Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1125-1131
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127123

Hans汉斯

浅析二元函数的重极限与累次极限

贾瑞玲，孙铭娟，韩艺兵

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年5月26日；录用日期：2022年6月28日；发布日期：2022年7月5日

摘 要

二元函数的重极限是基于一元函数极限的框架搭建而成，而累次极限是基于降维法，将二元函数视为一元函数，依次对相应的变量求极限。这两种极限是同一函数的极限行为，但因其定义方式不同，导致这二者的关系错综复杂。本文首先剖析二元函数的重极限和累次极限的定义及其深层内涵；其次，在典型例题中，根据函数自身的结构特点，详细地讨论了重极限与累次极限的存在性问题，并给出二者的若干种关系。力图使学生深入理解这两种极限并掌握其计算方法，为后续内容的学习打下坚实基础。

关键词

重极限，累次极限，特殊路径，扰动法

Analysing the Double Limit and the Repeated Limit of Binary Function

Ruiling Jia, Mingjuan Sun, Yibing Han

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: May 26th, 2022; accepted: Jun. 28th, 2022; published: Jul. 5th, 2022

Abstract

The double limit of binary function is constructed based on the framework of the limit of unary function. By reducing the dimension, we consider binary function as a unary function and calculate the limit of the corresponding variables in turn. The two kinds of limits are the limiting behavior of the same function, but they are defined in different ways, which makes their relationship complicated. In this paper, firstly the definition and connotation of the double limit and the repeated limit of binary function are analyzed. Secondly, according to the structural characteristics of the function, the existence of the two kinds of limits is discussed in detail, and some relations between them are given. It helps students understand the two kinds of limits in depth and master

文章引用：贾瑞玲，孙铭娟，韩艺兵. 浅析二元函数的重极限与累次极限[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1125-1131.
DOI: 10.12677/pm.2022.127123

their calculation, which lays a solid foundation for the follow-up study.

Keywords

The Double Limit, The Repeated Limit, Special Path, Perturbation Method

1. 引言

极限是数学分析的重要内容之一，也是微分学的基石和根基。它在数学分析中的地位和作用是不可替代的。二元函数的极限是基于一元函数极限的框架结构搭建而成，因为空间维数发生了变化，要根据研究对象的共性和特性对极限理论进行平行推广和延伸发展。这也决定了二元函数的极限与一元函数的极限既紧密联系又有本质差别。所以二元函数极限的定义、判断及其求解引起了学者的关注。

早在 1991 年，卫贯一[1]探讨了二元函数重极限的求解问题。因现行教材关于二元函数重极限的定义不完全相同，故徐永汉[2]专门剖析了若干不同版本的重极限的定义。慢慢地，这些问题受到更多学者的偏爱和重视。王旭琴[3]分析了二元函数的二重极限与累次极限的定义，并辨析了这两种极限之间的区别和联系。何鹏光[4]根据函数的结构特征，基于二重极限的定义、运算法则和坐标变换，探讨了二重极限不存在的判定方法。闫红霞[5]阐述了一类常见的二元有理分式函数极限不存在的一种证明方法。刘颖和陈逸藻[6]研究了底数和指数都是二元多项式函数的二重极限的存在性。王成强[7]针对与二重极限有关的几类常见问题，提出相应的求解策略。张文丽[8]研究了对于分母是两项和的二元有理函数其重极限不存在的路径选取方法。以上这些学者侧重对重极限的某一问题进行深入挖掘和解析，并取得了相应的研究成果。

事实上二元函数重极限的判断是数学分析教学中的一个难点，这是因为在判断 $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$ 是否存在时，要根据所给函数的结构形式，选择合适的方法。其中特殊路径法是最基本、最实用的方法，即寻找 $M\to M_0$ 的某种特殊方式，使得 $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$ 不存在；或者寻找 $M\to M_0$ 的两种特殊方式，使得 $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$ 存在但二者不相等。其次是利用累次极限与重极限的关系进行判断。然而函数的形式千变万化，故绝大多数情况下确定 $M\to M_0$ 的合适路径具有一定的难度。这困扰了无数多的初学者，那么如何准确快速地确定 $M\to M_0$ 的路径呢？鉴于此，结合前人的研究成果，本文从初学者角度出发，首先剖析重极限和累次极限的概念，只有深刻理解极限定义的内涵才能掌握求极限的方法；其次，通过典型例题的分析，展示如何快速选择合适的方法判断重极限的不存在以及其存在时的求解方法，并给出这两种极限的若干种关系。

本文安排如下：第二部分给出重极限和累次极限的定义以及不同视角下的理解方式。第三部分是本文的核心，针对不同结构特点的函数，细致地分析其重极限和累次极限的存在性问题及其二者的关系。同时提供部分题目供读者练习，以便其更好地理解和掌握二元函数的重极限和累次极限。第四部分对本文内容进行总结和概括。

2. 准备知识

定义 1 设 D 是 R^2 上的开集，$M_0(x_0,y_0)\in D$ 为一定点，$f(x,y)$ 是定义在 $D\setminus\{M_0\}$ 上的二元函数，A

是一个实数。如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$M(x,y) \in \mathring{U}(M_0,\delta)$时，成立$\left|f(x,y) - A\right| < \varepsilon$。则称当$M \to M_0$时，函数$f(x,y)$收敛，并称$A$为$f(x,y)$当$M \to M_0$时的极限，或者$f(x,y)$在点$M_0$的极限为$A$。记为$\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y) = A$。

注 1 如何理解$M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$？

$M \to M_0$表示M以任意方式(沿直线，曲线等所有方式)趋于M_0，即x、y同时以任意方式趋于x_0、y_0时，$f(M)$都无限接近于A。

注 2 二元函数极限的书写形式：

在R^2中，点列$M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$等价于$x \to x_0$，$y \to y_0$，故$\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y) = A$可写成$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$这种形式。从这个角度来看，二元函数$f(x,y)$在点$M_0$的极限为$A$，也称$f(x,y)$在点$M_0$的二重极限为$A$。

注 3 如何判断二元函数的重极限不存在呢？

分析 根据二元函数极限的定义，若$\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y)$存在，则要求$M$以任意方式趋于$M_0$时，$f(M)$的极限都存在且相等。故若$M$以某种特殊方式(如沿着一条直线或曲线)趋于$M_0$时，$f(M)$的极限不存；或者$M$沿两条不同曲线趋于$M_0$时，$f(M)$的极限值存在，但二者不等，则当$M \to M_0$时，$f(M)$的极限不存在。

定义 2 设D是R^2上的开集，$M_0(x_0,y_0) \in D$为一定点，$f(x,y)$是定义在$D \setminus \{M_0\}$上的二元函数，如果对于每个固定的$y \neq y_0$，极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$存在，且极限$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$存在，则称此极限值为函数$f(x,y)$在点$M_0$的先对$x$后对$y$的累次极限(二次极限)；同理可定义先对$y$后对$x$的累次极限(二次极限)$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$。

注 4 累次极限是指两个自变量x、y以一定的先后顺序相继趋于x_0、y_0时，函数$f(x,y)$的极限。先对y后对x的累次极限为$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{\left\{\substack{y \to y_0 \\ \text{固定 } x \\ \text{且 } x \neq x_0}\right.} f(x,y)$；先对$x$后对$y$的累次极限为$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{\left\{\substack{x \to x_0 \\ \text{固定 } y \\ \text{且 } y \neq y_0}\right.} f(x,y)$。

重极限和累次极限有关系吗？这两种极限是同一个函数的极限行为，理论上二者应该有关系。事实上，二者确实有关系。

定理 设$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ (A有限或无限)，$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$存在，则

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

分析 因$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$存在，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$存在。记$\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$，则要证

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

即证$\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = A$。利用一元函数极限的定义，即证：对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < \left|y - y_0\right| < \delta$时，成立$\left|\varphi(y) - A\right| < \varepsilon$。

证明 以A为有限的情形来证。

由$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A$得，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$\left|x - x_0\right| < \delta$，$\left|y - y_0\right| < \delta$，且$(x,y) \neq (x_0,y_0)$时，恒有

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon\,, \tag{*}$$

现对任意满足 $0<\left|y-y_0\right|<\delta$ 的 y，在(*)中令 $x\to x_0$，即得

$$\left|\varphi(y)-A\right|\le\varepsilon\,. \qquad (*)_1$$

结合一元函数极限的定义可得，$(*)_1$ 式成立意味着 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ 成立，故结论成立。

推论 1) 若函数 $f(x,y)$ 在点 M_0 的两个累次极限都存在，且该点的重极限也存在，则三者必相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$。

2) 若函数 $f(x,y)$ 在点 M_0 的两个累次极限存在但不等，则函数在该点的重极限不存在。

以上内容可参考[9] [10] [11]，这里不再详述。

3. 实例分析

例 判断下列函数在原点的重极限与累次极限。

1) $\dfrac{\left(y^2-x\right)^2}{x^2+y^4}$；2) $x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}$；3) $x\cos\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x+y}{x^2+y}$；

4) $\dfrac{xy}{x+y}$；5) $\dfrac{xy+y}{x^4+xy^2+y}$；6) $\dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

7) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}+x\cos\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$；8) $x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$。

解析 1) 观察分子 y^2-x 和分母 x^2+y^4 中：x 和 y 的次数关系，选择特殊路径曲线 $y^2=kx$，当 x 沿曲线 $y^2=kx$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y^2=kx}}\dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(k-1)^2x^2}{(k^2+1)x^2}=\dfrac{(k-1)^2}{k^2+1}$，该极限值随着 k 的不同而变化，这说明函数在点 $(0,0)$ 的重极限不存在。

另外，可计算该函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限分别为

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{\left(y^2-x\right)^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{\left(y^2-x\right)^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0}\frac{y^4}{y^4}=1,$$

函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限存在且相等，但函数在该点的重极限却不存在。

2) 固定 $x\ne0$，令 $y\to0$，则 $\lim\limits_{y\to0}x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在。

固定 $y\ne0$，令 $x\to0$，则 $\lim\limits_{x\to0}x\ln(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to0}x\ln\dfrac{x^2}{2}=0$，因 $\sin\dfrac{1}{y}$ 是有界量，故

$\lim\limits_{x\to0}x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}=0$，从而 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}=0$。

又 $\left|x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}\right|\le\left|x\ln(1-\cos x)\right|$，因 $\lim\limits_{x\to0}x\ln(1-\cos x)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\ln(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{y}=0$。可知函数在点 $(0,0)$ 的先对 x 后对 y 的累次极限存在且重极限也存在，先对 y 后对 x 的累次极限却不存在。

3) 固定 $x\ne0$，当 $y\to0$ 时，$\lim\limits_{y\to0}x\cos\dfrac{1}{xy}$ 不存在，$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x+y}{x^2+y}=\dfrac{1}{x}$，故 $\lim\limits_{y\to0}\left(x\cos\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x+y}{x^2+y}\right)$ 不存在，

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\cos\frac{1}{xy}+\frac{x+y}{x^2+y}\right)$ 不存在。

固定 $y\neq 0$，令 $x\to 0$，因 $\cos\frac{1}{xy}$ 是有界量，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{xy}+\frac{x+y}{x^2+y}\right)=0+\frac{y}{y}=1$。从而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{xy}+\frac{x+y}{x^2+y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}1=1$。

另外，当 x 沿曲线 $y=kx$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\left(x\cos\frac{1}{xy}+\frac{x+y}{x^2+y}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{(k+1)x}{x^2+kx}=\frac{k+1}{k}$。极限值随 k 的变化而不同，故函数在点 $(0,0)$ 的重极限不存在。

4) 从形式上看，分子是二次项，分母是一次项，当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，分子趋于 0 的速度更快，从阶的分析来看，应该有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=0$；但事实上并非如此。

特殊路径法：当 x 沿曲线 $y=kx$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{(k+1)x}=0$；当 x 沿曲线 $y=k\sqrt{x}$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=k\sqrt{x}}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^{\frac{3}{2}}}{\left(k+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{\left(k+\sqrt{x}\right)}=0$；函数沿两条不同的曲线趋于 0 时，函数的极限值存在且相等，但无法判断函数在该点的重极限是否存在。

扰动法：令 $x+y=x^k$，则 $y=x^k-x$；即当 x 沿曲线 $y=x^k-x\,(k>0)$ 趋于 0 时，

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^k-x}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(x^k-x\right)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-x^{2-k}\right)=\begin{cases}0, & 0<k<2\\ -1, & k=2\\ \infty, & k>2\end{cases};$$

该极限值随着 k 的不同而变化，这说明函数在点 $(0,0)$ 的重极限不存在。

另外，计算得 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{y\to 0}0=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$。函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限存在且相等。

5) 观察分子和分母的特点，不易选出合适的特殊路径，此时不妨计算函数在该点的两个累次极限，

$$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy+y}{x^4+xy^2+y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0,\quad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy+y}{x^4+xy^2+y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{y}=1,$$

函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限存在但不等，则函数在该点的重极限不存在。

6) 首先计算累次极限，则有 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{y^2}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{x^2}}=0$。其次计算重极限，因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，且 $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy}=1$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。可知函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限和重极限都存在且相等。

7) 从形式上看，$\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的分子是二次项，分母是二次项，可选特殊路径 $y=kx$，当 x 沿曲线 $y=kx$

趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}+x\cos\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx^2}{\left(k^2+1\right)x^2}=\frac{k}{k^2+1}$；该极限值随着 k 的不同而变化，这说明函数在点 $(0,0)$ 的重极限不存在。类似(3)的分析，知 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}+x\cos\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x}\right)$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}+x\cos\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x}\right)$ 都不存在。

8) 首先，易知 $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|\to0\left(x\to0,y\to0\right)$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$。

另外，当 $y\to0$ 时，$\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，故 $\lim\limits_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在，同理 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在。即函数在点 $(0,0)$ 的两个累次极限均不存在，但在该点的重极限却存在。

注 5 结合上述几个例子可知，

i) 二元函数的重极限与累次极限存在着一定的关系，但其关系较复杂

关系 1 两个累次极限存在但不相等，此时重极限一定不存在。如例题中的 5)。

关系 2 两个累次极限存在且相等，但重极限仍可能不存在。如例题中的 1)、4)。

关系 3 两个累次极限都不存在，但重极限仍可能存在。如例题中的 8)。

关系 4 一个累次极限和重极限存在，但另一个累次极限不存在。如例题中的 2)。

关系 5 一个累次极限存在，但另一个累次极限和重极限都不存在。如例题中的 3)。

关系 6 两个累次极限与重极限都存在且一定相等。如例题中的 6)。

关系 7 两个累次极限与重极限都不存在。如例题中的 7)。

ii) 总结判断二元函数重极限不存在的方法

a) 基于函数的结构特点，取特殊路径法或扰动法；

b) 函数 $f(x,y)$ 在点 M_0 的两个累次极限存在但不等，则函数在该点的重极限不存在。

事实上在判断函数的重极限与累次极限时，其方法非常灵活，不能一味地使用某种方法，而要结合函数的结构特点，站在一定的高度，运用所学知识，综合分析。请读者根据上述讨论和分析完成下列题目，以加强对这部分内容的理解和掌握。

判断下列函数在原点的重极限与累次极限。

1) $\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$；2) $\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2+y^2}$；3) $\frac{xy}{2x-y}$；4) $\frac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2}$；

5) $\frac{x^2y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$；6) $\frac{xy(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$；7) $\frac{x^2+y}{x^2+x(y+x)+y}$；8) $\frac{x^2-y}{x+y}$。

4. 结束语

本文深入分析了二元函数重极限和累次极限的定义并介绍它们之间的联系；然后，通过典型例题的讨论和解析，详细地展示了二元函数重极限不存在的判断方法及其存在时的求解方法，旨在帮助学生对二元函数的重极限与累次极限有更深的理解和领会。事实上，因二元函数的特殊性及可代表性，弄清楚这两种极限之间的关系，对研究多元函数的连续性、可微性、可积性都有很大的帮助。

参考文献

[1] 卫贯一. 关于二元函数重极限的求解问题[J]. 工科数学, 1991(4): 95-97.

[2] 徐永汉. 关于二元函数极限的各种定义的剖析[J]. 工科数学, 1993(4): 173-177.

[3] 王旭琴. 二重极限与累次极限的关系[J]. 南昌高专学报, 2010, 25(2): 157-158.

[4] 何鹏光. 二重极限不存在判定法探讨[J]. 数学学习与研究, 2018(11): 2, 4.

[5] 闫红霞. 二重极限不存在的一种证明方法[J]. 高等数学研究, 2011, 14(2): 27-28.

[6] 刘颖, 陈逸藻. 一类幂指函数的二重极限的存在性[J]. 高等数学研究, 2019, 22(2): 11-13.

[7] 王成强. 二重极限有关的常见问题及适用求解策略[J]. 高师理科学刊, 2019, 39(9): 69-74.

[8] 张文丽. 探究重极限不存在路径函数的选取方法[J]. 高等数学研究, 2021, 24(2): 69-71.

[9] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第三册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[10] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[11] 欧阳光中, 朱学炎, 等. 数学分析(下册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.