Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 290-297
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104037

Existence Theorems of Vector Equilibrium Problems with Set Payoffs Functions

Lei Gao*, Yu Zhang, Zhijuan Cao

College of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: *sxgaolei@163.com, zhangyu198606@sina.com, sxcaozhijuan@126.com

Received: Mar. 19th, 2020; accepted: Apr. 6th, 2020; published: Apr. 14th, 2020

Abstract

Based on the definitions of cone semicontinuous and cone quasiconvex of payoff function, the existence theorems of solutions for vector equilibrium problems with payoff function are obtained under new assumptions by using the classical *Fan-KKM* theorem and separation theorem. Finally, the feasibility of the results is verified by an example.

Keywords

Set Payoffs, Game Problems, *Fan-KKM* Theorems, Separation Theorems

集支付函数的向量均衡问题存在性定理

高　磊*，张　宇，曹志娟

云南财经大学统计与数学学院，云南　昆明
Email: *sxgaolei@163.com, zhangyu198606@sina.com, sxcaozhijuan@126.com

收稿日期：2020年3月19日；录用日期：2020年4月6日；发布日期：2020年4月14日

摘　要

基于集支付函数锥半连续和锥拟凸的定义，利用经典的*Fan-KKM*定理与分离定理，在新的假设条件下，得到了带有集支付函数的向量均衡问题解的存在性定理。最后，通过算例验证了结果的可行性。

关键词

集支付，博弈问题，*Fan-KKM*定理，分离定理

*通讯作者。

文章引用: 高磊, 张宇, 曹志娟. 集支付函数的向量均衡问题存在性定理[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 290-297.
DOI: 10.12677/pm.2020.104037

1. 引言

博弈问题有三要素：博弈者、博弈策略和支付函数。经典博弈问题的支付函数值是一个单值的数或者向量。然而，受到一些不确定的因素与客观条件的影响，想精确计算出这个支付函数的函数值是比较困难的，通常只能得到一个值的大致范围。这样，支付函数就变成了一个集值函数。因此，研究集支付函数的向量均衡问题是非常有意义的。

有一些学者已经做了这方面的研究。文献[1]利用凸集分离定理研究了向量均衡问题的存在性。文献[2]提出了集值映射下向量均衡问题新的存在性定理。文献[3]研究了广义弱向量均衡问题的存在性结果。文献[4]在凸集和非凸集下，讨论了弱向量平衡问题的存在性。文献[5]研究了变分不等式问题在伪单调和不连续假设下的存在性结果。文献[6]研究了集值映射下的极大极小非均衡问题。文献[7]得到了一系列集值映射弱向量拟平衡问题解的存在性和连通性的结果。文献[8] [9]运用一些有利条件解决了一些非线性问题。

很少有文献研究集支付函数的向量均衡问题。向量均衡问题是指：$\exists \bar{x} \in X_0$ s.t.，

$$F(\bar{x}, y) \not\subset -S \setminus \{\theta\}, \quad \forall y \in X_0$$

其中 $F: X_0 \times X_0 \to 2^V$，$X_0 \subset X$，$X$ 和 V 是实 Hausdorff 拓扑线性空间，S 是 V 中的一个尖闭凸锥。直接利用经典的方法讨论上述问题解的存在性定理所得到连续性假设中会涉及非开非闭集 $S \setminus \{\theta\}$，这使得相应的结果很难验证。在这篇文章中，利用经典的 *Fan-KKM* 定理与分离定理(包括凸集分离定理、非凸分离定理)，在合理的假设下，分别研究了带有集支付函数的向量均衡问题解的存在性定理。

2. 预备知识

在整篇文章中，总是假设 X 和 V 是实 Hausdorff 拓扑线性空间，S 是 V 中的一个闭的尖凸锥，并且 $\operatorname{int} S \neq \theta$。

S 的对偶锥 $S^* := \{s^* \in V^* : s^*(s) \geq 0, \forall s \in S\}$。

显然，$s \in S^* \setminus \{\theta\}$ 是单调增加函数(见文献[2])。

集向量均衡问题(SVEP)是指：$\exists \bar{x} \in X_0$，s.t.，

$$F(\bar{x}, y) \not\subset -S \setminus \{\theta\}, \quad \forall y \in X_0$$

下面，给出拟上(下)半连续和 S-拟上(下)半连续的定义。

定义 2.1 设 $F: X \to 2^V$ 是一个集值映射，$x_0 \in X$。如果对 $\forall b \in V$，有

$$F(x_0) \cap (b+S) = \varnothing \quad \left(F(x_0) \cap (b-S) = \varnothing\right)$$

$\exists x_0$ 的邻域 U，s.t.，

$$F(x) \cap (b+S) = \varnothing \quad \left(F(x) \cap (b-S) = \varnothing\right), \quad \forall x \in U$$

那么称 F 是 x_0 上的拟上(下)半连续；如果对 $\forall x \in X$，F 是 S-拟上(下)半连续，那么称 F 是 X 上的 S-拟上(下)半连续。

注 1：这里所给出的定义与文献[2]中的定义不同，下面举例说明。

例 1：设 $F: R \to 2^R$ 是一个集值映射，$S = R_+$。F 的定义如下：

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1], & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

取 $b > 1$，有 $F(0) \cap (b+S) = [-1,1] \cap (b+S) = \varnothing$。由 F 的定义可知，一定存在 0 的邻域 U，s.t.，$F(x) \cap (b+S) = \varnothing$，$\forall x \in U$。即 F 在 0 点 R_+-拟上半连续。

但在文献[2]中的定义 2.1 中却不满足，理由如下：

取 $b = -\frac{1}{2}$，$b+S = \left\{x \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$。显然，$F(0) = [-1,1] \not\subset b+S$，对 0 的任意邻域 U，$F(x) \subset b+S$。显然，F 在 0 点不满足文献[2]中相应的概念。

引理 2.1 设 $F: X \to 2^V$ 是一个集值映射，F 是 X 上的拟上半连续当且仅当它的上水平集是闭集，*i.e.*，对 $\forall b \in V$，水平集 $lev_F(b) := \{x \in X : F(x) \cap (b+S) \neq \varnothing\}$ 是闭集。

证明：一方面，假设 $\forall b \in V$，$lev_F(b) := \{x \in X : F(x) \cap (b+S) \neq \varnothing\}$ 是闭集，要证 F 是 X 上的拟上半连续。由于 $lev_F(b)$ 的补集 $lev_F(b)^C$ 是开集，可知若对于 $\forall x_0 \in X$，有 $F(x_0) \cap (b+S) = \varnothing$ 则 $x_0 \in lev_F(b)^C$。即 $\exists x_0$ 的邻域 $lev_F(b)^C$，*s.t.*，$F(x_0) \cap (b+S) = \varnothing$ 成立，得证。

另一方面，若 F 是 X 上的 S-拟上半连续，要证 $\forall b \in V$，水平集

$$lev_F(b) := \{x \in X : F(x) \cap (b+S) \neq \varnothing\}$$

是闭集。设 $\{x_n\}$ 为 $lev_F(b)$ 上的一个序列且 $x_n \to x_1$。假设 $x_1 \notin lev_F(b)$，那么 $F(x_1) \cap (b+S) = \varnothing$，根据拟上半连续的定义可知，存在实数 N，当 $n \geq N$ 时，有 $F(x_n) \cap (b+S) = \varnothing$，与假设矛盾。因此，$\forall b \in V$，水平集 $lev_F(b)$ 是闭集。

下面，给出真 S-拟凸和自然 S-拟凸的定义。

定义 2.2 [10] 设 X_0 是 X 上的非空凸集，$F: X \to 2^V$ 是一个集值映射，有下列定义：

1) 对 $\forall x_1, x_2 \in X_0$，并且 $l \in [0,1]$，有

$$F(lx_1 + (1-l)x_2) \subset F(x_1) - S \text{ 或 } F(lx_1 + (1-l)x_2) \subset F(x_2) - S,$$

则称集值映射 F 是真 S-拟凸；

2) 对 $\forall x_1, x_2 \in X_0$，并且 $l \in [0,1]$，有

$$F(lx_1 + (1-l)x_2) \subset co\{F(x_1), F(x_2)\} - S,$$

则称集值映射 F 是自然 S-拟凸。

接下来，给出著名的 KKM 映象定义和 *Fan-KKM* 定理。

定义 2.3 [11] 设 $X_0 \in X$ 是一线性空间而且 $X_0 \neq \varnothing$，$F: X \to 2^X$ 是一多值映象，如果对任意有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ 有 $co\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$，那么称 F 为 KKM 映象。

定理 2.1 [11] 设 X 是一 Hausdorff 拓扑线性空间，X_0 是 X 之一非空子集，$F: X_0 \to 2^X$ 是 *Fan-KKM* 映象，再设 $\forall x \in X_0$，$F(x)$ 为 X 中的闭集，且至少存在一点 $x_0 \in X_0$ 使得 $F(x_0)$ 是 F 中的紧集，则 $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \varnothing$。

最后，给出一类非线性标量化函数的定义以及性质。

定义 2.4 [12] 设 $k\in\operatorname{int}S$ 和 $a\in V$，非线性标量化函数 $\xi_{ka}(z):V\to R$ 为：

$$\xi_{ka}=\min\{t\in R:z\in a+tk-S\}.$$

引理 2.2 [13] 设 $k\in\operatorname{int}S$ 和 $a\in V$，有以下性质：

1) $\xi_{ka}(z)\le r\Leftrightarrow z\in a+rk-S$；

2) $\xi_{ka}(z)\ge r\Leftrightarrow z\notin a+rk-\operatorname{int}S$；

3) 如果 $z_1-z_2\in S\Rightarrow\xi_{ka}(z_1)\ge\xi_{ka}(z_2)$，那么 $\xi_{ka}(\cdot)$ 是单调递增的函数；

4) 若 $z_1-z_2\in\operatorname{int}S\Rightarrow\xi_{ka}(z_1)>\xi_{ka}(z_2)$，则 $\xi_{ka}(\cdot)$ 是严格单调递增的函数；

5) $\xi_{ka}(\cdot)$ 是连续的函数。

3. 主要结论

在这一节，首先使用 *Fan-KKM* 定理以及非线性分离定理来证明下面结论：

定理 3.1 设 $k\in\operatorname{int}S$ 和 $a\in V$，X_0 是 X 上的一个非空凸子集，$F:X_0\times X_0\to 2^V$ 是一个集值映射，若满足下列条件：

1) 对 $\forall y\in X_0$，$F(x,y)$ 是 X 上的 S-拟上半连续，$F(x,x)$ 是 S-拟下半连续；

2) 对 $\forall x\in X_0$，$F(x,\cdot)$ 是 X_0 上的真 S-拟凸；

3) $\bigcup\limits_{x\in X_0}F(x,x)\subset V\setminus\{-S\setminus\{\theta\}\}$；

则集向量均衡问题(SVEP)有解。

证明：首先，我们证明 $\exists\overline{x}\in X_0$，

$$\text{s.t.}\quad \xi_{ka}\cdot F(\overline{x},X_0)\cap\left(\bigcup_{x\in X_0}\xi_{ka}\cdot F(x,x)+R_+\right)\ne\varnothing \tag{3.1}$$

构造集值映象 $Q:X_0\to X_0$

$$Q(y)=\left\{x\in X_0:\xi_{ka}\cdot F(x,y)\cap\left(\bigcup_{x\in X_0}\xi_{ka}\cdot F(x,x)+R_+\right)\ne\varnothing\right\},\quad y\in X_0$$

1) 对 $\forall y\in X_0$，都有 $y\in Q(y)$，即 $Q(y)\ne\varnothing$，$\forall y\in X_0$。

2) 又因为 $Q(y)$ 为一个紧集，$\forall y\in X_0$，且 X_0 是紧的，故仅需证 $Q(y)$ 为闭集即可。

由 Q 的定义可知，

$$Q(y)=\left\{x\in X_0:\exists z\in\xi_{ka}\cdot F(x,y),\text{s.t. } z\ge\min\bigcup_{x\in X_0}\xi_{ka}\cdot F(x,x)\right\},\quad y\in X_0$$

再由 F 的连续性以及 Q 的定义可得 $Q(y)$ 为闭集。

3) 下面证明 $Q(y)$ 为一个 KKM 映象。

反证，若 $Q(y)$ 不是一个 KKM 映象，则 $\exists\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 且 $t_1,t_2,\cdots,t_n\ge 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=1$，s.t.，

$$\overline{y}=\sum_{i=1}^{n}t_iy_i\notin\bigcup_{i=1}^{n}Q(y_i)$$

由 Q 的定义得，

$$\xi_{ka}\cdot F(\overline{y},y_i)\cap\left(\bigcup_{x\in X_0}\xi_{ka}\cdot F(x,x)+R_+\right)=\varnothing,\quad\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

由定义 2.2 以及 ξ_{ka} 的单调性可知，

$$\max \xi_{ka} \cdot F(\bar{y},\bar{y}) \le \max \xi_{ka} \cdot F(\bar{y},y_i) < \min \bigcup_{x\in X_0} \xi_{ka} \cdot F(x,x)$$

即，

$$\xi_{ka} \cdot (F(\bar{y},\bar{y})) \cap \left(\bigcup_{x\in X_0} \xi_{ka} \cdot F(x,x) + R_+ \right) = \varnothing$$

由 Q 的定义得，$\bar{y} \notin Q(\bar{y})$ 这与 $y \in Q(y)$，$\forall y \in X_0$ 矛盾。所以，$Q(y)$ 为一个 KKM 映象。

由 *Fan-KKM* 定理可知，$\exists \bar{x} \in X_0$，s.t.，

$$\xi_{ka} \cdot F(\bar{x},X_0) \cap \left(\bigcup_{x\in X_0} \xi_{ka} \cdot F(x,x) + R_+ \right) \ne \varnothing$$

其次，证明 $\exists \bar{x} \in X_0$，s.t.，

$$F(\bar{x},X_0) \cap \left(\bigcup_{x\in X_0} F(x,x) + S \right) \ne \varnothing \tag{3.2}$$

事实上，如果 $z \notin \bigcup_{x\in X_0} F(x,x) + S$，*i.e.*，

$$(z - S) \cap \left(\bigcup_{x\in X_0} F(x,x) \right) = \varnothing$$

又因为

$$\xi_{kz}(u) > 0，\ \forall u \in \left(\bigcup_{x\in X_0} F(x,x) \right)$$

根据(3.1)可知 $\exists \bar{x} \in X_0$，s.t.，$F(\bar{x},X_0) \cap \left(\bigcup_{x\in X_0} F(x,x) + S \right) \ne \varnothing$

$$\xi_{kz} \cdot F(\bar{x},X_0) \cap \operatorname{int} R_+ \ne \varnothing$$

也就是说

$$\xi_{kz}(w) > 0，\ \exists w \in F(\bar{x},X_0)$$

再由引理 2.2 可知

$$z \notin w + S$$

因此

$$z \notin F(\bar{x},X_0)$$

最后，证明(SVEP)有解。

$$\exists \bar{x} \in X_0,\ \text{s.t.},\ F(\bar{x},y) \not\subset (-S \setminus \{\theta\}),\ \forall y \in X_0$$

$$F(\bar{x},X_0) \cap (V \setminus \{-S \setminus \{\theta\}\}) \ne \varnothing \quad i.e.,$$

$$\exists \bar{x} \in X_0,\ \text{s.t.}$$

$$F(\bar{x},y) \not\subset (-S \setminus \{\theta\}),\ \forall y \in X_0$$

定理 3.1 证闭。

注 2：下面举例说明定理 3.1 是可行的。

例 2：设 $F: R\times R\to 2^R$ 是一个集值映射，$S=R_+$。F 的定义如下：

$$F(x,y)=\{y\}\times\left[x,x^3+2\right]$$

显然，$F(x,y)$ 满足定理 2.1 中条件 1、2。令 $y=x$，得 $\bigcup_{x\in X_0}F(x,x)=\bigcup_{x\in[-1,1]}\left[x^2,x\left(x^3+2\right)\right]$，经简单计算，显然 $\bar{x}=0$ 为解。

注 3：在文献[2]中也讨论了类似的问题，但模型与文献中不同，下面举例说明。

例 3：设 $X_0=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$，$S=R_+^2$，$V=R^2$，$F(x,y)=\{y\}\times[0,x+1]$，这里 F 的连续性和凸性可以保证。另外，$\bigcup_{x\in X_0}F(x,x)\subset\{(x,y)\,|\,x\le 0,y\ge 0\}\subset V\setminus\{-S\setminus\{\theta\}\}$。事实上，取 $\bar{x}=-\frac{1}{2}$，$F\left(-\frac{1}{2},y\right)=\{y\}\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\not\subset -S\setminus\{\theta\}$，$\forall y\in X_0$；*i.e.*，$\bar{x}$ 为定理 2.1 的解。然而由简单计算可知，$F(x,X_0)\cap\{-S\setminus\{\theta\}\}=\left\{(x,0)\,|\,-1\le x\le -\frac{1}{2}\right\}\ne\varnothing$。这样，对 $\forall x\in X_0$，x 都不是文献[2]中模型的解。因此，定理 3.1 与文献中相应的结论是不同的。

定理 3.2 设 X_0 是 X 上的一个非空凸子集，$F: X_0\times X_0\to 2^V$ 是一个集值映射，若满足下列条件：

1) 对 $\forall y\in X_0$，$F(x,y)$ 是 X 上的 S-拟上半连续，$F(x,x)$ 是 S-拟下半连续；

2) 对 $\forall x\in X_0$，$F(x,\cdot)$ 是 X_0 上的自然 S-拟凸；

3) $co\left(\bigcup_{x\in X_0}F(x,x)\right)\subset V\setminus\{-S\setminus\{\theta\}\}$；

则集向量均衡问题(SVEP)有解。

证明：设 $s^*\in S^*\setminus\{\theta\}$，首先我们证明 $\exists\bar{x}\in X_0$，

$$\text{s.t.}\quad s^*\cdot F(\bar{x},X_0)\cap\left\{\bigcup_{x\in X_0}s^*\cdot F(x,x)+R_+\right\}\ne\varnothing \tag{3.3}$$

构造集值映象 $T: X_0\to X_0$

$$T(y)=\left\{x\in X_0: s^*\cdot F(x,y)\cap\left(\bigcup_{x\in X_0}s^*\cdot F(x,x)+R_+\right)\ne\varnothing\right\},\quad y\in X_0$$

1) 对 $\forall y\in X_0$，都有 $y\in T(y)$，即 $T(y)\ne\varnothing$，$\forall y\in X_0$。

2) 又因为 $T(y)$ 为一个紧集，$\forall y\in X_0$，且 X_0 是紧的，故仅需证 $T(y)$ 为闭集即可。

由 T 的定义可知

$$T(y)=\left\{x\in X_0:\exists z\in\xi_{ka}\cdot F(x,y),\text{s.t. } z\ge\min\bigcup_{x\in X_0}\xi_{ka}\cdot F(x,x)\right\},\quad y\in X_0$$

再由 F 的连续性以及 T 的定义可得 $T(y)$ 为闭集。

3) 下面证明 $T(y)$ 为一个 KKM 映象。

因为具有 s^* 单调性，所以由 *Fan-KKM* 定理与定理 3.1 可知，(3.3)成立。

其次，我们证明 $\exists x_0\in X_0$，s.t.

$$F(\bar{x},X_0)\cap\left(co\left(\bigcup_{x\in X_0}F(x,x)\right)+S\right)\ne\varnothing,\quad\forall y\in X_0 \tag{3.4}$$

事实上，假设

$$z \notin co\left(\bigcup_{x \in X_0} F(x,x)\right) + S,$$

即，

$$(z - S) \cap co\left(\bigcup_{x \in X_0} F(x,x)\right) = \varnothing$$

因此，由强凸分离定理可知，存在非零线性泛函 s^*（$s^* \neq 0$），s.t.

$$s^*(z-s) \leq s^*(u), \ \forall u \in co\left(\bigcup_{x \in X_0} F(x,x)\right), \ s \in S \tag{3.5}$$

由(3.5)可知 $s^*(z-s) \leq s^*(ts) = ts^*(s)$， $\forall t \geq 0, s \in S$。又因为 $s^* \in S^* \setminus \{\theta\}$，所以 $s^*(s) \geq 0$。若不然，$\exists s \in S$， s.t. $s^*(s) < 0$，当 $ts^*(s) \to -\infty$， $t \to \infty$ 时， $s^*(z-s) \leq ts^*(s)$ 与矛盾。

由(3.5)可知，取 $s = 0$ 得

$$s^*(z) < s^*(u), \ \forall u \cap co\left(\bigcup_{x \in X_0} F(x,x)\right) \neq \varnothing$$

由(3.3)得。$\exists x_0 \in X_0$，

$$\text{s.t.} \quad s^*(w) > s^*(z), \ \forall w \cap F(\bar{x}, X_0) \neq \varnothing$$

又因为 s^* 单调递增，所以

$$z \cap (F(\bar{x}, X_0) + S) = \varnothing$$

(3.4)得证。

下面类似于定理 3.1 中的证明。

定理 3.2 证闭。

致　谢

笔者衷心感谢导师张宇副教授指导与帮助。

基金项目

国家自然科学资助项目(基金名称：集值极大极小问题与集值博弈问题研究，编号：11901511，主持人：张宇)。

参考文献

[1] Bigi, G., Capătă, A. and Kassay, G. (2012) Existence Results for Strong Vector Equilibrium Problems and Their Applications. Optimization, 567-583. https://doi.org/10.1080/02331934.2010.528761

[2] Chen, T., Zou, S.F. and Zhang. Y. (2019) New Existence Theorems for Vector Equilibrium Problems with Set-Valued Mappings. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, **2019**, Article ID: 45. https://doi.org/10.23952/jnfa.2019.45

[3] Lin, Y.C. (2009) On Generalized Vector Equilibrium Problems. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1040-1048. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.01.030

[4] Gong. X.H. (2001) Efficiency and Heing Efficiency for Vector Equilibrium Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **108**, 139-154. https://doi.org/10.1023/A:1026418122905

[5] Kien, B.T., Wong, N.C. and Yao, J.C. (2008) Generalized Vector Variational Inequalities with Star-Pseudomonotone and Discontinuous Operators. *Nonlinear Analysis*, **68**, 2859-2871. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.02.032

[6] Zhang, Y., Li, S.J. and Li. M.H. (2012) Minimax Inequalities for Set-Valued Mappings. *Positivity*, **16**, 751-770. https://doi.org/10.1007/s11117-011-0144-6

[7] Han, Y. and Huang. N.J. (2018) Existence and Connectedness of Solutions for Generalized Vector Quasiequilibrium Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **179**, 65-85. https://doi.org/10.1007/s10957-016-1032-9

[8] Li, S.J., Chen, G. and Yang. X.Q. (2003) Generalized Minimax Inequalities for Set-Valued Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 707-723. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00197-5

[9] Zhang, Y. and Li, S.J. (2014) Generalized Ky Fan Minimax Inequalities for Set-Valued Mappings. *Fixed Point Theory*, **15**, 609-622.

[10] 张宇. 集值极大极小定理与集值博弈问题[M]. 31 版. 北京: 科学出版社, 2018.

[11] Fan, KY. (1961) A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem. *Mathematische Annalen*, **142**, 303-310. https://doi.org/10.1007/BF01353421

[12] Gerstewitz, C. (1986) Nichtkonvexe trennungssätze und deren anwendung in der theorie der vektoroptimierung. Seminarberichteder Secktion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 19-31.

[13] Certh, C. and Weidner, P. (1990) Nonconvex Separation Theorems and Some Applications in Vector Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **67**, 297-320. https://doi.org/10.1007/BF00940478