Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 172-179
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148315

带Poisson跳的随机时变时滞微分方程全局解的存在性

李光洁

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2024年6月27日；录用日期：2024年7月25日；发布日期：2024年8月21日

摘 要

本文研究了一类高非线性的带Poisson跳的随机时变时滞微分方程。运用Lyapunov函数方法、随机分析和代数不等式技巧，研究了该类方程全局解的存在性。

关键词

随机微分方程，时变时滞，Poisson 跳，解的存在性

The Existence of Global Solutions to Stochastic Time-Varying Delay Differential Equations with Poisson Jump

Guangjie Li

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 27^{th}, 2024; accepted: Jul. 25^{th}, 2024; published: Aug. 21^{st}, 2024

文章引用: 李光洁. 带Poisson跳的随机时变时滞微分方程全局解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 172-179.
DOI: 10.12677/pm.2024.148315

Abstract

This paper investigates a class of stochastic time-varying delay differential equations (STVDEs) with Poisson jump. By employing the Lyapunov functions method, stochastic analysis and algebraic inequality techniques, the existence of the global solution to a STVDE with Poisson jump is obtained.

Keywords

Stochastic Differential Equations, Time-Varying Delay, Poisson Jump, The Existence of the Solution

1. 引言

随机现象在现实世界中无处不在而又难以避免。随着科技的迅猛发展，人们对实际问题的描述要求也越来越精准，对随机性因素的影响也越来越重视。许多动力系统不可避免的也会遇到内外随机因素的影响，对这样的系统常用随机微分方程来刻画(见专著 [1])。实际中，很多系统的演化规律不仅与当前的状态有关，而且还与过去某段历史的状态有关，比如传染病模型中感染者发病一般会有一定时间的潜伏期，而在网络化系统中传输信号也需要一定的时间，人们称这种延迟的现象为时滞。从通讯系统，航天工程到无人驾驶等都存在着时滞现象，特别在自动化控制领域，考虑带时滞的控制输入对系统的反馈控制会起到至关重要的作用。在数学上考虑时滞现象的微分方程被称为时滞微分方程，而随机时滞微分方程已广泛应用于基因调控网络、生物系统、控制等领域(见文献 [2–4])。据我们所知，Brown运动是一个连续的随机过程，然而一些系统会遇到一些突发的扰动，使系统出现跳跃的现象，若能描述这种跳跃的形式显得很有必要，因此将Poisson 跳引入随机系统来刻画这种跳跃现象很有价值(参阅文献 [5–8])。

文献 [9]研究了一类带马氏切换和Poisson跳的随机时滞微分方程数值解的收敛性。文献 [10]研究了一类带Poisson跳的随机时滞微分方程解的泰勒逼近。文献 [11]研究了一类带跳的随机微分方程解的强唯一性。文献 [12]研究了一类带Poisson跳的随机时滞微分方程温和解的存在唯一性。另外在传统的随机系统理论中，随机微分方程的系数需满足线性增长条件。而实际上在生态系统和

经济系统中，很多模型(如恒方差弹性模型，捕食者-食饵模型等)的系数是超线性增长的，这类系数满足超线性增长的随机微分方程也被称为高非线性随机微分方程。文献 [13]研究了高非线性随机泛函微分方程解的存在唯一性和稳定性。尽管关于随机时滞微分方程解的存在性研究已得到了广泛关注，但对高非线性的带Poisson 跳的随机时变时滞微分方程解的存在性的研究成果却相对较少。本文利用Lyapunov 函数方法、随机分析和不等式技巧，研究了一类高非线性的带Poisson跳的随机时变时滞微分方程全局解的存在性。

本文结构如下：第2节介绍了一些符号、假设条件和预备知识; 第3节给出了主要结果, 证明了研究方程全局解的存在性。

2. 预备知识

记$\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{R}^+ = [0, +\infty)$. $\boldsymbol{R}^n$ 表示n-维欧式空间。对任意的$x \in \boldsymbol{R}^n$, $|x| = \sqrt{x^T x}$表示Euclid 范数。若$\boldsymbol{A}$是一个向量或矩阵, 则$\boldsymbol{A}^T$ 代表其转置, 且$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)}$ 表示其范数, $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\mathrm{trace}(AA^T)}$. 对$\forall x, y \in \boldsymbol{R}^n$, $\langle x, y\rangle$ 或$x^T y$表示x, y的内积。对任意的$a, b \in \boldsymbol{R}$，$a \vee b = \max\{a, b\}$和$a \wedge b = \min\{a, b\}$。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间。当$\tau > 0$，$C([-\tau, 0]; \boldsymbol{R}^n)$ 表示所有连续的函数$\varphi : [-\tau, 0] \to \boldsymbol{R}^n$ 的集合，其范数是$\|\varphi\| = \sup_{-\tau\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|$。$C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$ 是所有$\mathcal{F}_0$-可测且有界的$C([-\tau, 0]; \boldsymbol{R}^+)$函数的集合。对$\forall t \ge 0$ 和$\delta > 0$，$\delta(\cdot) : \boldsymbol{R}^+ \to [0, \delta]$ 是连续的函数且$\dot{\delta}(t) = d\delta(t)/dt \le \bar{\delta} < 1$。当$\delta(t) \equiv$ 常数，$\bar{\delta} = 0$。

本文考虑如下带Poisson跳的高非线性随机时变时滞微分方程：

$$
\begin{aligned}
dx(t) =&[f(x(t), x(t-\delta(t)), t) + u(x(t-\tau), t)]dt \\
&+ g(x(t), x(t-\delta(t)), t)dB(t) \\
&+ h(x(t), x(t-\delta(t)), t)dN(t),
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

初始值

$$
x_0 = \varphi = \{x(t) : -\delta \le t \le 0\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \boldsymbol{R}^n), \tag{2.2}
$$

其中，$f, g, h : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^n$，$u : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^n$ 是Borel-可测函数，$B(t)$ 是一个标准的Brown运动，$N(t)$ 是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程。$\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ 是补偿的Poisson过程。这里假设$B(t)$和$N(t)$是相互独立的。对$\forall t \in \boldsymbol{R}^+$，假设 $f(0, 0, t) = g(0, 0, t) = h(0, 0, t) = u(0, t) = 0$。

接下来研究方程(2.1)全局解的存在性。假设对$\forall x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \boldsymbol{R}^n$ 和$\forall t \in \boldsymbol{R}^+$ 有如下条件成立。

假设1: 对任意的实数$h > 0$, 存在一个常数$L_h > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&|f(x, y, t) - f(\bar{x}, \bar{y}, t)| \vee |g(x, y, t) - g(\bar{x}, \bar{y}, t)| \\
&\vee |h(x, y, t) - h(\bar{x}, \bar{y}, t)| \le L_h(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|),
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

其中，$|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \le h$。且存在一个正常数$\beta$满足

$$|u(x,t) - u(y,t)| \le \beta |x - y|. \tag{2.4}$$

由$u(0,t) = 0$，进而可得

$$|u(x,t)| \le \beta |x|,\ \forall (x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+. \tag{2.5}$$

假设2: 假设存在正常数K 和$q_i(i = 1,2,3)$ 满足

$$\begin{aligned}
&|f(x,y,t)| \le K(1 + |x|^{q_1} + |y|^{q_1}),\\
&|g(x,y,t)| \le K(1 + |x|^{q_2} + |y|^{q_2}),\\
&|h(x,y,t)| \le K(1 + |x|^{q_3} + |y|^{q_3}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里$q_1 \ge 1$，$q_2 \ge 1$，$q_3 \ge 1$。

注: 若$q_i = 1(i = 1,2,3)$, 则条件(2.6)就是线性增长条件。本文考虑方程的系数是高非线性的，条件(2.6)是多项式增长条件且$\max_{1 \le i \le 3}\{q_i\} > 1$.

令 $C^{2,1}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+; \boldsymbol{R}^+)$ 是定义在$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+$上的所有非负函数$V(x,t)$ 的集合, 这里$V(x,t)$关于x是二阶可导的，关于t是一阶可导的。定义算子$LV : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}
LV(x,y,t) =& V_t(x,t) + V_x(x,t) f(x,y,t)\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^T(x,y,t) V_{xx}(x,t) g(x,y,t)]\\
&+ \lambda[V(x + h(x,y,t),t) - V(x,t)]
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&V_t(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, V_x(x,t) = \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right),\\
&V_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}.
\end{aligned}$$

利用Itô公式可得

$$V(x(t),t) = V(x(0),0) + \int_0^t LV(x(s), x(s - \delta(s)), s) ds + G_t, \tag{2.7}$$

其中，

$$\begin{aligned}
G_t =& \int_0^t V_x(x(s),s) g(x(s), x(s-\delta(s)), s) dB(s)\\
&+ \int_0^t [V_x(x(s) + h(x(s), x(s-\delta(s)), s), s)\\
&- V_x(x(s),s)] d\tilde{N}(s).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

进一步，要证方程(2.1)全局解的存在性，还需如下条件成立。

假设3: 令$H(\cdot) \in C(\boldsymbol{R}^n \times [-\delta,\infty); \boldsymbol{R}^+)$。假设存在一个函数$V \in C^{2,1}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+; \boldsymbol{R}^+)$, $q \geq 2(q_1 \vee q_2 \vee q_3)$, 以及正数$c_1, c_2, c_3, c_4$ 满足$c_3 + c_4 < c_2, |x|^q \leq V(x,t) \leq H(x,t), \forall (x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+$, $LV(x,y,t) + V_x(x,t)u(z,t) \leq c_1 - c_2 H(x,t) + c_3(1-\bar{\delta})H(y, t-\delta(t)) + c_4 H(z, t-\tau), \forall (x,y,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+, z \in \boldsymbol{R}^n$.

3. 主要结果

定理 若假设1-3 成立，则在初始条件 (2.2)下, 当 $t \geq -\delta$ 时，方程 (2.1)存在全局解。

证 由假设 1 可知方程(2.1)在 $t \in [-\delta, \sigma_e]$ 上有唯一的最大局部解 $x(t)$, 其中 σ_e是爆破时间。接下来要证$x(t)$是全局的, 只需证$\sigma_e = \infty$。令m_0 是一个充分大的整数且满足$\|x_0\| = \|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} x(s) < m_0$。对任意的整数$m > m_0$, 定义停时$\sigma_m = \inf\{t \in [0, \sigma_e) : |x(t)| \geq m\}$。规定$\inf \emptyset = \infty$, 这里$\emptyset$ 是一个空集. 根据σ_m的定义可知σ_m 是递增的，并且$\sigma_\infty = \lim_{m\to\infty} \sigma_m \leq \sigma_e$。利用Itô公式, 可计算出对$\forall t > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&EV(x(t\wedge\sigma_m), t\wedge\sigma_m) \\
&= V(x(0),0) + E\int_0^{t\wedge\sigma_m} [LV(x(s), x(s-\delta(s)), s) \\
&\quad + V_x(x(s),s)u(x(s-\tau),s)]ds.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

运用假设3, 可得

$$\begin{aligned}
&EV(x(t\wedge\sigma_m), t\wedge\sigma_m) \\
&\leq V(x(0),0) + c_1 t - c_2\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s),s)ds \\
&\quad + c_3(1-\bar{\delta})\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s-\delta(s)), s-\delta(s))ds \\
&\quad + c_4\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s-\tau), s-\tau)ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

利用换元法，令$u = s - \delta(s)$, 则

$$ds = du + d\delta(s) \leq du + \bar{\delta}ds,$$

从而$ds \leq \frac{1}{1-\bar{\delta}}du$，进而可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s-\delta(s)), s-\delta(s))ds \\
&\leq \frac{1}{1-\bar{\delta}}\int_{-\delta(s)}^{t\wedge\sigma_m-\delta(s)} H(x(u),u)du.
\end{aligned}$$

又因为$0 \le \delta(s) \le \delta$, 即$-\delta(s) \ge -\delta$, 所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s-\delta(s)), s-\delta(s))ds \\ &\le \frac{1}{1-\bar{\delta}}\int_{-\delta}^{0} H(x(s), s)ds + \frac{1}{1-\bar{\delta}}\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s), s)ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

同理，利用换元法$u = s - \tau$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s-\tau), s-\tau)ds \\ &= \int_{-\tau}^{t\wedge\sigma_m-\tau} H(x(u), u)du \\ &\le \int_{-\tau}^{0} H(x(s), s)ds + \int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s), s)ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

将(3.3)和(3.4)代入(3.2)中得出

$$\begin{aligned}&EV(x(t\wedge\sigma_m), t\wedge\sigma_m) \\ &\le V(x(0), 0) + c_3\int_{-\delta}^{0} H(x(s), s)ds \\ &\quad - (c_2 - c_3 - c_4)\int_0^{t\wedge\sigma_m} H(x(s), s)ds \\ &\quad + c_4\int_{-\tau}^{0} H(x(s), s)ds + c_1 t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

因为$c_3 + c_4 < c_2$, 可进一步化简得

$$EV(x(t\wedge\sigma_m), t\wedge\sigma_m) \le M_1 + c_1 t, \tag{3.6}$$

其中，

$$M_1 = V(x(0), 0) + c_3\int_{-\delta}^{0} H(x(s), s)ds + c_4\int_{-\tau}^{0} H(x(s), s)ds.$$

从而可得

$$E[V(x(\sigma_m), \sigma_m)I_{\{\sigma_m\le t\}}] \le M_1 + c_1 t.$$

又因为$|x|^q \le V(x, t)$, 所以

$$E[|x(\sigma_m)|^q I_{\{\sigma_m\le t\}}] \le M_1 + c_1 t,$$

由σ_m的定义可知$m^q P(\sigma_m \le t) \le M_1 + c_1 t$. 当$m \to \infty$, 可得$P(\sigma_\infty \le t) \to 0$, 即$\sigma_\infty > t$ a.s.

当$t \to \infty$, 可得$\sigma_\infty = \infty$ a.s. 证毕。

基金项目

广东省基础与应用基础研究项目(No. 2023A1515011025)；国家自然科学基金项目(No.11901398)；广州市科技计划项目(No. 202201010250)。

参考文献

[1] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Application. Chichester.

[2] Tian, T., Burrage, K., Burrage, P.M. and Carletti, M. (2007) Stochastic Delay Differential Equations for Genetic Regulatory Network. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **205**, 696-707. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.02.063

[3] Mao, W., Hu, L. and Mao, X. (2019) Almost Sure Stability with General Decay Rate of Neutral Stochastic Pantograph Equations with Markovian Switching. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **52**, 1-17. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.52

[4] Shaikhet, L. (2019) About Stability of Delay Differential Equations with Square Integrable Level of Stochastic Perturbations. *Applied Mathematics Letters*, **90**, 30-35. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.10.004

[5] Mariton, M. (1990) Jump Linear Systems in Automatic Control. CRC Press.

[6] Hanson, F.B. (2007) Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusion. SIAM. https://doi.org/10.1137/1.9780898718638

[7] Li, Q. and Gan, S. (2011) Almost Sure Exponential Stability of Numerical Solutions for Stochastic Delay Differential Equations with Jumps. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **37**, 541-557. https://doi.org/10.1007/s12190-010-0449-9

[8] Ahmed, H.M. and Zhu, Q. (2012) The Averaging Principle of Hilfer Fractional Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps. *Applied Mathematics Letters*, **112**, Article 106755. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106755

[9] Li, R. and Chang, Z. (2007) Convergence of Numerical Solution to Stochastic Delay Differential Equation with Poisson Jump and Markovian Switching. *Applied Mathematics and Computation*, **184**, 451-463. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.112

[10] Jiang, F., Shen, Y. and Liu, L. (2011) Taylor Approximation of the Solutions of Stochastic Differential Delay Equations with Poisson Jump. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 798-804. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.04.032

[11] Kulinich, G. and Kushnirenko, S. (2014) Strong Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations with Jumps and Non-Lipschitz Random Coefficients. *Modern Stochastics Theory and Applications*, **1**, 65-72. https://doi.org/10.15559/vmsta-2014.1.1.6

[12] Mao, M. and He, X. (2024) Existence of a Class of Doubly Perturbed Stochastic Functional Differential Equations with Poisson Jumps. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **31**, Article No. 24. https://doi.org/10.1007/s44198-024-00189-x

[13] Luo, Q., Mao, X. and Shen, Y. (2011) Generalised Theory on Asymptotic Stability and Boundedness of Stochastic Functional Differential Equations. *Automatica*, **47**, 2075-2081. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.06.014