_0}{2}\right)>\frac{1}{2}$，并且使得 $|\xi(y_1)|\geq 3|\xi(x_0)|+2$。由此可得

$$|\xi(z_1)|\geq|\xi(y_1)|-\frac{1}{2}|\xi(x_0)|\geq 2|\xi(x_0)|+2\quad\left(z_1=\frac{x_0}{2}-y_1\right)$$

由(*)可知下列两个上确界不可能都是有限的，

$$\sup\left\{|\xi(y)|:y\in H^{+}\text{ and }\mu(y,y_1)>\frac{1}{2}\right\},\quad \sup\left\{|\xi(y)|:y\in H^{+}\text{ and }\mu(y,z_1)>\frac{1}{2}\right\}.$$

若第一个上确界是无限的，则用 x_1 替换 y_1；另一种情况则用 x_1 替换 z_1。则得到

$$\mu\left(x_1,\frac{x_0}{2}\right)>\frac{1}{2},\quad 2|\xi(x_0)|+2\leq|\xi(x_1)|,\quad \sup\left\{|\xi(y)|:y\in H^{+}\text{ and }\mu(y,x_1)>\frac{1}{2}\right\}=+\infty.$$

通过重复使用这个过程，用 x_1 代替 x_0，则存在 $x_2\in H^{+}$，使得

$$\mu\left(x_2,\frac{x_1}{2}\right)>\frac{1}{2},\quad |\xi(x_2)|\geq 2|\xi(x_1)|+2\geq 4|\xi(x_0)|+4,$$

$$\sup\left\{\left|\xi(y)\right|: y, x_2 \in H^+ \text{ and } \mu(y, x_2) > \frac{1}{2}\right\} = +\infty .$$

通过重复上述过程我们得到一个序列$\{x_n : n = 0,1,2,\cdots\}$满足条件$\mu\left(x_n, \frac{x_0}{2^n}\right) > \frac{1}{2}$，$\left|\xi(x_n)\right| \geq 2^n \left|\xi(x_0)\right| + 2^n \quad (n = 1,2,\cdots)$。

然而，根据假设具有这种性质的序列是不存在的。所以ξ是模糊序有界的。

4. 结论

本文主要研究具有模糊主射影的模糊 Riesz 空间上任意两个模糊序有界线性算子的上确界和下确界的存在性，并给出相应的计算公式。我们还给出了模糊线性泛函的正部的计算公式，最后我们讨论了模糊线性泛函是模糊序有界的等价条件。本文得到的结论可以逐渐丰富模糊 Riesz 空间上线性算子理论。

基金项目

国家自然科学基金项目(11801454)。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Zadeh, L.A. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Orderings. *Information Sciences*, **3**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[3] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[4] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670. https://www.researchgate.net/publication/266311007

[5] Beg, I. and Islam, M.U. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-228. https://www.researchgate.net/publication/256471147

[6] Beg, I. and Islam, M. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-423. https://www.researchgate.net/publication/233757745

[7] Beg, I. (1997) σ-Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-229. https://www.researchgate.net/publication/257289053 https://doi.org/10.1007/BF03322166

[8] Beg, I. (1998) Extenssion of Fuzzy Positive Linear Operator. *Fuzzy Mathematics*, **6**, 849-855. https://www.researchgate.net/publication/262611976

[9] Hong, L. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands, and Fuzzy Band Projections. *Seria Matematica-Informatica*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[10] Park, C., Movahednia, E., Mosadegh, S.M.S.M. and Mursaleen, M. (2018) Riesz Fuzzy Normed Spaces and Stability of a Lattice Preserving Functional Equation. *Journal of Computational Analysis Applications*, **24**, 569-579.

[11] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, 116. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[12] Guirao, J., Iqbal, M., Bashir, Z. and Rashid, T. (2021) A Study on Fuzzy Order Bounded Linear Operators in Fuzzy Riesz Spaces. *Mathematics*, **9**, 1512. https://doi.org/10.3390/math9131512

[13] Cheng, N., Liu, X. and Dai, J. (2022) Extension of Fuzzy Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **179**, 103168. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2022.103168

[14] 刘宵. 模糊 Riesz 空间中收敛序列性质的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学理学院, 2022.