Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 675-682
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125077

Hans汉斯

预控法在二元函数极限证明中的应用

贾瑞玲*，孙铭娟，韩艺兵

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年4月4日；录用日期：2022年5月5日；发布日期：2022年5月12日

摘 要

多元函数极限是数学分析中的一个重要知识模块，它是在一元函数极限的基础上发展起来的。但因自变量个数增多，在判断多元函数极限的存在与否以及它的求解方法时，比一元函数极限复杂得多。尤其是用定义证明多元函数的极限，这困扰了不少学生。本文以二元函数为例，首先深度剖析二元函数极限的定义。其次，在典型例题的解析中，展示预控法在二元函数极限证明中的具体应用。以期为广大师生用定义证明极限提供一种行之有效的方法，同时帮助学生更好地掌握这部分内容，使其在动手操作中深刻领悟二元函数极限的内涵。这种方法有利于学生养成定量分析的思维习惯，树立勇于克服困难的专业精神。同时也有助于培养学生的逻辑思维能力、数学语言表达能力和分析问题能力。

关键词

多元函数极限，预控法，曲线族，分离变量

Application of Pre-Control Method in Proving the Limit of Binary Function

Ruiling Jia*, Mingjuan Sun, Yibing Han

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Apr. 4th, 2022; accepted: May 5th, 2022; published: May 12th, 2022

Abstract

The limit of multivariate function is an important knowledge module in mathematical analysis, and it is developed on the basis of the limit of unary function. However, due to the increase in the number of independent variables, when we judge whether the limit of multivariate function exists or not and how to solve it, it is much more complicated than the limit of unary function. In partic-

*通讯作者。

文章引用：贾瑞玲，孙铭娟，韩艺兵．预控法在二元函数极限证明中的应用[J]．理论数学, 2022, 12(5): 675-682.
DOI: 10.12677/pm.2022.125077

ular, it troubles many students to prove the limit of multivariate functions by definition. Therefore, taking the binary function as an example, this paper deeply analyzes the definition of binary function firstly. Secondly, the pre-control method is proposed in the analysis of typical examples and its application in proving the limit of binary function is demonstrated. It provides an effective method for the teachers and students for proving the limit by definition, at the same time it helps students to better grasp this content so that they can deeply understand the connotation of the limit of binary function in the hands-on operation. This method is conducive to students to form the habit of quantitative analysis and establish a professional spirit of courage to overcome difficulties. Meanwhile, it also helps to cultivate students' logical thinking ability, mathematical language expression ability and analytical ability.

Keywords

The Limit of Multivariate Function, Pre-Control Method, Family of Curves, Separation of Variables

1. 引言

极限是微积分学的精髓，数学分析中的重要概念如连续、导数、定积分、无穷级数的敛散性、广义积分的敛散性等等都是通过极限定义的。多元函数的极限是多元函数微积分学中的重要基本概念。它与一元函数的极限类似，但因多元函数的自变量比较多，这使得二者之间既紧密联系又有很大差别。学生在初次学习这些内容时，很难比对出、分析出它们本质上的异同。且大多的数学分析教材只是将多元函数的计算作为一元函数极限计算方法的推广，没有系统的、深入的研究。因此多元函数极限的计算及其存在性的判断备受学者的关注和青睐。

早在 1997 年王丽芳[1]通过构造不同的曲线族来说明二元函数极限的不存在，但该方法不能用来判定极限存在的情形。四年之后梁小林[2]利用构造法求趋近曲线，并给出了判别多元函数极限不存在的简单条件，得到了其极限不存在的直接判别法。闻卉[3]介绍了如何利用同阶无穷小量判断二元函数极限的不存在。郑军和吴元泽[4] [5]也先后讨论了类似问题。慢慢地，人们对多元函数的极限有了更深入的研究。2018 年熊允发[6]和杜玉平[7]结合教学实践与体会，探究了求二元函数极限的若干方法。2019 年张瑞芳和王海军[8]给出了一类特殊二元函数极限存在的充要条件。2020 年毛一波[9]探讨了三元函数的混合极限与三次极限的关系，研究表明，它们的存在性没有必然的蕴含关系。同年，刁露等人[10]讨论了二元函数在圆邻域以及方邻域上的极限求解及其连续的应用。张志会、李丽红等诸多学者也对此问题进行了相关研究[11]-[16]。田振明[17]等人基于 n 元函数的泰勒公式，分析其在求多元函数极限问题时的适用情形与条件。尽管他们研究的内容不完全相同，但有相似之处，他们都侧重讨论多元函数极限不存在的判别方法及其存在时的求解方法，较少涉及多元函数极限存在的证明。目前仅有阎明刚[18]于 1988 年在商丘师专学报上发表了《用定义证明多元函数极限的一个方法》，他利用代数方法(多项式带余除法)证明多元多项式的极限存在，但该方法具有一定的局限性。

因为多元函数的极限本身就非常复杂，且其存在性的证明又是一个难点，所以这让很多学生感到茫然，束手无策，无从下手。鉴于此，很有必要系统地、详细地研究如何用定义证明多元函数的极限。本文在前人研究成果的基础上，首先着重分析二元函数极限的定义；其次，结合典型例题，通过预控法限

定变量 x 和 y 的取值范围，根据二元函数极限的不同形式，选用放大法或缩小法对不等式进行放大或缩小；最后借助函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言给出严谨的证明过程。

2. 准备知识

本文所用到的概念，详细内容可参看文献[19] [20] [21]。

定义 1 设 D 是 R^2 上的开集，$M_0(x_0,y_0)\in D$ 为一定点，$f(x,y)$ 是定义在 $D\setminus\{M_0\}$ 上的二元函数，A 是一个实数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $M(x,y)\in\mathring{U}(M_0,\delta)$ 时，成立 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$。则称当 $M\to M_0$ 时，函数 $f(x,y)$ 收敛，并称 A 为 $f(x,y)$ 当 $M\to M_0$ 时的极限，或者 $f(x,y)$ 在点 M_0 的极限为 A。记为 $\lim\limits_{M\to M_0}f(x,y)=A$。这里 $\mathring{U}(M_0,\delta)$ 表示以 M_0 为心，δ 为半径的去心邻域，即

$$\mathring{U}(M_0,\delta)=\left\{M(x,y)\middle|0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta,M_0(x_0,y_0)\right\}。$$

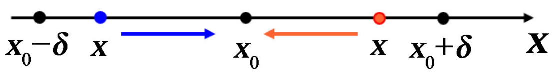
注 1 如何理解二元函数极限的定义呢？从以下三个方面进行分析。

1) 如何理解 $M\to M_0$？

回顾一元函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\left(0<|x-x_0|<\delta\right)$：$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$。

这里自变量 x 只能沿 x 轴从 x_0 的左侧或右侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 都无限接近于 A。

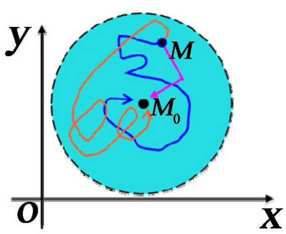


写出二元函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。

$\lim\limits_{M\to M_0}f(x,y)=A$：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall M(x,y)\in\mathring{U}(M_0,\delta)$：$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$。

这里 M 在 M_0 的去心 δ 邻域内，$M\to M_0$ 表示 M 以任意方式(沿直线，曲线等所有方式)趋于 M_0 时，$f(M)$ 都无限接近于 A。



2) $M(x,y)\in\mathring{U}(M_0,\delta)$ 的等价表示形式；

a) $0<d(M,M_0)<\delta$，这里 $d(M,M_0)$ 表示 M 与 M_0 之间的距离，其中

$$d(M,M_0)=\left\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\middle|M(x,y),M_0(x_0,y_0)\right\}。$$

b) $\exists\delta_1>0$，$\delta_2>0$，对 $\forall M(x,y)$ 满足 $|x-x_0|<\delta_1$，$|y-y_0|<\delta_2$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$。

3) 二元函数极限的书写形式；

在 R^2 中，点列 $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ 等价于 $x\to x_0$，$y\to y_0$，故 $\lim\limits_{M\to M_0}f(x,y)=A$ 可写成

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$这种形式。从这个角度来看，二元函数$f(x,y)$在点$M_0$的极限为$A$，也称$f(x,y)$在点$M_0$的二重极限为$A$。

注 2 如何用定义证明二元函数的重极限$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=A$？

与一元函数极限类似，用定义证明重极限存在时，采用放大法。记$M(x,y)$，$M_0(x_0,y_0)$，对刻画函数极限过程的量$\left|f(x,y)-A\right|$放大，分离出刻画自变量变化趋势的项$d(M,M_0)$，而$d(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$较复杂，不易直接分离出该形式，我们退而求其次，分离出$|x-x_0|$和$|y-y_0|$，结合$|x-x_0|\le d(M,M_0)$，$|y-y_0|\le d(M,M_0)$，即可将$|x-x_0|$和$|y-y_0|$转化为$d(M,M_0)$的形式。故要证明$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=A$，即证：对任意给定的$\varepsilon>0$，找到一个合适的$\delta>0$，使得当$0<d(M,M_0)<\delta$时，成立

$$\left|f(x,y)-A\right|\le\cdots\le cd^{\alpha}(M,M_0),$$

这里$c>0$，$\alpha>0$，令$cd^{\alpha}(M,M_0)<\varepsilon$，求出$d(M,M_0)$，即可确定出$\delta$。

思考 1 这里的δ唯一吗？

以上讨论了二元函数的重极限(自变量趋于某个定点，极限值是某个确定的数)，还有一类极限，非正常极限：极限值为无穷大或者是无穷远处的极限(自变量趋向于无穷远处)，无穷又分为正无穷、负无穷、无穷。对于n元函数，有n个自变量，自变量趋于无穷远处时，可以是某个自变量趋于无穷远处，也可以是多个自变量趋于无穷远处，因此多元函数的非正常极限有不同的形式。这里仅以一种形式给出定义。

定义 2 设D是R^2上的开集，$M_0(x_0,y_0)\in D$为一定点，$f(x,y)$是定义在$D\setminus\{M_0\}$上的二元函数。对任意的实数$G>0$，存在$\delta>0$，使得当$M(x,y)\in\overset{\circ}{U}(M_0,\delta)$时，成立$\left|f(x,y)\right|>G$。则称当$M\to M_0$时，函数$f(x,y)$发散到无穷，记为$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$。

定义 3 设A是一个实数，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$，$y>\dfrac{1}{\delta}$时，成立$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$。则称$A$为函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,+\infty)$时的极限，记为$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,+\infty)} f(x,y)=A$。

注 3 如何用定义证明二元函数的非正常极限呢？以$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$例进行说明。

要证明$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$，即证：对任意的实数$G>0$，找到一个合适的$\delta>0$，使得当$M(x,y)\in\overset{\circ}{U}(M_0,\delta)$时，成立$\left|f(x,y)\right|>G$。与证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的方法类似，用定义证明$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$时，采用缩小法。记$M(x,y)$，$M_0(x_0,y_0)$，对刻画函数极限过程的量$\left|f(x,y)\right|$缩小，分离出刻画自变量变化趋势的项$d(M,M_0)$。故要证$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$，即证：对任意的实数$G>0$，找到一个合适的$\delta>0$，使得当$0<d(M,M_0)<\delta$时，成立

$$\left|f(x,y)-A\right|\ge\cdots\ge\frac{c}{d^{\alpha}(M,M_0)},$$

这里$c>0$，$\alpha>0$，令$\dfrac{c}{d^{\alpha}(M,M_0)}>G$，求出$d(M,M_0)$，即可确定出$\delta$。

3. 实例分析

例 用定义证明。

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\left(x^3-xy+y^2\right)=3$；2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\dfrac{xy}{x+y}=2$；

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{y-x}{x+y-1}=\infty$；4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to +\infty}} y\sin\dfrac{x+1}{y}=1$。

证明 1) 记 $M(x,y)$，$M_0(1,-1)$，$d=d(M,M_0)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$，
要证：对任意给定的 $\varepsilon>0$，找到一个合适的 $\delta>0$，使得当 $0<d(M,M_0)<\delta$ 时，$\left|x^3-xy+y^2-3\right|<\varepsilon$。
现 $\forall\varepsilon>0$，对 $\left|x^3-xy+y^2-3\right|$ 进行放大，要分离出 $d(M,M_0)$，只须分离出 $|x-1|$ 和 $|y+1|$ 形式。则

$$\begin{aligned}\left|x^3-xy+y^2-3\right|&=\left|(x-1+1)^3-(x-1+1)(y+1-1)+(y+1-1)^2-3\right|\\&=\left|(x-1)^3+3(x-1)^2+(y+1)^2-(x-1)(y+1)+4(x-1)-3(y+1)\right|\\&\le|x-1|^3+3|x-1|^2+|y+1|^2+|x-1||y+1|+4|x-1|+3|y-1|\\&\le d^3+5d^2+7d\end{aligned}$$

当 $M(x,y)\to M_0(1,-1)$ 时，$d=d(M,M_0)$ 比较小，利用预控法来控制变量 x 和 y，不妨设 $d<1$，此时

$$\left|x^3-xy+y^2-3\right|\le 13d,$$

令 $13d<\varepsilon$，求出 $d<\dfrac{\varepsilon}{13}$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{13}\right\}$，则当 $0<d(M,M_0)<\delta$ 时，有

$$\left|x^3-xy+y^2-3\right|<\varepsilon。$$

2) 记 $M(x,y)$，$M_0(1,-2)$，$d=d(M,M_0)=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$，
要证：对任意给定的 $\varepsilon>0$，找到一个合适的 $\delta>0$，使得当 $0<d(M,M_0)<\delta$ 时，

$$\left|\frac{xy}{x+y}-2\right|<\varepsilon。$$

现 $\forall\varepsilon>0$，因 $\left|\dfrac{xy}{x+y}-2\right|=\left|\dfrac{xy-2x-2y}{x+y}\right|$，且当 $M(x,y)\to M_0(1,-2)$ 时，分母 $x+y\to -1$，分子 $xy-2x-2y\to 0$，即分母是有界量，分子是无穷小量，也就是说要使不等式

$$\left|\frac{xy}{x+y}-2\right|=\left|\frac{xy-2x-2y}{x+y}\right|<\varepsilon,$$

在这个极限过程中，分子起着主要作用，故仅需对分子进行变量分离，分离出 $|x-1|$ 和 $|y+2|$ 形式，将分母放缩为有界量(不能为零)；则有

$$\begin{aligned}\left|\frac{xy}{x+y}-2\right|&=\left|\frac{xy-2x-2y}{x+y}\right|=\left|\frac{(x-1+1)(y+2-2)-2(x-1+1)-2(y+2-2)}{x+y}\right|\\&=\left|\frac{(x-1)(y+2)-4(x-1)-(y+2)}{x+y}\right|\le\frac{|x-1||y-2|+4|x-1|+|y+2|}{|x+y|}\\&\le\frac{d^2+5d}{|x+y|}\end{aligned}$$

当 $M(x,y)\to M_0(1,-2)$ 时，$d=d(M,M_0)$ 比较小，利用预控法来控制变量 x 和 y，不妨设 $d<\dfrac{1}{4}$，

此时$|x-1|<\frac{1}{4}$，$|y+2|<\frac{1}{4}$，可得$-\frac{3}{2}<x+y<-\frac{1}{2}$，从而有

$$\left|\frac{xy}{x+y}-2\right|\le\frac{d^2+5d}{|x+y|}\le 2\left(d^2+5d\right)\le 2\cdot 6d,$$

令$12d<\varepsilon$，求出$d<\frac{\varepsilon}{12}$，取$\delta=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{12}\right\}$，则当$0<d\left(M,M_0\right)<\delta$时，$\left|\frac{xy}{x+y}-2\right|<\varepsilon$。

3) 记$M(x,y)$，$M_0(0,1)$，$d=d\left(M,M_0\right)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，

要证：对任意的$G>0$，找到一个合适的$\delta>0$，使得当$0<d\left(M,M_0\right)<\delta$时，

$$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|>G。$$

现$\forall G>0$，因$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|\ge\frac{|x-y|}{|x|+|y-1|}$，且当$M(x,y)\to M_0(0,1)$时，分母$|x|+|y-1|\to 0$，分子$|x-y|\to 1$，即分子是有界量，分母是无穷小量，也就是说要使不等式$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|\ge\frac{|x-y|}{|x|+|y-1|}>G$，在这个极限过程中，分母起着主要作用，故仅需对分母进行变量分离，分离出$|x|$和$|y-1|$形式，将分子缩小为有界量(不能为零)；则有

$$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|\ge\frac{|x-y|}{|x|+|y-1|}\ge\frac{|x-y|}{2d};$$

当$M(x,y)\to M_0(0,1)$时，$d=d\left(M,M_0\right)$比较小，利用预控法来控制变量x和y，不妨设$d<\frac{1}{3}$，此时$|x|<\frac{1}{3}$，$|y-1|<\frac{1}{3}$，可得$-\frac{5}{3}<x-y<-\frac{1}{3}$，从而有

$$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|\ge\frac{|x-y|}{2d}\ge\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2d},$$

令$\frac{1}{6d}>G$，求出$d<\frac{\varepsilon}{6G}$，取$\delta=\min\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{6G}\right\}$，则当$0<d\left(M,M_0\right)<\delta$时，$\left|\frac{y-x}{x+y-1}\right|>G$。

4) 要证：对任意的$\varepsilon>0$，找到一个合适的$\delta>0$，使得当$|x|<\delta$，$y>\frac{1}{\delta}$时，

$$\left|y\sin\frac{x+1}{y}-1\right|<\varepsilon。$$

函数结构中含有因式$\sin\frac{x+1}{y}$，类比已知$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，为此进行形式统一，对$\left|y\sin\frac{x+1}{y}-1\right|$放大，即

$$\left|y\sin\frac{x+1}{y}-1\right|=\left|(x+1)\cdot\frac{\sin\frac{x+1}{y}}{\frac{x+1}{y}}-1\right|=\left|(x+1)\cdot\left(\frac{\sin\frac{x+1}{y}}{\frac{x+1}{y}}-1\right)+x\right|\le|x+1|\cdot\left|\frac{\sin\frac{x+1}{y}}{\frac{x+1}{y}}-1\right|+|x|$$

因$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，故对$\forall\varepsilon>0$，存在$\eta(0<\eta<\varepsilon<1)$，当$0<|t|<\eta$时，$\left|\frac{\sin t}{t}-1\right|<\varepsilon$。取$\delta=\frac{\eta}{2}<\varepsilon<1$，

当$|x|<\delta$，$y>\dfrac{1}{\delta}$时，$0<\dfrac{x+1}{y}<\dfrac{2}{y}<2\delta=\eta$，此时，

$$\left|y\sin\frac{x+1}{y}-1\right|\le|x+1|\cdot\left|\frac{\sin\frac{x+1}{y}}{\frac{x+1}{y}}-1\right|+|x|<3\varepsilon 。$$

思考 2 利用预控法来控制变量 x 和 y 时，在题目(1) (2) (3)中，分别不妨设 $d<1$，$d<\dfrac{1}{4}$，$d<\dfrac{1}{3}$，这里的 1，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{3}$是如何得到的？这些值可随意选取还是受某些因素的制约？

4. 结束语

这里以四个题目为载体，介绍了预控法在二元函数极限证明中的应用。在实际的教学过程中，学生必须做足够数量的练习题，才能深刻理解和领悟多元函数极限的本质。练习用定义证明多元函数的极限，这有助于提高学生分析问题的能力和严谨的逻辑推理能力。

然而在实际中，多元函数极限在形式上非常复杂；学生在学习过程中要注意积累证明方法和技巧，在求解某个具体极限问题时，抓其本质特征，在变中找不变，选择合适的方法进行求解。

多元函数的极限是数学分析的核心内容之一，是数学家在漫长的历史过程中从事科学研究的成果体现，不仅在知识体系上博大精深，而且在内容中蕴含着丰富的数学思想和数学方法。这些数学方法和数学思想对培养学生的思维观和方法论起着非常重要的作用。

参考文献

[1] 王丽芳. 构造曲线族证明二元函数极限不存在[J]. 镇江市高等专科学校学报, 1997(1): 83-84.

[2] 梁小林. 多元函数极限不存在的直接判别法[J]. 长沙交通学院学报, 2001, 17(2): 10-12.

[3] 闻卉. 同阶无穷小量在证明二元函数极限不存在中的应用[J]. 数学学习与研究, 2015(1): 130.

[4] 郑军. 一类多元函数极限不存在性判别法[J]. 大学数学, 2017, 33(6): 94-99.

[5] 吴元泽. 关于证明二元函数在某一点极限不存在的一点思考[J]. 数学学习与研究, 2018(3): 9-10.

[6] 熊允发, 管涛. 浅析求二元函数极限的几种方法[J]. 中国人民公安大学学报(自然科学报), 2018, 24(1): 98-100.

[7] 杜玉平. 关于多元函数极限求法的探究[J]. 安阳师范学院学报, 2018(5): 136-138.

[8] 张瑞芳, 王海军. 一类二元函数极限的注记[J]. 大学数学, 2019, 35(6): 70-73.

[9] 毛一波. 三元函数的三次极限与混合极限[J]. 数学学习与研究, 2020(1): 2-3.

[10] 刁露, 缪雨曦, 徐聪. 多元函数极限及其连续性应用[J]. 数学学习与研究, 2020(2): 10-11

[11] 张志会. 关于二元函数的极限的教学探析[J]. 成才, 2021(17): 73-74.

[12] 李丽红. 二元函数极限的一种简便求法[J]. 数学学习与研究, 2018(4): 2

[13] 陶志雄. 多元函数极限的一个注记[J]. 浙江科技学院学报, 2017, 29(5): 391-393.

[14] 刘利平. 基于二重极限求解方法的教学探讨[J]. 考试周刊, 2015(73): 60.

[15] 韩加坤. 多元函数极限相关问题研究[J]. 数学学习与研究, 2017(3): 19-20.

[16] 马艳丽, 褚正清. 多元微积分中二重极限计算方法及解析[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版), 2020, 38 (1): 33-38.

[17] 田振明, 赵国瑞, 崔庆岳. n 元泰勒公式及其在多元函数极限中的应用[J]. 高等数学研究, 2017, 20(2): 26-28.

[18] 阎明刚. 用定义证明多元函数极限的一个方法[J]. 商丘师专学报(自然科学版), 1988(S2): 53-57.

[19] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第三册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
[20] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[21] 费定晖, 周学圣. 数学分析习题集题解(第五册) [M]. 第六版. 济南: 山东科学技术出版社, 2012.