Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1714-1719
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136175

Hans汉斯

双圈图的补图的谱半径

邱　欢，王　岚，王国平*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年5月20日；录用日期：2023年6月21日；发布日期：2023年6月28日

摘　要

设θ_n^*是将$n-4$条悬挂边粘到$\theta(2,1,2)$的一个三度点得到的双圈图。本文我们证明了n个点的双圈图的补图的最大谱半径只在$\overline{\theta_n^*}$取到。

关键词

邻接矩阵，谱半径，补图

The Spectral Radius of the Complement of Bicyclic Graphs

Huan Qiu, Lan Wang, Guoping Wang*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 20th, 2023; accepted: Jun. 21st, 2023; published: Jun. 28th, 2023

Abstract

Let θ_n^* be the bicyclic graph obtained by attaching $n-4$ pendant edges to a vertex of degree 3 on $\theta(2,1,2)$. In this paper we show that the maximum spectral radiu is achieved uniquely by $\overline{\theta_n^*}$ among all complements of bicyclic graphs of order n.

Keywords

Adjacency Matrix, Spectral Radius, Complement Graphs

*通讯作者。

文章引用: 邱欢, 王岚, 王国平. 双圈图的补图的谱半径[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1714-1719.
DOI: 10.12677/pm.2023.136175

1. 引言

设 $G(V,E)$ 是一个连通图，它的邻接矩阵 $A(G)$ 是一个 $(0,1)$ 实对称矩阵。所以它的特征值都是实数，从大到小的排序为：$\lambda_1(G)\ge\lambda_2(G)\ge\cdots\ge\lambda_n(G)$，其中最大的特征值 $\lambda_1(G)$ 为图 G 的谱半径，记为 $\rho(G)$。刻画图的谱半径的文章很多，诸如文献[1] [2] [3]等。刻画带限制条件的谱的文章也很多，例如在文献[4]中作者刻画了具有完美匹配的双圈图的谱半径，文献[5]中作者刻画了有 n 个点 k 个悬挂点的双圈图的谱半径。相对来说刻画图的补图的谱半径的文章还不太多，在文献[6]中作者刻画了单圈图的补图的谱半径。本文主要刻画了双圈图补图的谱半径，以及谱半径达到最大时的极图。在本文中我们假设图 G 和它的补图 $\bar{G}$ 都是连通的，定义矩阵 $A(\bar{G})$ 的特征值 $\rho(\bar{G})$ 对应的特征向量为 $x(\bar{G})=\left(x_{v_1}(\bar{G}),x_{v_2}(\bar{G}),\cdots,x_{v_n}(\bar{G})\right)^{\mathrm{T}}$，其中 $x_{v_i}(\bar{G})$ 是点 v_i 对应的分量。

边数等于点数加一的连通图是双圈图。令 C_n 和 P_n 分别表示 n 个点的圈和路，我们定义图 $b(p,l,q)$ 是由两个点不交的圈 C_p，C_q 和一条路 P_l 组成的图形，其中 P_l 的两个端点分别和 C_p，C_q 有一个公共点，而当 C_p 和 C_q 有唯一的公共点时，我们记这个图形为 $b(p,0,q)$。定义图 $\theta(p,l,q)$ 为给定两个点中间连接有三条路 P_{p+1}，P_{l+1} 和 P_{q+1}，其中这三条路两两之间除了两个给定的点外没有公共点。我们把 $b(p,l,q)$ 和 $b(p,0,q)$ 粘上一些树构成的图形记作 B_n，把 $\theta(p,l,q)$ 粘上一些树构成的图形记作 $\Theta(p,l,q)$。显然，所有 n 个点的双圈图由 B_n 和 Θ_n 组成。

设 θ_n^* 是将 $n-4$ 条悬挂边粘到 $\theta(2,1,2)$ 的一个三度点得到的双圈图。本文我们证明了 n 个点的双圈图的补图的最大谱半径只在 θ_n^* 取到。

2. 主要结果

下面的定理在矩阵的研究中起到了非常重要的作用。

非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理[7]：如果 M 是一个 $n\times n$ 阶的非负不可约矩阵，那么有以下结论成立：

i) 若 $\rho(M)$ 是矩阵 A 的最大特征值，则 $\rho(M)\ge 0$；

ii) $\rho(M)$ 是矩阵 A 的单重根；

iii) M 有对应于特征值 $\rho(M)$ 的一个正的特征向量，使得 $Mx=\rho(M)x$。

众所周知图 G 是连通图的充分必要条件是图 G 对应的邻接矩阵是不可约的。

引理 1 [6]假设 u 和 v 是图 G 的两个不同的点，$\{v_i\mid i=1,2,\cdots,s\}\subseteq N_G(v)\setminus\left(N_G(u)\cup\{u\}\right)$，其中 $N_G(v)$ 表示点 v 的邻点集。令 $G^*=G-\sum_{1\le i\le s}v_iv+\sum_{1\le i\le s}v_iu$，若 $x_u(\bar{G})\le x_v(\bar{G})$，则有 $\rho(\bar{G})<\rho\left(\overline{G^*}\right)$ 成立。

假设 u 是图 G 的一个点，T_l 是以 v 为根节点的一个 l 个点的树。我们将图 G 的 u 点和图 T_l 的 v 点粘接成一个点得到的图形记作 $GuvT_l$。接下来用 $K_{1,l-1}$ 来表示以 w 为根节点的 l 个点的星图。由引理 1 容易得到下面的引理。

引理 2 若图 G，T_l 和 $K_{1,l-1}$ 如上所定义，那么有 $\rho\left(\overline{GuvT_l}\right)\le\rho\left(\overline{GuwK_{1,l-1}}\right)$，其中等号成立的充分必要条件是 $GuvT_l\cong GuwK_{1,l-1}$。

引理 3 [6]假设图 G 和 $\bar{G}$ 都是连通的，uv 是图 G 的一条非悬挂的割边，图 G 压缩边 uv 为一个点 w 并给 w 带一条悬挂边得到的图形记作图 G^*，那么有 $\rho(\bar{G})<\rho\left(\overline{G^*}\right)$。

假设 G 与其补图 $\overline{G}$ 都是连通的。在接下来的内容里都用 $\overline{x}(G)=\{\overline{x}_v(G)\mid v\in V(G)\}^{\mathrm{T}}$ 表示 $A(\overline{G})$ 的对应于 $\rho(\overline{G})$ 的特征向量，其中 $\overline{x}_v(G)$ 对应点 v。

定理 4 若 $G\in B_n$，u 是 G 的子图 $b(3,0,3)$ 的 4 度点，则 $\rho(\overline{G})\le\rho\left(\overline{b(3,0,3)uwK_{1,n-5}}\right)$，当且仅当 $G\cong b(3,0,3)uwK_{1,n-5}$ 时等号成立。

证明： 令 $G\in B_n$ 使得它的补图 $\overline{G}$ 具有极大的谱半径。

首先我们来证明 $b(p,0,q)$ 是图 G 的子图。

假设图 G 的子图是 $b(p,l,q)$，其中 $l\ge 1$，$P_{l+1}=u_1u_2\cdots u_{l+1}$ 是连接两个圈 C_p 和 C_q 的路，其中 $u_1\in V(C_p)$，$u_{l+1}\in V(C_q)$。

如果 $x_{u_1}(\overline{G})\ge x_{u_l}(\overline{G})$，令

$$G_1=G-u_1w+u_lw$$

如果 $x_{u_1}(\overline{G})\le x_{u_l}(\overline{G})$，令

$$G_1=G-u_lw'+u_1w'$$

其中 $w\in C_p\cap N_G(u_1)$，$w'\in C_q\cap N_G(u_l)$。显然 $G_1,G_2\in B_n$，由引理 1 有 $\rho(\overline{G_1})>\rho(\overline{G})$ 且 $\rho(\overline{G_2})>\rho(\overline{G})$，这与 $\overline{G}$ 有极大的谱半径相矛盾，故 $l=0$，因此 $b(p,0,q)$ 是图 G 的子图。

其次我们证明图 G 只有一个树子图，并且它以 G 的两个圈唯一的公共点 u 为根节点。

假设点 v 是图 G 的一个树子图 T_1 的根节点，其中 $v\in C_p$ 并且 $v\ne u$。

如果 $x_u(\overline{G})\ge x_v(\overline{G})$，令

$$G_3=G-\sum_{w\in N_G(u)\cap T_1}uw+\sum_{w\in N_G(u)\cap T_1}vw$$

如果 $x_u(\overline{G})\le x_v(\overline{G})$，令

$$G_4=G-\sum_{w'\in N_G(v)\cap C_q}uw'+\sum_{w'\in N_G(v)\cap C_q}uw'$$

显然 $G_3,G_4\in B_n$，由引理 1 有 $\rho(\overline{G_3})>\rho(\overline{G})$ 且 $\rho(\overline{G_4})>\rho(\overline{G})$，这与 $\overline{G}$ 有极大的谱半径相矛盾，因此 $v=u$。继续上述过程我们可以证得图 G 只有一个树子图，并且它的根节点为图 G 的圈上的 4 度点 u。

由引理 3 很容易证明接在点 u 出的树是一个星子图。

最后我们证明两个圈 C_p 和 C_q 都是 3 长圈。

不失一般性，假设 $p\ge 4$，并且 $C_p=u_1u_2\cdots u_pu_1$。

如果 $x_{u_1}(\overline{G})\le x_{u_2}(\overline{G})$，令

$$G_5=G-u_2u_3+u_1u_3$$

如果 $x_{u_1}(\overline{G})\ge x_{u_2}(\overline{G})$，令

$$G_6=G-\sum_{u\in N_G(u_1)\setminus\{u_2\}}u_1u+\sum_{u\in N_G(u_1)\setminus\{u_2\}}u_2u$$

显然 $G_5,G_6\in B_n$，由引理 1 有 $\rho(\overline{G_5})>\rho(\overline{G})$ 且 $\rho(\overline{G_6})>\rho(\overline{G})$，这与 $\overline{G}$ 有极大的谱半径相矛盾，因此 $p=3$，同理可证得 $q=3$。

综上所述，如果 $G\in B_n$，要使得 $\overline{G}$ 极大，则必有 $G\cong b(3,0,3)uwK_{1,n-5}$。 □

定理 5 若 $G\in\Theta_n$，则有 $\rho(\overline{G})\le\rho\left(\overline{\theta(2,1,2)uwK_{1,n-4}}\right)$，其中点 u 是图 G 的子图 $\theta(2,1,2)$ 的 3 度点，等号成立的充要条件是 $G\cong\theta(2,1,2)uwK_{1,n-4}$。

证明： 令 $G\in\Theta_n$ 使得它的补图 $\overline{G}$ 有极大的谱半径。

首先我们来证明图 G 只有一个树子图。

假设 T_1 和 T_2 是图 G 的两个树子图，它们分别以 $\theta(p,l,q)$ 上的点 u 和 v 为根节点。

如果 $x_u(\bar{G}) \ge x_v(\bar{G})$，令

$$G_7 = G - \sum_{u^* \in N_G(u)\cap T_1} u^*u + \sum_{u^* \in N_G(u)\cap T_1} u^*v$$

如果 $x_u(\bar{G}) \le x_v(\bar{G})$，令

$$G_8 = G - \sum_{u^* \in N_G(v)\cap T_2} u^*v + \sum_{u^* \in N_G(u)\cap T_1} u^*u$$

显然 $G_7, G_8 \in B_n$，由引理 1 有 $\rho(\overline{G_7}) > \rho(\bar{G})$ 且 $\rho(\overline{G_8}) > \rho(\bar{G})$，这与 $\bar{G}$ 有极大的谱半径相矛盾，继续上述过程可知图 G 只含有一个树子图。

由引理 3 很容易证明接在点 u 出的树是一个星子图，我们记该树子图的根节点为 u_1。

接下来我们证明 $\theta(l,p,q) \cong \theta(2,1,2)$。

假设 $l \ge 3$，并且 $P_{l+1} = u_1u_2\cdots u_{l+1}$。

如果 $x_{u_1}(\bar{G}) \le x_{u_2}(\bar{G})$，令

$$G_9 = G - u_2u_3 + u_1u_3$$

如果 $x_{u_1}(\bar{G}) \ge x_{u_2}(\bar{G})$，令

$$G_{10} = G - \sum_{u^* \in N_G(u_1)\setminus\{u_2\}} u^*u_1 + \sum_{u^* \in N_G(u_1)\setminus\{u_2\}} u^*u_2$$

显然 $G_9, G_{10} \in B_n$，由引理 1 有 $\rho(\overline{G_9}) > \rho(\bar{G})$ 且 $\rho(\overline{G_{10}}) > \rho(\bar{G})$，这与 $\bar{G}$ 有极大的谱半径相矛盾，继续上述过程我们可以得到 $l \le 2$，同理可以证得 $p \le 2$，$q \le 2$，由双圈图的定义可知 l，p 和 q 最多有一个为 1。不失一般性我们令 $l = 1$。因此 $\theta(l,p,q) \cong \theta(2,1,2)$。

若 $d_G(u_1) = 2$，则 $G \cong \theta_n^*$，若 $d_G(u_1) = 3$，则 $G \cong \theta_n^{**}$，如图 1 所示。

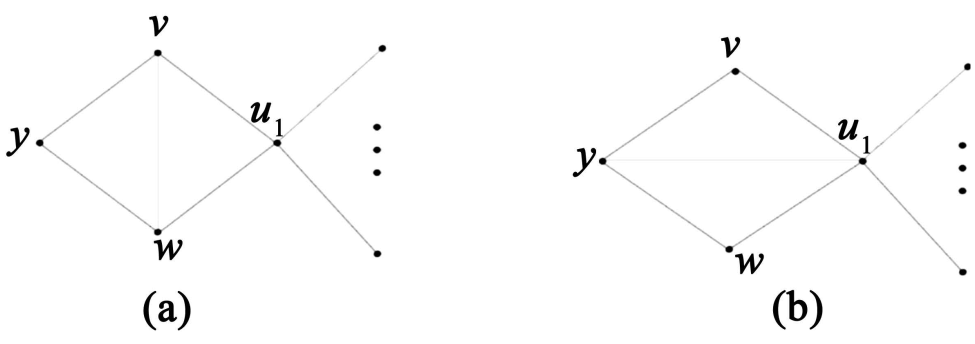

Figure 1. (a) θ_n^*; (b) θ_n^{**}

图 1. (a) θ_n^*；(b) θ_n^{**}

最后我们证明 $G \cong \theta_n^{**}$。

用反证法，假设 $d_{u_1}(G) = 3$，比较 $x_{u_1}(\bar{G})$ 和 $x_v(\bar{G})$ 的大小。

如果 $x_{u_1}(\bar{G}) \ge x_v(\bar{G})$，令

$$G_1^* = G - \sum_{u^* \in N_G(u_1)\setminus\{v,w\}} u^*u_1 + \sum_{u^* \in N_G(u_1)\setminus\{v,w\}} u^*u_1$$

如果 $x_{u_1}\left(\overline{G}\right) \le x_v\left(\overline{G}\right)$，令

$$G_2^* = G - vy + yu_1$$

显然 $G_1^*, G_2^* \in \Theta_n$，且 G_1^* 和 G_2^* 均与 θ_n^{**} 同构。由引理 1 有 $\rho\left(\overline{G_1^*}\right) > \rho\left(\overline{G}\right)$ 且 $\rho\left(\overline{G_2^*}\right) > \rho\left(\overline{G}\right)$，这与 $\overline{G}$ 有极大的谱半径相矛盾。 □

定理 6 假设 G 是一个 n 个点的连通的双圈图，则 $\rho\left(\overline{G}\right) \le \rho\left(\overline{\theta_n^{**}}\right)$，当且仅当 $G \cong \theta_n^{**}$ 时等号成立。其中 θ_n^{**} 如图 1 所示。

证明： 令 v 是图 G 的子图 $b(3,0,3)$ 的 4 度点，由定理 4.2.4 和定理 4.2.5 可知在双圈图中我们只需证明 $\rho\left(\overline{b(3,0,3)vwK_{1,n-5}}\right) < \rho\left(\overline{\theta(2,1,2)uwK_{1,n-4}}\right)$ 即可。

令 $H_1 = b(3,0,3)vwK_{1,n-5}$，$H_2 = \theta(2,1,2)uwK_{1,n-4}$。则有

$$P\left(\overline{H_1};\lambda\right) = \left|I\lambda - A\left(\overline{H_1}\right)\right| = \lambda^3(\lambda+1)^{n-6}(\lambda+2)\left(\lambda^2 + (4-n)\lambda + 2(4-n)\right)$$

$$P\left(\overline{H_2};\lambda\right) = \left|I\lambda - A\left(\overline{H_2}\right)\right| = \lambda(\lambda+1)^{n-4}\left(\lambda^3 + (4-n)\lambda^2 + (7-2n)\lambda + n - 4\right)$$

因为实对称矩阵的特征值非负，所以 $\rho\left(\overline{H_1}\right) = \dfrac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2}$。

令 $f(x) = x^3 + (4-n)x^2 + (7-2n)x + n - 4$，则 $f'(x) = 3x^2 + 2(4-n)x + 7 - 2n$。

如果 $x > \dfrac{n-4+\sqrt{n^2-2n-5}}{3}$，则有 $f'(x) > 0$，因此当 $x > \dfrac{n-4+\sqrt{n^2-2n-5}}{3}$ 时 $f(x)$ 是个增函数。显然 $\dfrac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2} > \dfrac{n-4+\sqrt{n^2-2n-5}}{3}$，并且

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2}\right) &= \left(\frac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2}\right)^3 + (4-n)\left(\frac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2}\right)^2 \\ &\quad + (7-2n)\left(\frac{n-4+\sqrt{n^2-16}}{2}\right) + n - 4 \\ &= \frac{n-4-\sqrt{n^2-16}}{2} < \frac{n-4-\sqrt{(n-4)^2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

因为 $\rho\left(\overline{H_2}\right)$ 是方程 $f(x)$ 的一个根，所以 $\rho\left(\overline{b(3,0,3)vwK_{1,n-5}}\right) < \rho\left(\overline{\theta(2,1,2)uwK_{1,n-4}}\right)$ 成立。 □

基金项目

新疆自治区研究生创新项目(XJ2021G253)。

参考文献

[1] Cvetković, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs. Academic Press, New York.

[2] Cvetković, D. and Rowlinson, P. (1990) The Largest Eigenvalue of a Graph: A Survey. *Linear and Multilinear Algebra*, **28**, 3-33. https://doi.org/10.1080/03081089008818026

[3] Hong, Y. (1998) Upper Bounds of the Spectral Radius of Graphs in Terms of Genus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **74**, 153-159. https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1837

[4] Chang, A., Tian, F. and Yu, A.M. (2004) On the Index of Bicyclic Graphs with Perfect Matchings. *Discrete Mathematics*, **283**, 51-59. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.02.005

[5] Guo, S.G. (2005) The Spectral Radius of Unicyclic and Bicyclic Graphs with n Vertices and k Pendant Vertices. *Linear*

Algebra and Its Applications, **408**, 78-85. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.05.022

[6] Liu, J. and Zhang, Z. (2010) Spectral Radius of the Complement of Unicyclic Graphs. *Journal of East China Normal University* (*Natural Science*), **5**, 14-19.

[7] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1986) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.