Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 569-575
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142055

二阶复合型非齐次线性常微分方程边值问题的求解

曾　峥，董晓旭[*]，彭　钰，梁　滢，王　玉
西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年1月8日；录用日期：2024年1月23日；发布日期：2024年2月28日

摘　要

本文针对二阶复合型非齐次线性微分方程的边值问题进行研究。相似构造法通常用于求解二阶齐次线性微分方程的边值问题，本文将相似构造法应用于求解二阶复合型非齐次线性微分方程的边值问题。该方法是求解一般复合型二阶线性微分方程边值问题的一种方便、有效、有创新性的方法。本文的研究扩充了相似构造法的应用范围。

关键词

边值问题，双区复合微分方程，相似核函数，引解函数

The Solution of the Boundary Value Problem of the Second-Order Composite Non-Homogeneous Linear Ordinary Differential Equation

Zheng Zeng, Xiaoxu Dong[*], Yu Peng, Ying Liang, Yu Wang
School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 8th, 2024; accepted: Jan. 23rd, 2024; published: Feb. 28th, 2024

Abstract

In this paper, the boundary value problem of second-order composite non-homogeneous linear

[*]通讯作者。

文章引用: 曾峥, 董晓旭, 彭钰, 梁滢, 王玉. 二阶复合型非齐次线性常微分方程边值问题的求解[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 569-575. DOI: 10.12677/pm.2024.142055

differential equation is studied. The similarity construction method is usually used to solve the boundary value problem of second-order homogeneous linear differential equations. In this paper, the similarity construction method is applied to solve the boundary value problem of second-order composite non-homogeneous linear differential equations. This method is a convenient, effective and innovative method for solving the boundary value problem of general second-order linear differential equations. The research in this paper expands the application range of similar construction method.

Keywords

Boundary Value Problem, Two-Region Composite Differential Equation, Similar Kernel Function, Functions of Guide Solution

1. 引言

二阶复合型非齐次线性微分方程在应用数学、理论物理、工程学、控制理论和最优化理论等领域广泛存在，其重要性体现在对各种物理、生物问题和工程问题的建模。在物理学中，这类微分方程被用于描述振动系统、热传导、电路等现象。在生物学研究中，这类微分方程可描述生物体内的动力学过程，例如药物分布和生态系统演变。在工程领域，它们则常被用于建模结构、材料性质和电路响应。因此，二阶复合型非齐次线性微分方程的求解方法吸引了众多学者研究。

Landahl 和 Hanson [1]利用微分法解决了两点边值问题。一些作者[2] [3] [4]利用格林函数法求解两点边值问题。Coville 和 Dupaigne [5]利用粒子群优化算法研究了线性常微分方程两点边值问题。利用格林函数方法研究微分方程边值问题是非常方便和容易的。基于文献[3]的研究，陆静[6]利用常数变易法研究了二阶常微分方程的求解问题，并给出了格林函数法在不同常微分方程两点边界条件下的求解方法、解的表达式及其性质。孙赫[7]利用常数变易法求得了一类二阶常微分方程周期边值问题的格林函数，并总结出一类高阶常微分方程边值问题的格林函数的求法。刘丽环[8]利用格林函数方法讨论了一类二阶常微分方程边值问题解的存在唯一性。该文献借助格林函数将边值问题等价于积分方程，并借助压缩映射不动点定理证明解的存在唯一性。刘慧[9]应用文献[8]的方法研究了一类二阶常微分方程在不同边值条件下的格林函数，从而研究积分方程解的存在性。田献珍[10]研究了二阶非齐次线性常微分方程在相同边界条件下和不同情况下的格林函数。利用格林函数给出了非齐次线性边值问题唯一解的精确表达式。李培超[11]利用通解和格林函数的方法给出了点源函数形式的二阶线性常微分方程(ODE)及其相应的非齐次项边值问题的解。这些方法可以应用于求解线性常微分方程以及相关的带有一般非齐次项的定解问题。

黄力[12]将二阶微分方程两点边值问题转化为弗雷德霍姆积分方程，利用泰勒矩阵方法得到了其近似解，给出了未知函数的 n 阶泰勒展开式，并通过矩阵运算得到了泰勒展开式的系数。马翠[13]基于变分原理提出了一个与二阶线性常微分方程问题等价的变分问题，并通过两点三次厄尔米特插值找到了一个近似函数。然后，将二阶线性常微分方程问题转化为多变量单目标优化问题，并采用粒子群算法进行求解。该解为二阶线性常微分方程的近似解。通过与瑞利－里兹法和有限元法的比较，该方法令人非常满意。

陈铁军[14]利用差分法研究边值问题，提出了三种边界条件，再根据边界条件对线性常微分方程进行求解。采用这种高精度差分法获得的结果具有较高精准度。刘杨[15]利用两种再生核方法求解线性常微分

方程的初边值问题，并通过了一些数值实例比较了两种方法的精确度。黄佳玥[16]通过将一类边值问题转化为含单未知参数的初值问题，再利用初值问题的数值解法和有效的迭代法给出边值问题的数值解。叶康生[17]提出 p 型超收敛算法可应用于非线性常微分方程边值问题。泰勒展开可将非线性常微分方程边值问题转化为线性常微分方程边值问题，避免了迭代运算，提高了效率。李明英[18]针对二阶线性常微分方程两点边值问题，通过二阶导数的组合式近似构造了具有最高阶精度的等步长的五点差分格式，并将其对多个算例进行编程计算，再将得到的结果与精确解作比较，可发现所构成的差分格式达到了最高的八阶精度。该方法提高了计算精度。Riverafigueroa 等人[19]给出了求解非齐次二阶常系数线性微分方程的一种直接方法。这种方法的优点是不要求初值问题解的唯一性和存在性定理。

李顺初[20]在分析一类二阶复合线性齐次微分方程边值问题解的基础上，研究了相似核函数和解的相似结构，提出了求解该类边值问题的新方法。王俊超[21]通过简化二阶线性齐次微分方程线性非齐次边值问题的解析表达式，得到了解的形式相似性，并且利用简单边界条件，为构造具有复杂边界条件的方程解提供了一种新的方法。彭春[22]基于二阶线性齐次常微分方程第三类边值问题的相关理论，给出了求解二阶齐次常微分方程弹性边值问题的相似构造法，并将其应用于一些特殊方程的弹性边值问题中，得到了解的相似结构。为后续发展奠定了坚实的理论基础。但现有的研究在特定问题或边界条件下的适用性、精确性、计算效率等方面仍存在局限性。

基于上述研究成果，本文研究了二阶复合型非齐次线性微分方程的边值问题，给出了此类边值问题的求解方法——相似构造法[20]，总结了该方法的求解步骤。对于上述研究中的边值问题，传统的求解方法格林函数法、泰勒矩阵方法、变分原理、差分法等计算过程复杂，而相似构造法简化了计算过程，通过相对简单的数学运算将引解函数、相似核函数、内外边界和衔接条件系数组合即可得到边值问题的解。本文的研究将相似构造法应用于非齐次情况，并对该方法进行了扩展。这有助于读者更好地理解本文研究的独特性和贡献，同时扩充了微分方程边值问题的可解类。

2. 复合二阶线性非齐次常微分方程边值问题的求解

2.1. 复合二阶线性非齐次常微分方程边值问题

基于以上研究，本文针对复合二阶线性非齐次微分方程边值问题进行如下研究：

$$\begin{cases} y_1''+p_1(x)y_1'+q_1(x)y_1=f(x) \quad (a\le x\le b) \\ y_2''+p_2(x)y_2'+q_2(x)y_2=0 \quad (b\le x\le c) \\ \left[Ey_1+(1+EF)y_1'\right]_{x=a}=D \\ y_1\big|_{x=b}=\lambda_1 y_2\big|_{x=b},\quad y_1'\big|_{x=b}=\lambda_2 y_2'\big|_{x=b} \\ \left[My_2+Ny_2'\right]_{x=c}=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$D,E,F,M,N,\lambda_1,\lambda_2$ 是常数，$\lambda_1\lambda_2\ne 0$，$M^2+N^2\ne 0$，$p_i(x)\in C^1[a,b]$，$q_i(x)\in C^2[a,b]\ (i=1,2)$。

2.2. 边值问题的求解

利用叠加原理，边值问题(1)可以分解为以下两个边值问题：

$$\begin{cases} y_1''+p_1(x)y_1'+q_1(x)y_1=0 \quad (a\le x\le b) \\ y_2''+p_2(x)y_2'+q_2(x)y_2=0 \quad (b\le x\le c) \\ \left[Ey_1+(1+EF)y_1'\right]_{x=a}=D \\ y_1\big|_{x=b}=\lambda_1 y_2\big|_{x=b},\quad y_1'\big|_{x=b}=\lambda_2 y_2'\big|_{x=b} \\ \left[My_2+Ny_2'\right]_{x=c}=0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x) y_1' + q_1(x) y_1 = f(x) \quad (a \le x \le b) \\ y_2'' + p_2(x) y_2' + q_2(x) y_2 = 0 \quad (b \le x \le c) \\ \left[E y_1 + (1+EF) y_1' \right]_{x=a} = 0 \\ y_1\big|_{x=b} = \lambda_1\, y_2\big|_{x=b}, \quad y_1'\big|_{x=b} = \lambda_2\, y_2'\big|_{x=b} \\ \left[M y_2 + N y_2' \right]_{x=c} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

定解方程 $y_1'' + p_1(x) y_1' + q_1(x) y_1 = f(x)$ 的一般解为：

$$y_1(x) = A_1 y_{11}(x) + B_1 y_{12}(x) + g(x) \tag{4}$$

定解方程 $y_2'' + p_2(x) y_2' + q_2(x) y_2 = 0$ 的一般解为：

$$y_2(x) = A_2 y_{21}(x) + B_2 y_{22}(x) \tag{5}$$

定义引解函数如下：

$$\varphi_{0,0}^i(x,\xi) = y_{i1}(x) y_{i2}(\xi) - y_{i2}(x) y_{i1}(\xi) \quad (i=1,2) \tag{6}$$

$$\varphi_{1,0}^i(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^i(x,\xi) = y_{i1}'(x) y_{i2}(\xi) - y_{i2}'(x) y_{i1}(\xi) \quad (i=1,2) \tag{7}$$

$$\varphi_{0,1}^i(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{0,0}^i(x,\xi) = y_{i1}(x) y_{i2}'(\xi) - y_{i2}(x) y_{i1}'(\xi) \quad (i=1,2) \tag{8}$$

$$\varphi_{1,1}^i(x,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\varphi_{0,0}^i(x,\xi) = y_{i1}'(x) y_{i2}'(\xi) - y_{i2}'(x) y_{i1}'(\xi) \quad (i=1,2) \tag{9}$$

方程(7)~(9)通过 $\varphi_{0,0}^i(x,\xi)$ 对 x 和 ξ 求偏导得到，其中 $i=1$ 表示内区 $(a \le x \le b)$，$i=2$ 表示外区 $(b \le x \le c)$。

定理 1：若边值问题(2)有唯一解，则内外区的解分别表示为[10]

$$y_1^{(1)}(x) = D \cdot \frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF} \cdot \Phi_1(x) \quad (a \le x \le b) \tag{10}$$

$$y_2^{(1)}(x) = D \cdot \frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(b,b)}{\lambda_1 \Phi_2(b) \varphi_{1,1}^1(a,b) - \lambda_2 \varphi_{1,0}^1(a,b)} \cdot \Phi_2(x) \quad (b \le x \le c) \tag{11}$$

其中 $\Phi_2(x)$，$\Phi_1(x)$ 分别称为外区和内区的相似核函数，表示为：

$$\Phi_2(x) = \frac{M\varphi_{0,0}^2(x,c) + N\varphi_{0,1}^2(x,c)}{M\varphi_{1,0}^2(b,c) + N\varphi_{1,1}^2(b,c)} \quad (b \le x \le c) \tag{12}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{\lambda_2 \varphi_{0,0}^1(x,b) - \lambda_1 \Phi_2(b) \varphi_{0,1}^1(x,b)}{\lambda_2 \varphi_{1,0}^1(a,b) - \lambda_1 \Phi_2(b) \varphi_{1,1}^1(a,b)} \quad (a \le x \le b) \tag{13}$$

定理 2：若边值问题(3)有唯一解，则内外区的解分别表示为：

$$y_1^{(2)}(x) = \frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF} \times \left\{ \left[-Eg(a) - (1+EF) g'(a) \right] \Phi_1(x) + \left[\lambda_2 g(b) - \lambda_1 g'(b) \Phi_2(b) \right] \Phi_3(x) \right\} + g(x) \quad (a \le x \le b) \tag{14}$$

$$y_2^{(2)}(x) = \frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF} \times \left\{ -g'(b) \Phi_3(b) + g(b) \Phi_4(b) - \left[Eg(a) + (1+EF) g'(a) \right] \varphi_{0,1}^1(b,b) \right\} \Phi_2(x) \quad (b \le x \le c) \tag{15}$$

这里 $\Phi_3(x)$，$\Phi_4(x)$ 表示为：

$$\Phi_3(x)=\frac{E\varphi_{0,0}^1(a,x)+(1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,x)}{-\lambda_2\varphi_{1,0}^1(a,b)+\lambda_1\varphi_{1,1}^1(a,b)\Phi_2(b)}\quad(a\le x\le b)\tag{16}$$

$$\Phi_4(x)=\frac{E\varphi_{0,1}^1(a,x)+(1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,x)}{-\lambda_2\varphi_{1,0}^1(a,b)+\lambda_1\varphi_{1,1}^1(a,b)\Phi_2(b)}\quad(a\le x\le b)\tag{17}$$

证明：将(4)~(5)式代入内外区的边界条件和两个收敛条件，得：

$$\left[Ey_{11}(a)+(1+EF)y_{11}'(a)\right]A_1+\left[Ey_{12}(a)+(1+EF)y_{12}'(a)\right]B_1=-Eg(a)-(1+EF)g'(a)\tag{18}$$

$$y_{11}(b)A_1+y_{12}(b)B_1-\lambda_1y_{21}(b)A_2-\lambda_1y_{22}(b)B_2=-g(b)\tag{19}$$

$$y_{11}'(b)A_1+y_{12}'(b)B_1-\lambda_2y_{21}'(b)A_2-\lambda_2y_{22}'(b)B_2=-g'(b)\tag{20}$$

$$\left[My_{21}(c)+Ny_{21}'(c)\right]A_2+\left[My_{22}(c)+Ny_{22}'(c)\right]B_2=0\tag{21}$$

根据边值问题(3)解的存在唯一性，可以发现线性方程的系数行列式(方程(18)~(21))关于待定系数不等于零，且

$$\Delta=\begin{vmatrix}Ey_{11}(a)+(1+EF)y_{11}'(a) & Ey_{12}(a)+(1+EF)y_{12}'(a) & 0 & 0\\ y_{11}(b) & y_{12}(b) & -\lambda_1y_{21}(b) & -\lambda_1y_{22}(b)\\ y_{11}'(b) & y_{12}'(b) & -\lambda_2y_{21}'(b) & -\lambda_2y_{22}'(b)\\ 0 & 0 & My_{21}(c)+Ny_{21}'(c) & My_{22}(c)+Ny_{22}'(c)\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=E\left\{\varphi_{0,0}^1(a,b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]-\varphi_{0,1}^1(a,b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}\\&\quad+(1+EF)\left\{\varphi_{1,0}^1(a,b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]-\varphi_{1,1}^1(a,b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}\\&=\left[E\Phi_1(a)+1+EF\right]\\&\quad\times\left\{\varphi_{1,0}^1(a,b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]-\varphi_{1,1}^1(a,b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}\end{aligned}$$

由克莱姆法则得到 A_1,B_1,A_2,B_2 的值如下：

$$\begin{aligned}A_1=&\frac{1}{\Delta}\left\{\left[-Eg(a)-(1+EF)g'(a)\right]\left\{y_{12}(b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]\right.\right.\\&\left.-y_{12}'(b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}-\left[Ey_{12}(a)+(1+EF)y_{12}'(a)\right]\\&\left.\times\left\{-g(b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]+g'(b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}\right\}\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}B_1=&\frac{1}{\Delta}\left\{\left[Ey_{11}(a)+(1+EF)y_{11}'(a)\right]\left\{-g(b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]\right.\right.\\&\left.+g'(b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}+\left[Eg(a)+(1+EF)g'(a)\right]\\&\left.\times\left\{y_{11}(b)\left[-\lambda_2M\varphi_{1,0}^2(b,c)-\lambda_2N\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]-y_{11}'(b)\left[-\lambda_1M\varphi_{0,0}^2(b,c)-\lambda_1N\varphi_{0,1}^2(b,c)\right]\right\}\right\}\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}A_2=&\frac{1}{\Delta}\left[My_{22}(c)+Ny_{22}'(c)\right]\left\{\left[Ey_{11}(a)+(1+EF)y_{11}'(a)\right]\left[-y_{12}(b)g'(b)+y_{12}'(b)g(b)\right]\right.\\&-\left[Ey_{12}(a)+(1+EF)y_{12}'(a)\right]\left[-y_{11}(b)g'(b)+y_{11}'(b)g(b)\right]\\&\left.-\left[Eg(a)+(1+EF)g'(a)\right]\varphi_{0,1}^1(b,b)\right\}\end{aligned}\tag{24}$$

$$B_2=\frac{-1}{\Delta}\left[My_{21}(c)+Ny'_{21}(c)\right]\left\{-E\varphi^1_{0,0}(a,b)g'(b)+E\varphi^1_{0,1}(a,b)g(b)-(1+EF)\varphi^1_{1,0}(a,b)\right.$$
$$\left.\times g'(b)+(1+EF)\varphi^1_{1,1}(a,b)g(b)-\left[Eg(a)+(1+EF)g'(a)\right]\varphi^1_{0,1}(b,b)\right\} \tag{25}$$

将 A_1,B_1,A_2,B_2 的值代入方程(4)~(5)，并且利用相似核函数 $\Phi_1(x)$，$\Phi_2(x)$，$\Phi_3(x)$ 和 $\Phi_1(a)$，$\Phi_2(b)$，$\Phi_3(b)$， $\Phi_4(b)$ 的值分别得到边值问题(3)的内区和外区的解，即方程(14)~(15)。

定理 3：利用叠加原理，边值问题(1)的内外区的解为

$$\begin{aligned}y_1(x)&=y_1^{(1)}(x)+y_1^{(2)}(x)\\&=\frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF}\\&\quad\times\left\{\left[D-Eg(a)-(1+EF)g'(a)\right]\Phi_1(x)+\left[\lambda_2 g(b)-\lambda_1 g'(b)\Phi_2(b)\right]\Phi_3(x)\right\}+g(x)\\&\quad(a\le x\le b)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_2^{(1)}(x)+y_2^{(2)}(x)\\&=\frac{1}{E\Phi_1(a)+1+EF}\cdot\left\{\left\{\frac{D}{\lambda_1\Phi_2(b)\varphi^1_{1,1}(a,b)-\lambda_2\varphi^1_{1,0}(a,b)}\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\left[Eg(a)+(1+EF)g'(a)\right]\right\}\varphi^1_{0,1}(b,b)-g'(b)\Phi_3(b)+g(b)\Phi_4(b)\right\}\Phi_2(x)\\&\quad(b\le x\le c)\end{aligned} \tag{27}$$

3. 常微分方程边值问题的求解步骤

根据上述求解(1)、(2)、(3)边值问题的过程，得到求解复合二阶线性非齐次微分方程边值问题的步骤。具体步骤如下：

Step 1. 求解定解方程

得到边值问题(1)的每一个定解方程的一般解为(4)~(5)。

Step 2. 构造引解函数

利用 $y_{i1}(x),y_{i2}(x)(i=1,2)$ 分别构造了内外区的引解函数 $\varphi^i_{0,0}(x,\xi)(i=1,2)$，其它引解函数可以通过 $\varphi^i_{0,0}(x,\xi)$ 对 x 和 ξ 求偏导得到。

Step 3. 构建内、外区域相似核函数

根据公式(12)、(13)、(16)和(17)，分别利用外区和内区的引解函数、齐次外边界条件的系数 M，N、非齐次内边界条件的系数 E，F、内外区域两个衔接条件的系数 λ_1， λ_2 构造相似核函数。

Step 4. 求边值问题的解

根据公式(26)和(27)，边界问题(1)的内区和外区的解分别由非齐次内边界条件的系数 D，E，F、相似核函数 $\Phi_1(x)$， $\Phi_2(x)$， $\Phi_3(x)$、内外区引解函数的值 $\Phi_1(a)$， $\Phi_2(b)$， $\Phi_3(b)$， $\Phi_4(b)$ 和内外区域两个衔接条件的系数 λ_1， λ_2 组合得到。

4. 结论

1) 本文解决了复合二阶线性非齐次常微分方程的边值问题。利用叠加原理，得到边值问题解的相似结构。

2) 根据上述方法的步骤，可以看出该方法是求解一般复合二阶线性微分方程边值问题的一种方便、有效、有创新性的方法。

基金项目

西华大学人才引进项目(Z202068)资助。

参考文献

[1] Landahl, H.D. and Hanson, B.D. (1975) A Three Stage Population Model with Cannibalism. *Bulletin of Mathematical Biology*, **37**, 11-17. https://doi.org/10.1016/S0092-8240(75)80003-6

[2] Tognetti, K. (1975) The Two Stage Stochastic Model. *Mathematical Biosciences*, **25**, 195-204. https://doi.org/10.1016/0025-5564(75)90002-4

[3] Chasseigne, E., Chaves, M. and Ross, J.D. (2006) Asymptotic Behavior for Nonlocal Diffusion Equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **86**, 271-291. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2006.04.005

[4] Zhang, G.B., Li, W.T. and Lin, G. (2009) Traveling Waves in Delayed Predator-Prey Systems with Nonlocal Diffusion and Stage Structure. *Mathematical and Computer Modelling*, **49**, 1021-1029. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.09.007

[5] Coville, J. and Dupaigne, L. (2007) On a Nonlocal Reaction Diffusion Equation Arising in Population Dynamics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A*: *Mathematics*, **137**, 1-29. https://doi.org/10.1017/S0308210504000721

[6] 陆静. 用格林函数法求解二阶微分方程边值问题[J]. 太原师范学院学报(自然科学版), 2011, 10(4): 32-36.

[7] 孙赫. 一类常微分方程边值问题的格林函数的求法[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2018, 39(1): 14-18.

[8] 刘丽环, 常晶, 高艳超. 二阶常微分方程边值问题的格林函数求法[J]. 长春工业大学学报(自然科学版), 2011, 32(1): 102-104.

[9] 刘慧. 二阶常微分方程边值问题 Green 函数的研究[J]. 泰山学院学报, 2018, 40(3): 56-61.

[10] 田献珍, 霍海峰. 二阶线性非齐次常微分方程的格林函数法[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2012, 33(6): 12-14.

[11] 李培超, 李培伦, 黎波, 葛良燕. 一类二阶常系数非齐次线性微分方程及边值问题的解法[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(3): 210-216.

[12] 黄力, 段向阳, 欧艳.一类二阶微分方程边值问题的近似解[J]. 湖南工业大学学报, 2011, 25(3): 25-26+96.

[13] 马翠, 周先东, 宋丽娟. 二阶线性常微分方程的两点边值问题的新解法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2010, 35(4): 74-78.

[14] 陈铁军. 基于高精度差分法的线性常微分方程边值问题研究[J]. 安阳工学院学报, 2018, 17(6): 85-88.

[15] 刘杨, 王玉兰. 用两种再生核方法求解一类线性常微分方程初边值问题[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2017, 36(5): 324-330.

[16] 黄佳玥. 常微分方程边值问题的一种数值解法[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2019.

[17] 叶康生, 邱廷柱. 二阶非线性常微分方程边值问题有限元 p 型超收敛计算[J]. 工程力学, 2019, 36(12): 7-14.

[18] 李明英. 二阶常微分方程边值问题的 5 点差分算法[J]. 运筹与模糊学, 2022, 12(1): 58-67. https://doi.org/10.12677/ORF.2022.121006

[19] Riverafigueroa, A. and Riverarebolledo, J.M. (2015) Alternative Approach to Second-Order Linear Differential Equations with Constant Coefficients. *International Journal of Mathematical Education*, **46**, 765-775. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.992988

[20] 李顺初. 复合型微分方程的边值问题的相似构造解法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013, 32(4): 27-31.

[21] 王俊超, 李顺初. 二阶线性齐次微分方程解的相似结构[J]. 理论数学, 2012, 2(1): 23-27.

[22] 彭春. 二阶齐次线性常微分方程的弹性边值问题及其应用研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2021.