Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1122-1134
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134117

Hans汉斯

二维Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov方程的规范解

王元舜

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

利用集中紧性原理、极大极小值方法和Gagliardo-Nirenberg不等式，研究了在L^2-次临界和L^2-临界的情况下，二维Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)方程的规范解的存在性和稳定性问题。首先通过限制$M(Q)=\frac{a^2}{2}$，证明能量泛函$H(Q)$极小值的存在性，然后证明其稳定性，最终证明了在L^2-次临界下泛函$S_a(Q)$可以取到最小值，从而证明存在基态解。本文所得到的结论，即证明BO-ZK方程解的存在性和稳定性，在物理学领域中有着广泛的应用。

关键词

BO-ZK方程，基态解，存在性，稳定性，集中紧性原理

Normalized Solitary Waves of the Two-Dimensional Generalized Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov Equation

Yuanshun Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

The existence and stability of the solution for normalized solitary waves of the two-dimensional

文章引用: 王元舜. 二维 Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov 方程的规范解[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1122-1134.
DOI: 10.12677/pm.2023.134117

generalized Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov Equation were studied by using concentration compactness principle, minimax theory and Gagliardo-Nirenberg in equality in the L^2-subcritical case and the L^2-critical case. Firstly, the existence of minimum to the energy functional under the condition of $M(Q)=\frac{a^2}{2}$, then the stability is verified. Thus, it is proved that the minimum value of functional $S_a(Q)$ can be obtained in the L^2-subcritical case and there exist ground state solutions. The conclusion of this article, that the existence and stability of the solution of BO-ZK equation, is widely applied in physics.

Keywords

BO-ZK Equation, Ground States, Existence, Stability, Concentration-Compactness Principle

1. 引言

因 Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)方程有一定的物理背景，研究它的规范解的存在性、稳定性和其它一些性质是一个具有物理意义的问题。

研究二维 Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)方程：

$$\begin{cases}\varphi_t-\mathcal{H}\varphi_{xx}+\varphi_{xyy}+\partial_x\left(\varphi^{p+1}\right)=0, & (x,y)\in R^2, t>0,\\ \varphi(x,y,0)=\varphi_0, & \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varphi=\varphi(x,y,t)$ 是波函数。$\mathcal{H}$ 表示 x-方向上的 Hilbert 变换，定义为

$$\mathcal{H}\varphi(x,y,t)=p.v.\frac{1}{\pi}\int_R\frac{\varphi(z,y,t)}{x-z}\mathrm{d}z,$$

可以得到

$$\iint_{R^2}\varphi\mathcal{H}\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left\|D_x^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2}^2 \tag{2}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\iint_{R^2}\varphi\mathcal{H}\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=C\iint_{R^2}\varphi\int_R\frac{\varphi_x(z,y,t)}{x-z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=C\iint_{R^2}\varphi\int_R\frac{\varphi(x,y,t)-\varphi(z,y,t)}{|x-z|^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=C\iint_{R^2}\varphi D_x\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=C\left\|D_x^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

$D_x^{\frac{1}{2}}$ 表示在 x-方向上的 $\frac{1}{2}$-阶导数算子，它由 Fourier 变换定义：$\widehat{D_x^{\frac{1}{2}}Q}(\xi,\eta)=|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{Q}(\xi,\eta)$，定义能量空间 $H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$，赋予范数

$$\|Q\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}:=\left\{\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\|\partial_y Q\|_{L^2}^2+\|Q\|_{L^2}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

已经有不少作者研究过类似的方程，例如 V. Georgiev 和 Y. Li 研究了二维质量临界半波方程的非分散解(见文献[1])，Y. Bahri 和 S. Ibrahim 研究了半波 Schrodinger 方程的孤立波解和 Cauchy 问题[2]，J. Bellazzini 和 V. Georgiev 等研究了在单空间维度上四次聚焦半波方程的行波解[3]，C. Alysson 和 P. Ademir 研究了在加权各向异性的 Sobolev 空间中离散的 BO-ZK 方程的守恒性[4]，Nascimento, A. C.研究了 BO-ZK 方程解的特殊正则性[5]。

事实上，在 Esfahani 等(2015) [6]的论文中，利用二维各向异性 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\|Q\|_{L^{p+2}}^{p+2}\le C\|Q\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^{p}\|\partial_y Q\|_{L^2}^{\frac{p}{2}},\quad Q=Q(x,y)\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$$

作者研究了 BO-ZK 方程(1)规范解的存在性，并证明了当 $0<p<4$ 时，当速度为 $\omega=1$ 时，方程(1)有形如 $\varphi(x,y,t)=Q(x-t,y)$ 的非平凡规范解。在 Esfahani 等(2017) [7]中，作者研究了各向异性的 Gagliardo-Nirenberg 不等式中最佳常数 C 满足的条件。假设 Q 在无穷远点递减，那么 Q 应当满足

$$Q^{p+1}-\mathcal{H}Q_x+Q_{yy}=\omega Q \tag{3}$$

这里所说的方程(1)的解，是指保持能量 H 和质量 M 守恒的解，

$$H(\varphi(t))=H(\varphi_0),\quad M(\varphi(t))=M(\varphi_0),\ \text{对所有的}\ t\in I_{\max} \tag{4}$$

其中 $I_{\max}$ 表示解存在的最大时间和

$$M(Q):=\frac{1}{2}\|Q\|_{L^2(R^2)}^2$$

$$H(Q):=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}Q_x(x,y)\overline{Q(x,y)}+|\partial_y Q(x,y)|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p+2}\iint_{R^2}|Q(x,y)|^{p+2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在 Jorge 等(2005) [8], Latorre 等(2006) [9]的论文中，方程(1)作为一个模型来描述在薄微导体电迁移介质上解的存在性。BO-ZK 方程(1)也可以被视为二维通用的 Benjamin-Ono (BO)方程：

$$\varphi_t-\mathcal{H}\varphi_{xx}+\partial_x\left(\varphi^{p+1}\right)=0,\quad x\in R,t>0 \tag{5}$$

在长型内部重力波中，方程(5)是深层次流体中的模型。

在 Esfahani and Pastor (2009) [10]，Esfahani *et al.* (2015) [6]中也证明了，当 $0<p<\frac{4}{3}$ 时有任意速度的孤立波是非线性稳定的；当 $\frac{4}{3}<p<4$ 时孤立波是非线性不稳定的。其中，稳定性的定义见定义 1。$p=\frac{4}{3}$ 是方程(3)的“临界值”。如果 φ 满足方程(1)有初始值 φ_0，那么

$$\varphi_\lambda(x,y,t)=\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y,\lambda^2 t\right)$$

满足方程(1)，且有初始值 $\varphi_\lambda(x,y,0)=\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi_0\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)$，对任意的 $\lambda>0$。如果 $\dot{H}^{s_1,s_2}:=\dot{H}^{s_1,s_2}\left(R^2\right)$ 表示齐次各向异性 Sobolev 空间，那么

$$\|\varphi_\lambda\|_{\dot{H}^{s_1,s_2}}=\lambda^{s_1+\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{p}-\frac{3}{4}}\|\varphi_0\|_{\dot{H}^{s_1,s_2}}$$

因此，L^2 是 BO-ZK 方程规模不变的 Sobolev 空间当且仅当 $p=\frac{4}{3}$。

根据 Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov 方程，方程(3)在静态问题上也出现(见[6] [11])。注意到如果定义变量 $S(Q)$ 为

$$\begin{aligned}S(Q)&:=H(Q)=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}Q_x\bar{Q}+\left|\partial_yQ\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p+2}\iint_{R^2}|Q|^{p+2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\partial_yQ\right\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+2}\|Q\|_{L^{p+2}}^{p+2}\end{aligned}\tag{6}$$

令 $S'(Q)=0$ 可以得到 $S(Q)$ 的极小值点 Q_0，那么 $Q_0\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 是方程(3)的解当且仅当 Q_0 是泛函 $S(Q)$ 的临界点(极小值点)。在这篇论文中，我们关注基态解的情况。所谓基态解就是极小化泛函 $S(Q)$ 的解，也就是方程(3)的非平凡解。本文研究基态解的存在性，得到以下定理。

定理 1： 当 $0<p<\frac{4}{3}$ 时，当 $0<a\le(4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$ 时，存在基态解 $Q_0\neq0$ 极小化以下约束极小化问题：

$$m_a=\inf\left\{S_a(Q)\,|\,Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}\right\}$$

其中

$$S_a(Q)=\left\{S(Q)\,|\iint_{R^2}|Q|^2=a^2\right\}$$

当 $p=\frac{4}{3}$ 时，当 $0<a<a^*$ 或 $a>a^*$ 时，不存在这样的基态解。

注记 1： 由 Esfahani 等[6]的结果，在 x-轴和 y-轴上方程(3)的基态解 Q 是对称的，即 $Q(x,y)=Q(-x,y)$，$Q(x,y)=Q(x,-y)$，对于所有的 $(x,y)\in R^2$。

第二部分给出一些预备知识和几个基本引理：1) 稳定性和轨道稳定性的定义；2) 在 L^2-次临界情况下，当 a 满足一定的条件时，能量泛函 $H(Q)$ 可以取到极小值，从而 $\Sigma(\mu)$ 非空并且是稳定的；3) 在 L^2-临界情况下，当 a 满足一定的条件时，$\Sigma(\mu)=\varnothing$；4) 给出了各向异性的 Gagliardo-Nirenberg 不等式。其中 $\Sigma(\mu)$ 的定义由(8)给出。

第三部分证明了在 L^2-次临界情况下，当 a 满足一定的条件时，$\Sigma(\mu)$ 是非空和稳定的。先证明能量泛函 $H(Q)$ 的下确界的有界性，利用集中紧性原理和 Gagliardo-Nirenberg 不等式排除解的消失性和二分性，从而得到解是列紧的，推出解的存在性，然后证明解的稳定性。

第四部分证明了在 L^2-临界情况下，当 a 满足一定的条件时，$\Sigma(\mu)=\varnothing$。通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式和极大极小值原理，证明了 a 在不同的取值范围中，能量泛函 $H(Q)$ 分别为取不到极小值和下无界，从而得到 $\Sigma(\mu)=\varnothing$。

最后，本文给出定理 1 的证明，在 L^2-次临界情况下，当 a 在限定取值范围内时，方程(3)的基态解存在并且是稳定的，从而方程(1)有归一化解；在 L^2-临界情况下，当 a 在限定取值范围内时，方程(3)不存在基态解。

本文研究了在 L^2-次临界和 L^2-临界情况下 BO-ZK 方程解的存在性和稳定性，给出了方程在什么条件下存在解、什么条件下解不存在以及解的稳定性。BO-ZK 方程在物理学领域有广泛的应用，读者可以在物理学上找到它的应用举例。

2. 预备知识和基本引理

稳定性的定义如下：

定义 1：1) 令 $\Sigma\subset H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$，称 Σ 是稳定的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得如果 $\varphi_0\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 满足 $\inf_{u\in\Sigma}\|\varphi_0-Q\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}<\delta$，那么在整个定义域上方程(1)的解 $\varphi(t)$ 存在，有初始条件 $\varphi|_{t=0}=\varphi_0$，且满足

$$\sup_{t\in R}\inf_{u\in\Sigma}\|\varphi(t)-Q\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}<\varepsilon$$

否则，Σ 是不稳定的。

2) 称 $T(\omega t)Q_\omega$ 是轨道稳定的，如果它的轨道

$$O_\omega=\left\{T(\theta)Q_\omega(\cdot+\tau_1,\cdot+\tau_2)\,|\,\theta\in R,(\tau_1,\tau_2)\in R^2\right\}$$

是稳定的。

首先，我们考虑 L^2-次临界情况 $0<p<\frac{4}{3}$。在这种情况下，使用 Cazenave 和 Lions [11]的方法，来证明一些包含了基态解的轨道的子集是稳定的。为了说明结果，这里引入一些记号。对每个 $\mu>0$，考虑以下极小化问题：

$$I(\mu):=\inf\left\{H(Q)\,|\,M(Q)=\mu\right\},\ \mu=\frac{a^2}{2}(a>0) \tag{7}$$

记 $\Sigma(\mu)$ 为极小化子组成的集合，即

$$\Sigma(\mu):=\left\{Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}\,|\,H(Q)=I(\mu),M(Q)=\mu\right\} \tag{8}$$

为研究 L^2-次临界和 L^2-临界情况下基态解的存在性问题，需要研究 $\Sigma(\mu)$ 是否非空及其稳定性。

定理 2：当 $0<p<\frac{4}{3}$ 时，那么对于任意的 $0<a\le(4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$，可得集合 $\Sigma(\mu)$ 非空并且是稳定的。

定理 3：当 $p=\frac{4}{3}$ 时，当 $0<a<a^*$ 或 $a>a^*$ 时，$\Sigma(\mu)=\varnothing$。

下面是各向异性的 Gagliardo-Nirenberg 不等式。

引理 1：(各向异性的 Gagliardo-Nirenberg 不等式)令 $0<p<4$，存在常数 C 使得

$$\|Q\|_{L^{p+2}}^{p+2}\le C\|Q\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^{p}\|\partial_yQ\|_{L^2}^{\frac{p}{2}} \tag{9}$$

对所有的$Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$。这里的最佳常数$C$有方程(3)的基态解给出，即

$$C^{-1}=\frac{4-p}{2(p+2)}\left(\frac{p}{4-p}\right)^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\|Q\|_{L^2}^{p} \tag{10}$$

(见[7]，定理 1.3)。

引理 2：(集中紧性原理)设$\{\mu_m\}_{m=1}^{+\infty}$是$R^n$上的测度序列，即$\mu_m\geq 0$，$\int_{R^n}\mathrm{d}\mu_m=1$。存在子列$\{\mu_m\}_{m=1}^{+\infty}$，仍然记为$\{\mu_m\}_{m=1}^{+\infty}$，使得以下三个条件之一成立：

1) (列紧性)存在序列$\{\mu_m\}_{m=1}^{+\infty}\subset R^n$，使得对于任意的$\varepsilon>0$存在半径$R>0$有以下性质：

$$\int_{B_R(x_m)}\mathrm{d}\mu_m\geq 1-\varepsilon \text{ 对于所有的 } m;$$

2) (消失性)对于所有的$R>0$，存在

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{x\in R^n}\int_{B_R(x)}\mathrm{d}\mu_m\right)=0;$$

3) (二分性)存在λ，$0<\lambda<1$，使得对于任意的$\varepsilon>0$存在$R>0$和序列$\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}\subset R^n$有以下性质：给定$R'>R$存在非负测度$\mu_m^1$，$\mu_m^2$使得

$$0\leq\mu_m^1+\mu_m^2\leq\mu_m,$$

使得$\mu_m^1\subset B_R(x_m)$，使得$\mu_m^2\subset R^n\setminus B_{R'}(x_m)$，

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\left|\lambda-\int_{R^n}\mathrm{d}\mu_m^1\right|+\left|(1-\lambda)-\int_{R^n}\mathrm{d}\mu_m^2\right|\right)\leq\varepsilon \text{。(见[12] [13])}$$

引理 3：设$1<q<\infty$，令$\{u_n\}$是$L^q(R^d)$上的有界序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u_\infty(x)\text{ 对几乎所有的 } x\in R^d$$

对于函数$u_\infty\in L^q(R^d)$。那么，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^d}\left\||u_n|^q-|u_n-u_\infty|^q-|u_\infty|^q\right|\mathrm{d}x=0 \quad \text{(见[14])}$$

3. 次临界的结果

在这部分，研究在($0<p<\frac{4}{3}$)次临界情况下方程(3)基态解的存在性和稳定性。用集中紧性原理来证明方程(3)解的存在性，为此要证明消失性和二分性的情形不成立，从而得到列紧性的情形成立。首先，证明能量泛函$H(Q)$的下确界$I(\mu)$是负的和有限的。

引理 4：对于任意的$0<p<\frac{4}{3}$，$0<a\leq(4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$，有$-\infty<I(\mu)<0$。

证明：首先，证明$I(\mu)<0$。令$Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$有$\|Q\|_{L^2}^2=a^2=2\mu$。考虑以下$L^2$-伸缩变换：

$$T_\lambda Q(x,y)=\lambda^{\frac{3}{4}}Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right),\ \lambda>0 \tag{11}$$

那么，可得$\|T_\lambda Q\|_2=\|Q\|_2$，

$$H\left(T_{\lambda}Q\right)=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}\left(T_{\lambda}Q\right)_x(x,y)\overline{T_{\lambda}Q(x,y)}+\left|\partial_y T_{\lambda}Q(x,y)\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p+2}\iint_{R^2}\left|T_{\lambda}Q(x,y)\right|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\lambda}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}\left(T_{\lambda}Q\right)_x\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\overline{T_{\lambda}Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)}+\left|\partial_y Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\right|^2\right)\mathrm{d}\lambda x\mathrm{d}\lambda^{\frac{1}{2}}y$$
$$-\frac{\lambda^{\frac{3p}{4}}}{p+2}\iint_{R^2}\left|Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\right|^{p+2}\mathrm{d}\lambda x\mathrm{d}\lambda^{\frac{1}{2}}y$$
$$=\frac{\lambda}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{\lambda^{\frac{3p}{4}}}{p+2}\left\|Q\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}$$

当 $0<p<\frac{4}{3}$ 时，$\frac{3p}{4}<1$。因此，令 $\lambda>0$ 充分小以致 $H\left(T_{\lambda}Q\right)<0$ 可得 $I(\mu)<0$。

接下来，证明 $I(\mu)>-\infty$。由 Gagliardo-Nrenberg 不等式(9)和 $M(Q)=\frac{a^2}{2}$，有

$$H(Q)=\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{1}{p+2}\left\|Q\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}$$
$$\geq\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{C}{p+2}\left\|Q\right\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^{p}\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^{\frac{p}{2}}$$
$$\geq\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{C}{p+2}\left(2M(Q)\right)^{\frac{4-p}{4}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{3p}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{C}{p+2}a^{\frac{4-p}{2}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{3p}{4}}$$

当 $0<p<\frac{4}{3}$ 时，$\frac{3p}{4}<1$，$\frac{4}{3}<\frac{4-p}{2}<2$。利用 Young 不等式，可得

$$H(Q)\geq\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{C}{p+2}a^{\frac{4-p}{2}}\left[\frac{1}{C_1}+\frac{3p}{4}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)\right]$$
$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{C}{p+2}a^{\frac{4-p}{2}}\frac{3p}{4}\right)\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^2\right)-C_1$$

当 $\frac{1}{2}-\frac{C}{p+2}a^{\frac{4-p}{2}}\frac{3p}{4}\geq 0$ 时，即当 $0<a\leq(4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$ 时，

$$H(Q)\geq -C_1 \tag{12}$$

其中 $C>0$ 是最佳常数由(10)给出，$C_1>0$ 是常数，这不依赖于 $Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$。可推出 $I(\mu)>-\infty$。证毕。

接下来，证明方程(3)的解满足列紧性，即消失性的情形不成立。

引理 5： 令 $\{Q_n\}\subset H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$，满足 $\sup_{n\in N}\left\|Q_n\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}<\infty$ 和 $\inf_{n\in N}\left\|Q_n\right\|_{L^{p+2}}>\delta_0\left(\delta_0>0\right)$。那么，存在子列 $\{Q_n\}$

(仍然记为$\{Q_n\}$)，序列$\{(x_n,y_n)\}\subset R^2$和$Q_\infty\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}\setminus\{0\}$使得在$H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$中，当$n\to\infty$时，$Q_n(\cdot+x_n,\cdot+y_n)\rightharpoonup Q_\infty$。

证明：根据 Holder 不等式，有

$$\delta_0<\|Q_n\|_{L^{p+2}}\le\|Q_n\|_{L^2}^{\theta}\|Q_n\|_{L^{\frac{10}{3}}}^{1-\theta}\lesssim\|Q_n\|_{L^{\frac{10}{3}}}^{1-\theta}$$

其中$\theta=\dfrac{4-3p}{2(p+2)}$，第二个不等式是由于$\iint_{R^2}|Q_n|^{p+2}\le\left(\iint_{R^2}|Q_n|^{p+2}\right)^{\frac{4-3p}{4}}\left(\iint_{R^2}|Q_n|^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{3p}{4}}$。因此，存在$\delta_1>0$，这不依赖于$n\in N$，使得对于所有的$n\in N$，有$\|Q_n\|_{L^{\frac{10}{3}}}>\delta_1$。

对于所有的$(k,m)\in Z^2$，令

$$S_{k,m}:=(k,k+1)\times(m,m+1)$$

那么，由 Gagliardo-Nirenberg 不等式(9)，有

$$\begin{aligned}\|Q_n\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q_{k,m})}^{\frac{10}{3}}&\le C\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q_n\right\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\|\partial_yQ_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{2}{3}}\\&\le C\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q_n\right\|_{L^2(Q_{k,m})}^{2}+\|\partial_yQ_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{2}\right)\end{aligned}$$

对$(m,n)\in Z^2$求和，有

$$\begin{aligned}\delta_1&<\|Q_n\|_{L^{\frac{10}{3}}(R^2)}^{\frac{10}{3}}\\&\le C\sum_{(m.n)\in Z^2}\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2(Q_{k,m})}^{2}+\|\partial_yQ\|_{L^2(Q_{k,m})}^{2}\right)\\&\le C\sup_{(k,m)\in Z^2}\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2(R^2)}^{2}+\|\partial_yQ\|_{L^2(R^2)}^{2}\right)\\&\le C\sup_{(k,m)\in Z^2}\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

因此存在$(k_n,m_n)\in Z^2$和$\delta_2>0$，使得$\delta_2\le\|Q_n\|_{L^2(Q_{k,m})}$。令$\widetilde{Q_n}(\cdot,\cdot)=Q_n(\cdot+k_n,\cdot+m_n)$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\widetilde{Q_n}\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}<\infty$，$\left\|\widetilde{Q_n}\right\|_{L^2(Q_{0,0})}\ge\delta_2$。因此，存在$\{Q_n\}$的子列(仍然记为$\{Q_n\}$)，$Q_\infty\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$在$H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$中满足$\widetilde{Q_n}\rightharpoonup Q_\infty\ (n\to\infty)$。而且，由 Rellich 定理(见[15])，有$\|Q_\infty\|_{L^2(Q_{0,0})}\ge\delta_2$，因此$Q_\infty\ne0$。

为了利用集中紧性原理来证明方程(3)解的存在性，下面证明二分性的情形不成立。

引理 6：令$0<p<\dfrac{4}{3}$，$a_i>0$ $(i=1,2)$使得$a_1^2+a_2^2=a^2$，那么$I(\mu)<I(\mu_1)+I(\mu_2)$，其中$\mu_i=M(Q_i)=\dfrac{1}{2}a_i^2$。

证明：令$a>0$和$\theta>1$，令$\{Q_n\}\subseteq S$是$I(\mu)$的极小化序列。那么

$$\begin{aligned} I(\theta\mu) &\le H\left(\sqrt{\theta}Q_n\right) = \frac{\theta}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}(Q_n)_x\overline{Q_n} + \left|\partial_y Q_n\right|^2\right) - \frac{\theta^{\frac{p+2}{2}}}{p+2}\iint_{R^2}\left|Q_n\right|^{p+2} \\ &< \frac{\theta}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}(Q_n)_x\overline{Q_n} + \left|\partial_y Q_n\right|^2\right) - \frac{\theta}{p+2}\iint_{R^2}\left|Q_n\right|^{p+2} \\ &\le \theta H(Q_n) \end{aligned}$$

因为$\theta > 1$，$p > 0$。所以$I(\theta\mu) < \theta I(\mu)$，等号成立当且仅当$\iint_{R^2}\left|Q_n\right|^{p+2} \to 0 (n \to \infty)$。但是这是不可能的，否则的话存在$0 > I(\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} H(Q_n) \ge \liminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}(Q_n)_x\overline{Q_n} + \left|\partial_y Q_n\right|^2\right) \ge 0$矛盾，其中第一个不等式由引理 4 得到。因此，有严格的不等式

$$I(\theta\mu) < \theta I(\mu) \tag{13}$$

接下来，证明$I(\mu) < I(\mu_1) + I(\mu_2)$。假设$\mu_1 \ge \mu_2$，分为两种情况。

情况 1：$\mu_1 > \mu_2$。在这种情况下，有

$$I(\mu) = I\left(\frac{\mu}{\mu_1}\mu_1\right) < \frac{\mu}{\mu_1}I(\mu_1) = I(\mu_1) + \frac{\mu - \mu_1}{\mu_1}I(\mu_1) = I(\mu_1) + \frac{\mu_2}{\mu_1}I\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\mu_2\right) < I(\mu_1) + I(\mu_2)$$

情况 2：$\mu_1 = \mu_2$。在这种情况下，有

$$I(\mu) = I(2\mu_1) < 2I(\mu_1) = I(\mu_1) + I(\mu_2).$$

然后证明方程(3)解的存在性。

引理 7： 假设$\{Q_n\} \subset H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} M(Q_n) = \frac{a^2}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} H(Q_n) = I(\mu)$。那么，存在$\{(x_n, y_n)\} \subset R^2$使得$\{Q_n(\cdot + x_n, \cdot + y_n)\}$在$H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$中是相对紧的。特别地，$\sum(\mu) \ne \varnothing$。

证明： 根据方程(12)，当$0 < a \le (4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$时，$\{Q_n\}$在$H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$中有界。因为$H(Q_n) < \frac{I(\mu)}{2} < 0$，$M(Q_n) = \mu = \frac{a^2}{2}$，这可推出

$$\frac{1}{2}I(\mu) \ge H(Q_n) \ge -\frac{1}{p+2}\left\|Q_n\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}$$

这可推出

$$\left\|Q_n\right\|_{L^{p+2}}^{p+2} > 0。$$

这和引理 5 推出存在$\{Q_n\}$的一个子列(仍然记为$\{Q_n\}$)，序列$\{(x_n, y_n)\} \subset R^2$，$Q_\infty \in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)} \setminus \{0\}$使得在$H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$中$Q_n(\cdot + x_n, \cdot + y_n) \rightharpoonup Q_\infty (n \to \infty)$。下证$M(Q_\infty) = \mu$。令$\widetilde{Q_n}(\cdot,\cdot) = Q_n(\cdot + x_n, \cdot + y_n)$。由弱下半连续性，有

$$M(Q_\infty) \le \liminf_{n\to\infty} M(Q_n) = \mu$$

相反，假设$M(Q_\infty) < \mu$。由弱收敛性，根据引理 3，有：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left\|\widetilde{Q_n}\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}^2 - \left\|\widetilde{Q_n} - Q_\infty\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}^2 - \left\|Q_\infty\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}^2\right\} = 0 \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{M\left(\widetilde{Q_n}\right)-M\left(\widetilde{Q_n}-Q_\infty\right)-M\left(Q_\infty\right)\right\}=0 \tag{15}$$

这可推出

$$\lim_{n\to\infty}\left\{H\left(\widetilde{Q_n}\right)-H\left(\widetilde{Q_n}-Q_\infty\right)-H\left(Q_\infty\right)\right\}=0 \tag{16}$$

令 $\nu_n=M\left(\widetilde{Q_n}-Q_\infty\right)$，$\mu_\infty=M\left(Q_\infty\right)$。因为序列 $\{\nu_n\}\subset R_{\geq 0}$ 有界，存在子列 $\{\nu_n\}$(仍然记为 $\{\nu_n\}$)，$\nu_\infty\geq 0$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\nu_\infty$。由(15)式，假设 $\mu_\infty<\mu$，推出 $\mu=\nu_\infty+\mu_\infty$ 和 $\nu_\infty>0$。由(16)式和引理 6 有 $\theta=\mu/\nu_n$，$\mu/\mu_\infty(>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\nu_\infty$，有

$$\begin{aligned}I(\mu)&\geq\lim_{n\to\infty}I(\nu_n)+I(\mu_\infty)\\&>\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n}{\mu}I(\mu)+\frac{\mu_\infty}{\mu}I(\mu)\\&=\frac{\nu_n}{\mu}I(\mu)+\frac{\mu_\infty}{\mu}I(\mu)=I(\mu)\end{aligned}$$

矛盾。因此，推出 $M\left(Q_\infty\right)=\mu$。

由 $I(\mu)$ 的定义，可得 $I(\mu)\leq H\left(Q_\infty\right)$。根据 $M\left(Q_\infty\right)=\mu$ 和(15)式，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}M\left(\widetilde{Q_n}-Q_\infty\right)=0$。这和 $\left\{\widetilde{Q_n}\right\}$ 在 $H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 中的有界性，可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\widetilde{Q_n}-Q_\infty\right\|_{L^{p+2}}=0$。进一步，由弱下半连续性得

$$H\left(Q_\infty\right)\leq\liminf_{n\to\infty}H\left(\widetilde{Q_n}\right)=I(\mu)$$

因此，得到 $H\left(Q_\infty\right)\in\Sigma(\mu)$。进一步，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}\widetilde{Q_n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_y\widetilde{Q_n}\right\|_{L^2}^2\right)&=\lim_{n\to\infty}\left\{H\left(\widetilde{Q_n}\right)+\frac{1}{p+2}\left\|\widetilde{Q_n}\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}\right\}\\&=H\left(Q_\infty\right)+\frac{1}{p+2}\left\|Q_\infty\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}\\&=\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q_\infty\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_yQ_\infty\right\|_{L^2}^2\right)\end{aligned}$$

这推出在 $H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 中 $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{Q_n}=Q_\infty$。证毕。

现在证明定理 2。

定理 2 的证明：由引理 7，可得 $\Sigma(\mu)\neq\varnothing$，即证明了解的存在性。下证 $\Sigma(\mu)$ 的稳定性。反证：假设 $\Sigma(\mu)$ 是不稳定的，下面推出矛盾。存在 $\varepsilon_0>0$，序列 $\{\varphi_{0,n}\}\subset H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$，$\{t_n\}\subset R$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\varphi\in\Sigma(\mu)}\left\|\varphi_{0,n}-Q\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}=0 \tag{17}$$

$$\inf_{\varphi\in\Sigma(\mu)}\left\|\varphi_n\left(t_n\right)-Q\right\|_{H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}}\geq\varepsilon_0 \tag{18}$$

其中 $\varphi_n(t)$ 是方程(1)的解，满足 $Q_n(0)=Q_{0,n}$。由方程(17)和守恒法则(4)，有

$$\lim_{n\to\infty}M\left(\varphi_n\left(t_n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}M\left(\varphi_{0,n}\right)=\mu \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} H\left(\varphi_n\left(t_n\right)\right)=\lim_{n\to\infty} H\left(\varphi_{0,n}\right)=I\left(\mu\right) \tag{20}$$

根据引理 6，存在 $\left\{\varphi_n\left(t_n\right)\right\}$ 的子列(仍然记为 $\left\{\varphi_n\left(t_n\right)\right\}$)，$\left\{\left(x_n,y_n\right)\right\}\subset R^2$，$\varphi_\infty\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(\cdot+x_n,\cdot+y_n,t_n\right)=\varphi_\infty \text{ 在 } H^{\left(\frac{1}{2},1\right)} \text{ 中。} \tag{21}$$

这可推出 $\varphi_\infty\in\sum\left(\mu\right)$，这与(18)式相矛盾。证毕。

4. 临界的结果

在这一部分，研究方程(3)在临界情况下解的存在性，即 $p=\dfrac{4}{3}$。

引理 8: 对于每个 $\mu=\dfrac{a^2}{2}>0$，存在 $a^*>0$，当 $0<a\le a^*$ 时，有 $I\left(\mu\right)=0$；当 $a>a^*$ 时，有 $I\left(\mu\right)\to-\infty$。

证明： 令 $Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$ 满足 $M\left(Q\right)=\mu$。考虑以下 L^2-拉伸变换：

$$T_\lambda Q\left(x,y\right)=\lambda^{\frac{3}{4}}Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right),\quad \lambda>0 \tag{22}$$

那么，得到 $\left\|T_\lambda Q\right\|_{L^2}=\left\|Q\right\|_{L^2}$，利用各向异性的 Gagliardo-Nirenberg 不等式(9)：

$$\left\|Q\right\|_{L^{p+2}}^{p+2}\le C\left\|Q\right\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^{p}\left\|\partial_y Q\right\|_{L^2}^{\frac{p}{2}},\quad Q=Q\left(x,y\right)\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}$$

其中 $0<p<4$。可得

$$\begin{aligned}
H\left(T_\lambda Q\right)&=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\left(\mathcal{H}T_\lambda Q\left(x,y\right)\overline{T_\lambda Q\left(x,y\right)}+\left|\partial_y T_\lambda Q\left(x,y\right)\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{3}{10}\iint_{R^2}\left|T_\lambda Q\left(x,y\right)\right|^{\frac{10}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda}{2}\iint_{R^2}\left(\left|D_x^{\frac{1}{2}}Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\right|^2+\left|\partial_y Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\right|^2\right)\mathrm{d}\lambda x\mathrm{d}\lambda^{\frac{1}{2}}y-\frac{3\lambda}{10}\iint_{R^2}\left|Q\left(\lambda x,\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)\right|^{\frac{10}{3}}\mathrm{d}\lambda x\mathrm{d}\lambda^{\frac{1}{2}}y\\
&=\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{3}{10}\left\|Q\right\|_{L^{\frac{10}{3}}}^{\frac{10}{3}}\right]\\
&\ge\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{3C}{10}\left\|Q\right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}\left\|Q_y\right\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\right]\\
&\ge\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)-\frac{3C}{10}\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}M\left(Q\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)\right]\\
&=\lambda\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{C}{5}2^{\frac{2}{3}}M\left(Q\right)^{\frac{2}{3}}\right]\\
&=\lambda\frac{1}{2}\left(\left\|D_x^{\frac{1}{2}}Q\right\|_{L^2}^2+\left\|Q_y\right\|_{L^2}^2\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{C}{5}2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]
\end{aligned} \tag{23}$$

当$\frac{1}{2}-\frac{C}{5}2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=0$时，可得$a^*=\left(\frac{5}{2C}\right)^{\frac{3}{4}}$。其中$C$是各项异性Gagliardo-Nirenberg不等式(9)中最佳常数由(10)给出。当$p=\frac{4}{3}$时，

1) 对于每个$0<a\le a^*$，由(23)，可得$H(T_\lambda Q)\ge 0$，$I(\mu)=\inf H(T_\lambda Q)\ge 0$，令$S_\mu=\left\{Q\in H^{\left(\frac{1}{2},1\right)}(R^2)\,|\,\mu=M(Q)=\frac{1}{2}\|Q\|_{L^2}^2\right\}$。令$Q_t(x,y)=tQ(tx,ty)$，$t>0$，那么$Q_t\in S_\mu$。当$t\to 0$时，有

$$I(\mu)\le H(Q_t)=\frac{t^2}{2}\iint_{R^2}\mathcal{H}Q_x(tx,ty)\overline{Q(tx,ty)}\,\mathrm{d}tx\mathrm{d}ty-\frac{t^p}{p+2}\iint_{R^2}|Q(tx,ty)|^{p+2}\,\mathrm{d}tx\mathrm{d}ty\to 0 \tag{24}$$

所以$I(\mu)\le 0$，已证$I(\mu)\ge 0$，因此$I(\mu)=0$。

2) 对于每个$a>a^*$，令$Q_t(x,y)=\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}$，$t>0$。因此，$Q_t\in S_a$。有

$$\begin{aligned}H(Q_t)&=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\mathcal{H}(Q_t)_x(x,y)\overline{Q_t(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p+2}\iint_{R^2}|Q_t(x,y)|^{p+2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\mathcal{H}\left(\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}\right)_x\overline{\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p+2}\iint_{R^2}\left|\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}\right|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}\overline{\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}}\,\mathrm{d}tx\mathrm{d}ty-\frac{t^p}{p+2}\iint_{R^2}\left|\frac{\mu tQ(tx,ty)}{\|Q\|_{L^2}}\right|^{p+2}\mathrm{d}tx\mathrm{d}ty\\&=\frac{1}{2}\iint_{R^2}\frac{\mu Q(x,y)}{\|Q\|_{L^2}}\overline{\frac{\mu Q(x,y)}{\|Q\|_{L^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{t^p}{p+2}\iint_{R^2}\left|\frac{\mu Q(x,y)}{\|Q\|_{L^2}}\right|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to-\infty\,(t\to+\infty)\end{aligned}\tag{25}$$

因此当$t\to+\infty$时$I(\mu)\to-\infty$。证毕。

下证定理3。

定理3的证明： 由引理8，1) 当$0<a\le a^*$时，$I(\mu)=0$。

而当$0<a<a^*$，$Q\ne 0$时，在(23)式中取$\lambda=1$，那么$H(Q)>0=I(\mu)$。所以当$M(Q)=\frac{a^2}{2}$时，$H(Q)$取不到最小值，即$\Sigma(\mu)=\varnothing$。

2) 当$a>a^*$时，$I(\mu)\to-\infty$，其中$\mu=M(Q)=\frac{a^2}{2}$。所以对$a>0$，$I(\mu)$是下无界的，即$\Sigma(\mu)=\varnothing$。证毕。

定理1的证明： 1) 由定理2，当$0<p<\frac{4}{3}$时，那么对于$0<a\le(4-p)^{\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{3p}{4}}2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{4-3p}}$，可得集合$\Sigma(\mu)$非空并且是稳定的，$S_a(Q)$可以取到最小值，那么方程(3)存在基态解，即方程(1)存在规范解。

2) 由定理3，当$p=\frac{4}{3}$时，当$0<a<a^*$或$a>a^*$时，$\Sigma(\mu)=\varnothing$，即$S_a(Q)$取不到极小值，那么方程(3)不存在基态解，即方程(1)没有规范解。证毕。

参考文献

[1] Georgiev, V. and Li, Y. (2022) Nondispersive Solutions to the Mass Critical Half-Wave Equation in Two Dimensions.

Communications in Partial Differential Equations, **47**, 39-88. https://arxiv.org/abs/2007.15370 https://doi.org/10.1080/03605302.2021.1950763

[2] Bahri, Y., Ibrahim, S. and Kikuchi, H. (2021) Remarks on Solitary Waves and Cauchy Problem for Half-Wave-Schrödinger Equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, **23**, Article ID: 2050058. https://doi.org/10.1142/S0219199720500583

[3] Bellazzini, J., Georgiev, V. and Visciglia, N. (2018) Traveling Waves for the Quartic Focusing Half-Wave Equation in One Space Dimension. https://arxiv.org/abs/1804.07075

[4] Cunha, A. and Pastor, A. (2021) Persistence Properties for the Dispersion Generalized BO-ZK Equation in Weighted Anisotropic Sobolev Spaces. *Journal of Differential Equations*, **274**, 1067-1114. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039620305957

[5] Nascimento, A.C. (2020) On Special Regularity Properties of Solutions of the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK) Equation. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **19**, 4285-4325. https://www.aimsciences.org/article/id/a3ee0fbc-851c-4a12-b8b7-16f8b244fbe6

[6] Esfahani, A., Pastor, A. and Bona, J. (2015) Stability and Decay Properties of Solitary-Wave Solutions to the Generalized BO-ZK Equation. *Advances in Differential Equations*, **20**, 801-834. https://doi.org/10.57262/ade/1435064514

[7] Esfahani, A. and Pastor, A. (2017) Sharp Constant of an Anisotropic Gagliardo-Nirenberg-Type Inequality and Applications. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, *New Series*, **48**, 171-185. https://doi.org/10.1007/s00574-016-0017-5

[8] Jorge, M.C., Cruz-Pacheco, G., Mier-y-Teran-Romero, L. and Smyth, N.F. (2005) Evolution of Two-Dimensional Lump Nanosolitons for the Zakharov-Kuznetsov and Electromigration Equations. *Chaos*, **15**, Article ID: 037104. https://doi.org/10.1063/1.1877892

[9] Latorre, J.C., Minzoni, A.A., Vargas, C.A. and Smyth, N.F. (2006) Evolution of Benjamin-Ono Solitons in the Presence of Weak Zakharov-Kutznetsov Lateral Dispersion. *Chaos*, **16**, Article ID: 043103. https://doi.org/10.1063/1.2355555

[10] Esfahani, A. and Pastor, A. (2009) Instability of Solitary Wave Solutions for the Generalized BO-ZK Equation. *Journal of Differential Equations*, **247**, 3181-3201. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609003659?via%3Dihub

[11] Cazenave, T. and Lions, P.-L. (1982) Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrodinger Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **85**, 549-561. https://doi.org/10.1007/BF01403504

[12] Lions, P.-L. (1985) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 1. *Revista Matemática Iberoamericana*, **1**, 145-201. https://doi.org/10.4171/RMI/6

[13] Lions, P.L. (1985) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2. *Revista Matemática Iberoamericana*, **1**, 45-121. https://doi.org/10.4171/RMI/12

[14] Brezis, H. and Lieb, E.H. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the AMS*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1983-0699419-3

[15] Park, Y.J. (2012) Fractional Rellich-Kondrachov Compactness Theorem. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, **25**, 527-529. https://www.researchgate.net/publication/284809920_FRACTIONAL_RELLICH-KONDRACHOV_COMPACTNESS_THEOREM