Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2105-2110
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112235

模糊线性系统中关联矩阵的DMP逆和BT逆的分块表示

李　静

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2021年11月15日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月27日

摘　要

模糊线性系统(FLS)是指系数矩阵A是一个实矩阵，右端向量$\tilde{Y}$是一个给定的模糊数向量的线性系统$A\tilde{X}=\tilde{Y}$。为了便于求解模糊线性系统，可以利用嵌入方法将$A\tilde{X}=\tilde{Y}$转换为$2n\times 2n$清晰线性系统$SX=Y$。基于已有的模糊线性系统理论，研究了模糊线性系统中关联矩阵S的DMP逆与BT逆的分块表示。

关键词

模糊线性系统，DMP逆，BT逆

A Block Representation Involving the DMP Inverse and BT Inverse of the Associated Matrix in Fuzzy Linear System

Jing Li

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 15th, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 27th, 2021

Abstract

A linear system $A\tilde{X}=\tilde{Y}$, where the coefficient matrix A is a real matrix, the right-hand side vector $\tilde{Y}$ given fuzzy number vector is called a fuzzy linear system (FLS). In order to solve fuzzy linear system, $n\times n$ fuzzy linear system can be transformed into the $2n\times 2n$ crisp linear system by the embedded method. Based on the existing theories about the fuzzy linear system, a block representation involving the DMP inverse and BT inverse of the associated matrix S was investigated

文章引用: 李静. 模糊线性系统中关联矩阵的 DMP 逆和 BT 逆的分块表示[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2105-2110.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112235

and studied.

Keywords

Fuzzy Linear System, DMP Inverse, BT Inverse

1. 引言

模糊线性系统最早由 Friedman [1]等人在 1998 年提出，后来模糊线性系统的求解问题备受关注，很多学者加入到模糊线性系统的求解问题中。随着广义逆的发展，继而出现了利用 Moore-Penrose 逆、Group 逆、Drazin 逆、core 逆等广义逆求解模糊线性系统的方案。

2015 年 Nikuie M 和 Ahmad M Z 在[2]中提出了利用加权 Drazin 逆求解奇异模糊线性系统的方法。在 2018 年，Mihailovic B 等人在[3]中首次将广义逆矩阵的分块表示和模糊线性系统相结合，运用了 Moore-Penrose 逆的分块表示对模糊线性系统进行求解，继而在[4]中给出了利用 Group 逆的分块表示求解模糊线性系统的算法，这为模糊线性系统的求解问题提供了一个全新的思路。2020 年，Jiang H 等人在[5]中将模糊线性系统的求解进一步推广到利用 core 逆的分块表示进行求解。是否可以研究关联矩阵的其他广义逆，这值得我们思考。

2010 年 Baksalary O M 和 Trenkler G 在[6]中给出 core 逆的概念。而 core 逆只存在指标为 1 的方阵中，针对于这一局限性，2014 年 Baksalary O M 和 Trenkler G 在[7]中提出了广义 core 逆(简记为 BT 逆)，同年 Malik S B 和 Thome N 在[8]中给出了 DMP 逆的定义。作为 core 逆的一种拓展，DMP 逆和 BT 逆存在于任意指标 k 的方阵中。因此受[5]的启发，是否可以利用 DMP 逆和 BT 逆的分块表示求解模糊线性系统，这一问题十分值得思考和探究。

2. 已有结论及相关准备

2.1. 模糊线性系统

定义 1.1 [1]对于一个有序数对：$\tilde{z}=\left(\underline{z}(r),\overline{z}(r)\right)$，$r\in[0,1]$，若满足下面三个条件：

1) $\underline{z}(r)$ 在 $[0,1]$ 上是一个有界左连续不降，

2) $\overline{z}(r)$ 在 $[0,1]$ 上是一个有界左连续不增，

3) $\underline{z}(r)<\overline{z}(r)$，$r\in[0,1]$，

则称 $\tilde{z}$ 为一模糊数。

定义 1.2 [1]对于 $n\times n$ 的模糊矩阵方程 $A\tilde{X}(r)=\tilde{Y}(r)$：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(r) \\ \tilde{x}_2(r) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(r) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(r) \\ \tilde{y}_2(r) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(r) \end{bmatrix},$$

此处 $A=\left(a_{ij}\right)$ 为一实数矩阵，$\tilde{x}_i(r)$ 和 $\tilde{y}_i(r)$ 均为模糊数，$i,j\in[0,1]$，称为模糊线性系统(FLS)。

定义 1.3 [1]若模糊数向量 $\tilde{X}(r)=\left[\tilde{x}_1(r),\tilde{x}_2(r),\cdots,\tilde{x}_i(r)\right]^{\mathrm{T}}$，其中

$$\tilde{x}_i(r)=\left(\underline{x}_i(r),\overline{x}_j(r)\right),\quad i=1,\cdots,n,\quad r\in[0,1],$$

满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x}_j(r)=\overline{y}_j(r)\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\underline{x}_j(r)=\underline{y}_i(r)\end{cases},\quad i=1,\cdots,n$$

则称该模糊数向量 $\tilde{X}(r)$ 为 FLS 的一个解。

根据[1]可知，模糊线性系统 $A\tilde{X}(r)=\tilde{Y}(r)$ 的解可以通过求解下面的清晰线性系统：

$$SX(r)=Y(r),\quad r\in[0,1],$$

即

$$\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&\cdots&s_{1n}\\ s_{21}&s_{22}&\cdots&s_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ s_{n1}&s_{n2}&\cdots&s_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1(r)\\ \vdots\\ \underline{x}_n(r)\\ -\overline{x}_1(r)\\ \vdots\\ -\overline{x}_n(r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{y}_1(r)\\ \vdots\\ \underline{y}_n(r)\\ -\overline{y}_1(r)\\ \vdots\\ -\overline{y}_n(r)\end{bmatrix},$$

此处 s_{ij} 定义如下：

$$\text{当 } a_{ij}\geq 0 \text{ 时，}\quad s_{ij}=a_{ij},\quad s_{i+n,j+n}=a_{ij};$$

$$\text{当 } a_{ij}<0 \text{ 时，}\quad s_{i,j+n}=-a_{ij},\quad s_{i+n,j}=-a_{ij};$$

其他未注明元素均为 0。

由上述可知，矩阵S的分块表示为：

$$S=\begin{bmatrix}D&E\\ E&D\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中，D 与 E 均为 $n\times n$ 阶方阵，$D=\left[a_{ij}^{+}\right]$，$E=\left[a_{ij}^{-}\right]$，$a_{ij}^{+}=a_{ij}\vee 0$，$a_{ij}^{-}=-a_{ij}\vee 0$。

此时，我们称矩阵 S 为矩阵 A 的关联矩阵。

2.2. DMP 逆和 BT 逆

这一节中，我们的主要目的是介绍一下 DMP 逆和 BT 逆的定义。首先，先介绍一些常见的广义逆的定义以及相关的概念。我们用 $S^{\Diamond}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合，A^{*} 表示矩阵 A 的共轭转置。$Ind(A)=k$ 表示矩阵 A 的指标为 k，即对于矩阵 $A\in\mathbb{C}_n^n$，满足 $rank\left(A^k\right)=rank\left(A^{k+1}\right)$ 的最小正整数为 k。

定义 2.1 给定矩阵 $A\in\mathbb{C}_n^n$，$Ind(A)=k$。

(I) [9]矩阵 X 为 A 的 Moore-Penrose 逆，记为 $X=A^{+}$，当且仅当 X 满足下列方程：

$$(1)\ \ AXA=A,\ (2)\ \ XAX=X,\ (3)\ \ (AX)^{*}=AX,\ (4)\ \ (XA)^{*}=XA。$$

(II) [10]矩阵 X 为 A 的 Drazin 逆，记为 $X=A^{D}$，当且仅当 X 满足下列方程：

$$(1^k)\ \ XA^{k+1}=A^k,\ (2)\ \ XAX=X,\ (5)\ \ AX=XA。$$

(III) [8]矩阵 X 为 A 的 DMP 逆，记为 $X=A^{D,+}$，当且仅当 X 满足下列方程：

$$XAX = X, \quad XA = A^D A \text{ 以及 } A^k X = A^k A^+ 。$$

另外，我们可以知道 $A^{D,+} = A^D AA^+$ 。

(IV) [7]矩阵 $A^{\Diamond}$ 为 A 的广义核逆(简记为 BT 逆)，当且仅当

$$A^{\Diamond} = (AP_A)^+ ,$$

其中 $P_A = AA^+$ 表示矩阵 A 的投影矩阵。

3. 关联矩阵 S 的 DMP 逆和 BT 逆的分块表示

在这一节，我们将给出本文的主要结果即模糊线性系统中关联矩阵 S 的 DMP 逆 $S^{D,+}$ 以及 BT 逆 $S^{\Diamond}$ 的分块表示，这对模糊线性系统的求解问题有一定的意义。假设关联矩阵 S 的分块表示为 $S = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}$，其中 $D, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 。

引理 2.1 [3]关联矩阵 S 的 Moore-Penrose 逆 S^+ 的分块表示如下：

$$S^+ = \begin{bmatrix} H & Z \\ Z & H \end{bmatrix},$$

当且仅当 $H = \frac{1}{2}\left[(D+E)^+ + (D-E)^+\right]$，$Z = \frac{1}{2}\left[(D+E)^+ - (D-E)^+\right]$。

引理 2.2 [4]关联矩阵 S 的 Drazin 逆 S^D 的分块表示如下：

$$S^D = \begin{bmatrix} H & Z \\ Z & H \end{bmatrix},$$

当且仅当 $H = \frac{1}{2}\left[(D+E)^D + (D-E)^D\right]$，$Z = \frac{1}{2}\left[(D+E)^D - (D-E)^D\right]$。

受上述引理的启发我们研究关联矩阵 S 的 DMP 逆的分块表示，结果在定理 2.3 中给出。

定理 2.3 关联矩阵 S 的 DMP 逆 $S^{D,+}$ 的分块表示如下：

$$S^{D,+} = \begin{bmatrix} H & Z \\ Z & H \end{bmatrix},$$

当且仅当 $H = \frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+} + (D-E)^{D,+}\right]$，$Z = \frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+} - (D-E)^{D,+}\right]$。

证明：由公式(1)、引理 2.1 和引理 2.2 可知，我们可以知道矩阵 S、S^D 、S^+ 分块表示为

$$S = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}, \quad S^D = \begin{bmatrix} H & Z \\ Z & H \end{bmatrix}, \quad S^+ = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix},$$

当且仅当

$$H = \frac{1}{2}\left[(D+E)^D + (D-E)^D\right], \quad Z = \frac{1}{2}\left[(D+E)^D - (D-E)^D\right]。$$

$$M = \frac{1}{2}\left[(D+E)^+ + (D-E)^+\right], \quad N = \frac{1}{2}\left[(D+E)^+ - (D-E)^+\right]。$$

所以，我们可以得到

$$S^{D,+} = S^D SS^+ = \begin{bmatrix} H & Z \\ Z & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}。$$

计算得，

$$S^{D,+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+}+(D-E)^{D,+}\right] & \frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+}-(D-E)^{D,+}\right]\\ \frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+}-(D-E)^{D,+}\right] & \frac{1}{2}\left[(D+E)^{D,+}+(D-E)^{D,+}\right]\end{bmatrix},$$

定理得证。

类似的，我们也可以得到关联矩阵 S 的 BT 逆的分块表示，如定理 3.4 所示。

定理 2.4 关联矩阵 S 的 BT 逆 $S^{\diamond}$ 的分块表示如下：

$$S^{\diamond}=\begin{bmatrix}H & Z\\ Z & H\end{bmatrix},$$

当且仅当 $H=\frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}+(D-E)^{\diamond}\right]$，$Z=\frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}-(D-E)^{\diamond}\right]$。

证明：由矩阵的 BT 逆的定义可知，$S^{\diamond}=(SP_S)^{+}=(SSS^{+})^{+}$。

因为 $S=\begin{bmatrix}D & E\\ E & D\end{bmatrix}$，可得

$$S^{\diamond}=\begin{bmatrix}H & Z\\ Z & H\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}D & E\\ E & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & E\\ E & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & E\\ E & D\end{bmatrix}^{+}\right]^{+}:=\begin{bmatrix}B & C\\ C & B\end{bmatrix}^{+},$$

其中，

$$B=\frac{1}{2}(D+E)(D+E)(D+E)^{+}+\frac{1}{2}(D-E)(D-E)(D-E)^{+},$$

$$C=\frac{1}{2}(D+E)(D+E)(D+E)^{+}-\frac{1}{2}(D-E)(D-E)(D-E)^{+}。$$

因此，$B+C=(D+E)(D+E)(D+E)^{+}$，$B-C=(D-E)(D-E)(D-E)^{+}$。

根据引理 2.1 可知，

$$\begin{bmatrix}H & Z\\ Z & H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & C\\ C & B\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[(B+C)^{+}+(B-C)^{+}\right] & \frac{1}{2}\left[(B+C)^{+}-(B-C)^{+}\right]\\ \frac{1}{2}\left[(B+C)^{+}-(B-C)^{+}\right] & \frac{1}{2}\left[(B+C)^{+}+(B-C)^{+}\right]\end{bmatrix}。$$

所以，

$$\begin{bmatrix}H & Z\\ Z & H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}+(D-E)^{\diamond}\right] & \frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}-(D-E)^{\diamond}\right]\\ \frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}-(D-E)^{\diamond}\right] & \frac{1}{2}\left[(D+E)^{\diamond}+(D-E)^{\diamond}\right]\end{bmatrix},$$

定理得证。

4. 结语

已经得到了模糊线性系统 $A\tilde{X}=\tilde{Y}$ 中系数矩阵 A 的关联矩阵 S 的 DMP 逆 $S^{D,+}$ 与 BT 逆 $S^{\diamond}$ 的分块表示，我们希望这个结果能为求解模糊线性系统提供一个新的思路。如何分别用 $S^{D,+}$ 和 $S^{\diamond}$ 的分块表示来求解模糊线性系统，这是下一步要研究的课题。

参考文献

[1] Friedman, M., Ming M. and Kandel, A. (1998) Fuzzy Linear Systems. *Fuzzy Sets Systems*, **96**, 201-209. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00270-9

[2] Nikuie, M. and Ahmad, M.Z. (2015) Singular Fuzzy Linear Systems and the W-Weighted Drazin Inverse. *AIP Conference Proceedings*, **1660**, Article ID: 050010. https://doi.org/10.1063/1.4915643

[3] Mihailovic, B., Jerkovic, V.M. and Malesexic, B. (2018) Solving Fuzzy Linear Systems Using a Block Representation of Generalized Inverses: The Moore-Penrose Inverse. *Fuzzy Sets and Systems*, **353**, 44-65. https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.11.007

[4] Mihailovic, B., Jerkovic, V.M. and Malesexic, B. (2018) Solving Fuzzy Linear Systems Using a Block Representation of Generalized Inverses: The Group in Verse. *Fuzzy Sets and Systems*, **353**, 66-85. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.015

[5] Jiang, H., Wang, H. and Liu, X. (2020) Solving Fuzzy Linear Systems by a Block Representation of Generalized Inverse: The Core Inverse. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, 1-20. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01156-0

[6] Baksalary, O.M. and Trenkler, G. (2010) Core Inverse of Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, **58**, 681-697. ttps://doi.org/10.1080/03081080902778222

[7] Baksalary, O.M. and Trenkler, G. (2014) On a Generalized Core Inverse. *Applied Mathematics and Computation*, **236**, 450-457. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.048

[8] Malik, S.B. and Thome, N. (2014) On a New Generalized Inverse for Matrices of an Arbitrary Index. *Applied Mathematics and Computation*, **226**, 575-580. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.060

[9] Penrose, R. (1995) A Generalized Inverse for Matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, 406-413. https://doi.org/10.1017/S0305004100030401

[10] Ben-Israel, A. (1974) Greville, Generalized Inverses Theory and Applications. Wiley, New York, 169.