Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 919-927
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126101

重积分在某些极限问题和定积分问题中的应用

贾瑞玲，韩艺兵，孙铭娟

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年4月30日；录用日期：2022年6月2日；发布日期：2022年6月9日

摘 要

重积分是数学分析的重要组成部分，它与定积分类似，也是某种特定形式的和的极限。它在几何、物理、工程学等多个学科都有广泛的应用，并起着至关重要的作用。对这部分内容，现有的教材侧重讲解如何将重积分化为累次积分来计算，较少涉及如何将两个定积分的乘积转化为重积分。本文着重介绍两方面内容：一是极限与重积分结合的计算问题；二是某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题。尽管这些问题在平常的教学过程中不常见，但却备受竞赛和考研这两大群体的青睐，其重要性毋庸置疑。这两部分内容要求学生综合运用所学知识分析问题、解决问题，这有助于培养他们的能力素质和数学认知结构，对学生具有一定的挑战性。

关键词

重积分，累次积分，变上限积分函数，积分换序，球坐标系，柱坐标系

Application of Multiple Integral in Some Limit Problems and Definite Integral Problems

Ruiling Jia, Yibing Han, Mingjuan Sun

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Apr. 30th, 2022; accepted: Jun. 2nd, 2022; published: Jun. 9th, 2022

Abstract

Multiple integral is an important part of mathematical analysis. Similar to definite integral, it is also the limit of sum with a specific form. It is widely used in geometry, physics, engineering and

文章引用：贾瑞玲，韩艺兵，孙铭娟．重积分在某些极限问题和定积分问题中的应用[J]．理论数学，2022，12(6): 919-927. DOI: 10.12677/pm.2022.126101

other disciplines, and it plays a vital role. For this part, the current materials focus on how to convert multiple integral into iterated integral, and less on how to convert the product of two definite integrals into double integral. There are two aspects in this paper: one is the calculation problem of the combination of limit and multiple integral; the second is the transformation from definite integral with some special structures to multiple integral. Although these problems are not common in the ordinary teaching process, they are favored by the two groups of competition and postgraduate entrance examination, and there is no doubt about their importance. The two aspects require students to comprehensively use their knowledge, analyze problems and solve problems, which is helpful to cultivate their ability and mathematical cognitive structure. It is challenging for students.

Keywords

Multiple Integral, Iterated Integral, Variable Upper Bound Integral Function, Exchanging the Order of Integration, Spherical Coordinates, Cylindrical Coordinates

1. 引言

数学分析是用极限思想来研究函数的一门学科。极限理论的确立，意味着整个微积分乃至数学分析的理论基础已经牢固，其重要性不言而喻。

在数学分析课程中，我们先后学习了一元函数的极限、定积分、重积分等内容。重积分是数学分析的重点和难点内容，它在线面积分的学习中起着非常重要的作用。在教学实践中，多数老师都会重点讲解如何将重积分化为累次积分(二次积分)来计算，因此它的计算问题一直备受学者的关注。陈楚申和廖小莲[1]着重讨论了对称性在二重积分计算中的应用，并借助实例分若干情况进行讨论。彭东海和张留伟[2]研究了二重积分交换积分次序的方法在相关积分计算和不等式证明中的应用。张应奇[3]探讨了二重积分的计算方法和技巧。朱永婷、黄冶文等诸多学者也讨论了类似问题[4] [5] [6] [7]。渐渐地，少数学者开始聚焦于如何将两个定积分的乘积转化为重积分。如冯伟杰、王金金等[8] [9] [10] [11]结合重积分与定积分的关系，侧重研究用二重积分证明定积分不等式的问题。吴耀强[12]研究了如何将高维定积分转化为二重积分求解。这些研究结果充分显示了重积分在解决某些定积分问题时所具有的优越性和技巧性。其实巧用重积分还可解决与求极限相关的部分问题。

对于一元函数极限，大多数老师都侧重讲解如何计算 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 或者证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=B$ 等类型的极限，这里的 $f(x)$、$g(x)$ 一般有具体的表达式或抽象形式的函数。对于 $f(x)$ 是以重积分形式所给出的函数，如何计算其极限呢？这是本文的研究内容之一。其次，在前人研究的基础上，本文将系统的研究某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题。尽管这些问题在平常的教学过程中不常见，但却备受全国大学生数学竞赛和数学分析考研这两大群体的追捧，其重要性显而易见。这两部分内容是一项富有挑战性和技巧性的研究课题。通过这部分内容的研究和学习，有利于激发学生的探索精神、创新意识及创新能力，使他们更加灵活和主动。同时这也要求教师在教学中要以系统的观点、联

系的观点、整体的观点实施教学，这亦是一个隐性的思政教育的传播渠道，使思政教育更有力度。

本文安排如下：第二部分给出二重积分和三重积分在不同坐标系下的计算公式，为后面内容做好铺垫。第三部分是本文的核心，主要介绍极限与重积分结合的计算问题和某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题。第四部分提供部分题目供读者练习，以便其更好地理解和掌握重积分在这些问题中的应用。第五部分对全文内容进行总结和概括。

2. 准备知识

2.1. 二重积分的计算

定理 1 (直角坐标系)

1) (X-型区域)设积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle| a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$， $f\in C(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

这是把二重积分化为先对 y、后对 x 的累次积分的公式。

2) (Y-型区域)设积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle| c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\right\}$， $f\in C(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

这是把二重积分化为先对 x、后对 y 的累次积分的公式。

定理 2 (极坐标系)

1) (θ-型区域)设积分区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle| \theta_1\le\theta\le\theta_2, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\right\}$， $f\in C(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r \text{。}$$

2) (r-型区域)设积分区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle| r_1\le r\le r_2, \theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r)\right\}$， $f\in C(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta \text{。}$$

2.2. 三重积分的计算

定理 3 (直角坐标系)

1) (投影法，先一后二，xy-型)设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D_{xy}, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\right\}$， $f\in C(\Omega)$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

至于先一后二的 yz-型、xz-型读者可自行补充。

2) (截面法，先二后一，z-型)设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| e\le z\le h, (x,y)\in\sigma_z\right\}$， $f\in C(\Omega)$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_e^h\mathrm{d}z\iint_{\sigma_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

至于先二后一的 x-型、y-型读者可自行补充。

定理 4 (柱坐标系)

设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点，点 M 在 xoy 面上的投影 p 的极坐标为 r， θ，则这三个数 r， θ，z 称为点 M 的柱面坐标，易知点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$。

1) (基于直角坐标系下投影法中的先一后二的 xy-型)

设 $\Omega=\left\{(r,\theta,z)\middle|(r,\theta)\in D_{r,\theta}, z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta)\right\}$， $f\in C(\Omega)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{r,\theta}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\mathrm{d}z\text{。}$$

2) (基于直角坐标系下截面法中的先二后一的 z-型)

设 $\Omega=\left\{(r,\theta,z)\middle|e\le z\le h,(r,\theta)\in\sigma_{r,\theta}\right\}$， $f\in C(\Omega)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_e^h\mathrm{d}z\iint_{\sigma_{r,\theta}} f(r\sin\theta, r\cos\theta, z)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\text{。}$$

定理 5 (球坐标系)

设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点，点 M 在 xoy 面上的投影为 p。ρ 为原点 O 与点 M 之间的距离，φ 为有向线段 $\overline{OM}$ 与 z 轴正向的夹角，θ 为从 z 轴正向来看，x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overline{Op}$ 的角。则这三个数 ρ，φ，θ 称为点 M 的球面坐标；易知点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为 $\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$。

设 $\Omega=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\middle|\theta_1\le\theta\le\theta_2,\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\rho_1(\varphi,\theta)\le\rho\le\rho_2(\varphi,\theta)\right\}$， $f\in C(\Omega)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\text{。}$$

定理 1-定理 3 可参考[13] [14]，定理 4、定理 5 可参考[14] [15]。

3. 实例分析

3.1. 极限与重积分结合的计算问题

这部分内容涉及到的知识面较多，主要包括变上限积分函数的求导、重积分在柱面坐标系下和球面坐标系下的计算、导数的定义、洛必达法则等。

例 1 (2014 年第五届全国大学生数学(非数学专业)竞赛决赛第五题)设 $f(x)$ 连续可导，有向曲面 Σ 是圆柱体 $x^2+y^2\le t^2(t\ge0)$， $0\le z\le1$ 的表面，方向朝外，记 $P=Q=R=f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$，第二型曲面积分 $I(t)=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{I(t)}{t^4}$。

分析 题型为求一元函数的极限。因 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{I(t)}{t^4}$ 属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，要求该极限，需求 $I'(t)$，为此先求 $I(t)$。如何求 $I(t)$ 呢？注意到 $I(t)$ 是以第二型曲面积分的形式所给出的函数，Σ 是封闭曲面，由此联想到 Gauss 公式。

解 记 Ω 是由 $x^2+y^2\le t^2(t\ge0)$ 和 $0\le z\le1$ 所围成的几何体，且 P，Q，R，满足 Gauss 公式的条件，则

$$I(t)=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\left(2xz+2yz+x^2+y^2\right)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)\mathrm{d}V,$$

利用对称性，奇偶性，有 $\iiint_{\Omega}(2xz+2yz)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)\mathrm{d}V=0$，故

$$I(t)=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)\mathrm{d}V,$$

因被积函数中含有 x^2+y^2 形式，故使用柱面坐标变换，令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，其中 $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le t \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$，则

$$I(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^1 r^3 f'(r^2z)\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t\left[\int_0^1 r^3 f'(r^2z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r,$$

令 $g(r)=\int_0^1 r^3 f'(r^2z)\mathrm{d}z$，则 $I(t)=2\pi\int_0^t g(r)\mathrm{d}r$，利用变上限积分函数的求导法则，得

$$I'(t)=2\pi g(t)=2\pi\int_0^1 t^3 f'(t^2z)\mathrm{d}z,$$

从而

$$\lim_{t\to0^+}\frac{I(t)}{t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{I'(t)}{4t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1 t^3 f'(t^2z)\mathrm{d}z}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^1\mathrm{d}\left(f(t^2z)\right)}{t^2}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\frac{\pi}{2}f'(0)。$$

例 2 (中山大学，数学分析考研题)设 $f(x)$ 连续，记 $F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求 $F'(t)$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le t^2,t\ge0\right\}$。

分析 题型为求一元函数的导数。要求 $F'(t)$，需确定 $F(t)$，而 $F(t)$ 是以三重积分的形式所给定的函数，且被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 形式，故可使用球坐标变换求出 $F(t)$，再计算 $F'(t)$。

解 利用球坐标变换，令 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$，则 $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\rho\le t \end{cases}$，从而

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho^2)\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=4\pi\int_0^t\rho^2 f(\rho^2)\mathrm{d}\rho,$$

利用变上限积分函数的求导法则，得 $F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$。

例 3 设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，记 $F(t)=\iiint_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}V$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le t^2,t\ge0\right\}$。

分析 题型为求一元函数的极限。$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}$ 属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，需要求 $F'(t)$，为此先求 $F(t)$。注意到 $F(t)$ 是以三重积分的形式所给出的函数，Ω 是以原点为圆心，t 为半径的球体，被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 形式，由此想到利用球面坐标变换对 $F(t)$ 进行化简。

解 利用球面坐标变换，令 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$，则 $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\rho\le t \end{cases}$，从而

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=4\pi\int_0^t\rho^2 f(\rho)\mathrm{d}\rho,$$

利用变上限积分函数的求导，得 $F'(t)=4\pi t^2 f(t)$，故

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{4\pi t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{4\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)。$$

注 1 这种做法 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F'(t)}{4\pi t^3}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{4\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f'(t)}{1}=f'(0)$ 是错误的。原因为：

1)根据题目，无法确定 $f(x)$ 在 $x\ne0$ 处是否可导；2) 无法确定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

注 2 例 1~例 3 表明，在极限与重积分结合的计算问题中，先根据被积函数和积分区域的特点，选择合适的坐标变换，将重积分化为累次积分，进而确定函数的表达式，然后再求极限。

3.2. 某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题

重积分的计算是将其化为累次积分来计算，这是毋庸置疑的。反之，两个定积分的乘积也可转化为重积分，以使问题简化。尤其对于积分不等式的证明，该方法的优越性更为突出。这部分内容涉及到：重积分与定积分的相互转化、重积分的积分换序问题、重积分的性质(保序性、中值定理、轮换对称性)、函数的单调性等。

例 4 (2016 年第七届全国大学生数学(非数学专业)竞赛决赛第三题)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$。

分析 题型为积分等式的证明。因为两个定积分的乘积可转化为重积分，且积分变量与积分符号无关，则

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=[a,b]\times[a,b]$，$D_1=\{(x,y)|a\le x\le b, x\le y\le b\}$。

记 $D_2=\{(x,y)|a\le x\le b, a\le y\le x\}$，且 $D=D_1+D_2$。注意到 D_1 和 D_2 关于 $y=x$ 对称，将 x 和 y 互换，得 $\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，从而结论成立。

证明 记 $D=[a,b]\times[a,b]=D_1+D_2$，$D_1$，$D_2$ 如上，则

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=2\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1+D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即 $2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$。

注 3 本题也可利用牛顿－莱布尼茨公式，结合变上限积分函数的求导和分部积分，进行证明。

因 $f(x)\in C[a,b]$，故 $f(x)\in R[a,b]$，令 $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=-f(x)$。此时

$$\begin{aligned}&2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)\\&=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b)=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

例 5 (中国科学技术大学，数学分析考研题)设 $f(x)\ge 0$，且 $f\in C[a,b]$，满足 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，$k$ 为实数，证明：$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le 1$。

分析 题型为积分不等式的证明。若直接使用 Holder 不等式，则有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\cos^2 kx\,\mathrm{d}x\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

同理 $\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，此时有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

无法确定 $b-a$ 的取值，且无法建立 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$ 的联系。即该题不能直接使用 Holder 不等式进行证明。因为两个定积分的乘积可转化为重积分，故利用重积分证明。

证明 记 $D=[a,b]\times[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos ky\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x)f(y)\cos kx\cos ky\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

同理 $\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\sin kx\sin ky\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，此时有

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\iint_D f(x)f(y)(\cos kx\cos ky+\sin kx\sin ky)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x)f(y)\cos k(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,。\\&\le\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

注 4 结合前面的分析，要想直接使用 Holder 不等式证明该结论，需对被积函数做变形，那如何变形呢？关键是如何让 $f^2(x)$ 变为 $f(x)$，故产生如下想法

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)\mathrm{d}x\right)^2,$$

对 $\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)\mathrm{d}x\right)^2$ 使用 Holder 不等式，即

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x\,,$$

即 $\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x$；同理 $\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\sin^2 kx\,\mathrm{d}x$，则有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\left(\cos^2 kx+\sin^2 kx\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1\,。$$

注 5 这个题目可以推广到更一般的形式：

已知 $f(x)\ge0$，且 $f\in C[a,b]$，满足 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，$k$ 为实数，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\le A^2\,。$$

请读者仿照上述分析给出证明。

例 6 设 $f,g\in C[a,b]$，用重积分证明 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\,。$$

分析 题型为积分不等式的证明。分析过程与例 4 完全类似，不再详述，下面给出证明过程。

证明 利用定积分与重积分的关系，记 $D=[a,b]\times[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y=\iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

要证明不等式成立，需建立 $\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的联系，注意到

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0\end{aligned}$$

恒成立。且积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，将 x 和 y 互换，得

$$\iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即 $2\iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0$ 恒成立，从而

$$\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$。

注 6 也可构造一元二次函数进行证明：对任意的实数 t，$\int_a^b\left(f(x)-tg(x)\right)^2\mathrm{d}x\ge 0$ 恒成立，将其看成是关于 t 的函数，则其判别式 $\Delta\le 0$ 恒成立，即可得到结论，不再详述。

例 4~例 6 充分展示了重积分在解决某些特殊结构的定积分问题时所具有的独特风格和魅力。该方法把“两个定积分的乘积转化为重积分”的思想发挥到极高的程度。从思维训练的角度看，这种用高维数计算低维数的方法，避开了将高维数转化为低维数的思维定势。这是摆脱常规思维羁绊的一种创造性的逆向思维方式。即学生从问题的相反面进行分析和探索，有助于激发新灵感，创立新思想，进而培养他们的辩证思维能力和创新思维能力。从哲学的高度来看，正向和逆向本身就是对立统一，不可截然分开的。“两个定积分的乘积转化为重积分”的这种思想不是简单的表面的逆向，而是抓住了重积分的精髓，以做出令人耳目一新的超出正向效果的成果。这也体现了教师以渗透为主，隐性地将德育元素与知识教学融于一体，实现思政教育与学生生长发展需求的一致性。

4. 巩固提高

请读者根据上述讨论和分析完成下列题目。

1) 设 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数，$f(x)$，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调递增的可积函数，则

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x。$$

2) 设 $f\in C[0,1]$，则 $\int_0^1 f(x)\left(\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$。

3) 设 $f(x)$ 连续，记 $F(t)=\iiint_\Omega\left(f\left(x^2+y^2\right)+z^2\right)\mathrm{d}V$，$\Omega$ 是由 $0\le z\le h$，$x^2+y^2\le t^2\,(t\ge 0)$ 所围成的几何体，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$。

4) 设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，记 $F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le t^2,t\ge 0\right\}$。

5. 结束语

本文深入探讨了极限与重积分结合的计算问题和某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题。这两个问题的解决对教师和学生的要求较高，要求教师和学生在教与学的过程中找准知识的连接点，以连续

的、全面的、对立的方式进行全方位的思考和分析。不过这也彰显了教师自身的人格魅力与渊博的专业知识，同时有助于培养学生的数学核心素养。这亦是数学分析课程中融入思政教育的体现。

参考文献

[1] 陈楚申, 廖小莲. 对称性在二重积分计算中的应用[J]. 数学学习与研究, 2021(11): 125-126.

[2] 彭东海, 张留伟. 二重积分方法在定积分计算与证明中的应用[J]. 高等数学研究, 2021, 24(2): 35-37.

[3] 张应奇. 二重积分的计算方法与技巧之我见[J]. 数学学习与研究, 2016(3): 85.

[4] 朱永婷, 王桦. 利用对称性计算二重积分[J]. 数学学习与研究, 2016(5): 94.

[5] 黄冶文. 二重积分的计算与应用[J]. 数学学习与研究, 2017(7): 4-7+9.

[6] 张国铭, 闫善文. 一类二重积分的计算[J]. 高等数学研究, 2018, 21(2): 9-10.

[7] 王友国. 选择合适的变量代换计算二重积分[J]. 高等数学研究, 2011, 14(4): 79-81.

[8] 冯伟杰, 魏光美. 用二重积分证明定积分不等式[J]. 高等数学研究, 2012, 15(2): 27-29.

[9] 王金金, 马华. 利用重积分证明定积分不等式[J]. 高等数学研究, 2004, 7(2): 34+37.

[10] 张盈. 利用重积分解决定积分的有关问题[J]. 数学学习与研究, 2013(23): 87.

[11] 张敏静, 陈金梅, 刘雅娜. 积分不等式的证明方法探究[J]. 数学学习与研究(教研版), 2009(8): 94+96.

[12] 吴耀强. 巧用二重积分求解定积分之例说[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2006, 19(5): 46-48.

[13] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[14] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第三册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[15] 同济大学数学系. 高等数学(下册) [M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2017.