Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 459-466
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84061

Hans汉斯

Orbifold K-Theory of Point Orbifolds

Yiwu Lin

School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: linyiwu@tom.com

Received: Jul. 1st, 2018; accepted: Jul. 16th, 2018; published: Jul. 24th, 2018

Abstract

In this paper we study the point orbifold, and calculate some kinds of ring structure of point orrbifolds. Then we compare the difference among these ring structures.

Keywords

Orbifold Bundle, Groupoid, Point Orbifold, Orbifold K-Theory, Representation of Finite Group, Character

点群胚的Orbifold K-理论

林奕武

广东金融学院，金融数学与统计学院，广东 广州
Email: linyiwu@tom.com

收稿日期：2018年7月1日；录用日期：2018年7月16日；发布日期：2018年7月24日

摘 要

本文以点群胚为例子，计算点群胚上Orbifold K-理论的几类环结构，并且比较这几类环结构之间的差异。

关键词

Orbifold丛，群胚，点群胚，Orbifold K-理论，有限群表示，特征标

文章引用：林奕武. 点群胚的 Orbifold K-理论[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 459-466. DOI: 10.12677/pm.2018.84061

1. 引言

Orbifold K-理论是 Adem 和 Ruan [1]首先提出来的。他们把 orbifold X 上的 orbifold K-理论 $K_{orb}(X)$ 定义为 orbifold X 上所有 orbifold 丛的等价类构成的 Grothendieck 群。若 X 是一个 global quotient $[X/G]$，则 $K_{orb}(X)$ 刚好是等变 K-理论 $K_G(X)$。给定一个 twisting $\alpha: G\times G\to \mathbf{C}$，Adem 和 Ruan [1]还定义了 twisted orbifold K-理论，但是他们并没有给出两类 orbifold K-理论的环结构。

设 X 为一个紧致的近复 orbifold，Adem，Ruan 和 Zhang [2]考虑 X 上的 inertia orbifold ΛX，定义了 ΛX 上的 twisted orbifold K-理论 ${}^{\alpha}K_{orb}(\Lambda X)$ 的环结构 $\bullet_{ARZ}$，并称之为弦积。对于非 twisted 的情形，Hu 和 Wang [HW]定义了 orbifold K-理论 $K_{orb}(X)$ 的乘法 $\bullet_{HW}$。他们通过限制映射

$$e^{*}: K_{orb}(X)\to K_{orb}(\Lambda X),$$

把 $\alpha_1,\alpha_2\in K_{orb}(X)$ 限制在 ΛX 的每个分支上。在 $K_{orb}(\Lambda X)$ 上做弦积，然后利用 e^{*} 的左逆 $e_{\#}$ 拉回到 $K_{orb}(X)$ 上。即

$$\alpha_1\bullet_{HW}\alpha_2 = e_{\#}\left(e^{*}\alpha_1\bullet_{ARZ}e^{*}\alpha_2\right).$$

对于 twisted 的情形，Lin [L]把 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 分解到 $K_{orb}(\Lambda X)$ 上。这里 $K_{orb}(\Lambda X)$ 是平常的 K-理论。然后在 $K_{orb}(\Lambda X)$ 上构造新的乘法，再拉回到 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 上，得到 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 的环结构。

本文以点群胚 $\bullet^{G}$ 为例子，计算 orbifold K-理论上述两种环结构，并比较它们之间的差异。由于 G 是有限群，$K_{orb}(\bullet^{G})$ 与群代数 $\mathbf{C}G$ 是线性同构的。$K_{orb}(\bullet^{G})$ 中的每一个元都是一个 G 表示。因此，计算环结构的时候可以充分利用有限群表示的理论。比如特征表的正交性等。本文得到的主要结论为定理 3.1 和定理 3.7：

定理 3.1 设 $V,W\in K_{orb}(\bullet^{G})$，则 $V\bullet_{HW}W=|G|V\otimes W$。

定理 3.7 若 $(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)\in K_{orb}(\bullet^{G})$ 且 $(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)$ 不可约，则

$$(V_1,\pi_1)\bullet_{L}(V_2,\pi_2)=\begin{cases}0, & \pi_1\neq\pi_2,\\ \dfrac{|G|}{n}(V_1,\pi_1), & \pi_1=\pi_2.\end{cases}$$

其中 $n=\dim V_1$。

2. 准备知识

本节主要介绍 Orbifold K-理论，弦积等概念，以及 $K_{orb}(\bullet^{G})$ 中两种环结构的定义。这些概念主要来自于[1] [2] [4]和[5]。

定义 2.1 [1]设 X 是一个紧致的 orbifold，我们称 X 上所有 orbifold 丛的等价类构成的 Grothendieck 群为 X 上的 orbifold K-理论。记为 $K_{orb}(X)$。

若 X 是一个 global quotient $[X/G]$，则 $K_{orb}(X)$ 刚好是 $K_G(X)$。这里 $K_G(X)$ 是等变 K-理论，详见[6]。若 $\alpha: G\times G\to\mathbf{C}$ 是一个 twisting，global quotient $[X/G]$ 上的 twisted orbifold K-理论定义如下。

定义 2.2 [1] $[X/G]$ 上的 twisted orbifold K-理论定义为所有 α-twisted G-等变丛的等价类构成的 Grothendieck 群。记为 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 或 ${}^{\alpha}K_G(X)$。

Orbifold X 的每一个不动子集 $X_{(g)}$ 上都有自然的 orbifold 结构。因此 X 可对应一个更大的 orbifold $\Lambda X=\coprod_{(g)}X_{(g)}$。称之为 X 的 inertia orbifold。Adem，Ruan 和 Zhang [2]定义了 ${}^{\alpha}K_{orb}(\Lambda X)$ 上的弦积 $\bullet_{ARZ}$。对任意 $\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\in{}^{\alpha}K_{orb}(\Lambda X)$，

$$\tilde{\beta}\bullet_{ARZ}\tilde{\gamma}=(e_{12})_*\left(e_1^*\tilde{\beta}\otimes e_2^*\tilde{\gamma}\otimes\lambda_{-1}\left(E^{(2)}\right)\right),$$

其中 e_1,e_2,e_{12} 分别为

$$\begin{aligned}e_1:(\Lambda X)^{(2)}&\to\Lambda X,\\ (x,(g,h))&\mapsto(x,g);\\ e_2:(\Lambda X)^{(2)}&\to\Lambda X,\\ (x,(g,h))&\mapsto(x,h);\\ e_{12}:(\Lambda X)^{(2)}&\to\Lambda X,\\ (x,(g,h))&\mapsto(x,gh).\end{aligned}$$

$E^{(2)}$ 为 $(\Lambda X)^{(2)}$ 上的阻碍丛。

在非 twisted 的情形，Hu 和 Wang [4]利用弦积构造上的环同构。记

$$e=\coprod_{(g)}e_{(g)}:\Lambda X\to X.$$

在其中 $e_{(g)}$ 为每个分支 $X_{(g)}$ 往 X 的嵌入映射。Hu 和 Wang [4]构造

$$e^*:K_{orb}(X)\to K_{orb}(\Lambda X)$$

的左逆

$$e_\#:K_{orb}(\Lambda X)\to K_{orb}(X).$$

$K_{orb}(X)$ 上的环结构 $\bullet_{HW}$ 如下定义，对任意 $\beta,\gamma\in K_{orb}(X)$，

$$\beta\bullet_{HW}\gamma=e_\#\left(e^*\beta\bullet_{ARZ}e^*\gamma\right).$$

对于 global quotient $[X/G]$ 和 twisting $\alpha:G\times G\to\mathbf{C}$，Lin [L]在 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 上定义了乘法 $\bullet_L$。记

$$\begin{aligned}\varphi:{}^{\alpha}K_{orb}(X)&\to\oplus_{g\in G}K\left(X^g\right)\otimes\mathbf{C},\\ E&\mapsto\oplus_{g\in G}E_g.\end{aligned}$$

其中 $E_g=\sum_{\xi}\xi E_{\xi}$，$\xi$ 为 g 的特征值，E_{ξ} 为 g 的属于 ξ 的特征丛。则在 φ 之下，

$${}^{\alpha}K_{orb}(X)\cong\left(\oplus_{g\in G}K\left(X^g\right)\otimes\mathbf{C}\right)^{G_\alpha}.$$

类似[2]，构造 $\left(\oplus_{g\in G}K\left(X^g\right)\otimes\mathbf{C}\right)^{G_\alpha}$ 的乘法如下，对任意 $\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\in\left(\oplus_{g\in G}K\left(X^g\right)\otimes\mathbf{C}\right)^{G_\alpha}$，

$$\tilde{\beta}\bullet\tilde{\gamma}=(e_{12})_*\left(e_1^*\tilde{\beta}\otimes e_2^*\tilde{\gamma}\otimes\lambda_{-1}\left(E^{(2)}\right)\right),$$

φ 把这个乘法拉回到 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 上，便得到 ${}^{\alpha}K_{orb}(X)$ 的乘法 $\bullet_L$。即对于任意 $\beta,\gamma\in{}^{\alpha}K_{orb}(X)$，

$$\beta\bullet_L\gamma=\varphi^{-1}\left(\varphi(\beta)\bullet\varphi(\gamma)\right).$$

3. 几类 Orbifold K-理论的环结构

对于 Orbifold 群胚，$\Gamma=(G_0,G_1)$。若像空间 G_0 为一个单点，记为 $\bullet$。则态空间 G_1 为有限群，记为 G。此时，称 $\Gamma=(G_0,G_1)$ 为点群胚，或称为点 Orbifold，记为 $\bullet^G$。点群胚虽然简单，但它们是 Orbifold 理论中重要的例子。

本节以点群胚 $\bullet^G$ 为例子，利用表示论的方法，计算 Orbifold K-理论的环结构 $\bullet_{HW}$ 和 $\bullet_L$。$\bullet^G$ 上所有的

orbifold 从与 G 的表示群是一一对应的。我们的计算主要运用了特征标的正交性。

3.1. 一般 Orbifold K-理论的环结构 $\bullet_{HW}$

$\bullet^G$ 的 inertia orbifold 为 $\Lambda\bullet^G=(G,G\times G)$。其源映射和靶映射分别为

$$\begin{aligned}s:G\times G&\to G,\\(g,h)&\mapsto g;\\t:G\times G&\to G,\\(g,h)&\mapsto h.\end{aligned}$$

即 $\Lambda\bullet^G=(G,G\times G)$ 等价于 global quotient $[G/G]$。其中 G 在自身的作用为 $g\bullet h=g^{-1}hg$。因此，我们有

$$K_{orb}\left(\Lambda\bullet^G\right)\cong K_G(G).$$

根据文[2]，对任意 $\tilde{V}=\oplus_{g\in G}\tilde{V}_g,\tilde{W}=\oplus_{g\in G}\tilde{W}_g\in K_{orb}\left(\Lambda\bullet^G\right)$，

$$\tilde{V}\bullet_{ARZ}\tilde{W}=\oplus_{g\in G}\left(\oplus_{h\in G}\tilde{V}_h\otimes\tilde{W}_{h^{-1}g}\right).$$

任取 $(V,\pi_1),(W,\pi_2)\in K_{orb}\left(\bullet^G\right)$，记 V_g,W_g 分别为 V,W 在 X_g 上的限制。根据 Hu 和 Wang [4]，

$$\begin{aligned}V\bullet_{HW}W&=e_{\#}\left(e^*V\bullet_{ARZ}e^*W\right)\\&=e_{\#}\left(\left(\oplus_{g\in G}V_g\right)\bullet_{ARZ}\left(\oplus_{g\in G}W_g\right)\right)\\&=e_{\#}\left(\oplus_{g,h\in G}V_h\otimes W_{h^{-1}g}\right)\\&=|G|V\otimes W\end{aligned}$$

因此，我们有

定理 3.1 设 $V,W\in K_{orb}\left(\bullet^G\right)$，则 $V\bullet_{HW}W=|G|V\otimes W$。

3.2. 一般 Orbifold K-理论的环结构 $\bullet_L$

接着，我们计算 $K_{orb}\left(\bullet^G\right)$ 上的另一个环结构 $\bullet_L$。我们需要用到表示论的技巧，主要是特征标的正定性。

设 $(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)$ 为 G 的两个不可约表示，χ_1,χ_2 分别为它们的特征标，则有正交性定理

定理 3.2 设

$$(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_1(g)}\chi_2(g)=\begin{cases}1, & \chi_1=\chi_2,\\0, & \chi_1\neq\chi_2.\end{cases}$$

由 π_1,π_2 可以构造线性变换

$$\phi_{\pi_1,\pi_2}=\frac{1}{|G|}\sum_g\pi_1^*(g)\pi_2(g):V_1^*\otimes V_2\to V_1^*\otimes V_2.$$

则对任意 $h\in G$，

$$\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\left(\pi_1^*(h)\pi_2(h)\right)=\phi_{\pi_1,\pi_2}.$$

所以

$$\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\phi_{\pi_1,\pi_2}=\phi_{\pi_1,\pi_2}.$$

因此有

命题 3.3 ϕ_{π_1,π_2} 至多只有两个特征值：0 和 1。

若 $\pi_1 \neq \pi_2$，则由特征标的正交性，有

$$tr\phi_{\pi_1,\pi_2} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*\otimes V_2}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = 0 .$$

所以得到以下定理，

定理 3.4 若 $\pi_1 \neq \pi_2$，则 ϕ_{π_1,π_2} 为一个 0 映射。

若 $\pi_1 = \pi_2$。记 $\pi \doteq \pi_1 = \pi_2$，$V \doteq V_1 = V_2$，$\phi \doteq \phi_{\pi_1,\pi_2}$。取 V 中的一个规范正交基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 使得对任意 $g \in G$，$\pi(g)$ 都为酉矩阵。取 $v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*$ 为其对偶基，则 $\pi^*(g) = \left(\pi(g)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \pi(g)$。

命题 3.5 ϕ 的迹和秩都为 1。

证明:

$$\begin{aligned} tr\phi &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*\otimes V_2}(g) = \frac{1}{|G|}\chi_{V^*}(g)\chi_V(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\overline{\chi_V(g)}\chi_V(g) = 1 \end{aligned}$$

由命题 3.3 知，ϕ 的秩为 1。

因为对任意 $g \in G$，$\pi(g)$ 都是酉矩阵。则有

$$\phi\left(v_1^* \otimes v_1 + v_2^* \otimes v_2 + \cdots + v_n^* \otimes v_n\right) = v_1^* \otimes v_1 + v_2^* \otimes v_2 + \cdots + v_n^* \otimes v_n .$$

若

$$\phi\left(v_1^* \otimes v_1\right) = a_1 v_1^* \otimes v_1 + a_2 v_2^* \otimes v_2 + \cdots + a_n v_n^* \otimes v_n ,$$

则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 .$$

因此我们得到下面定理，

定理 3.6

$$\phi\left(v_i^* \otimes v_j\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left(v_1^* \otimes v_1 + v_2^* \otimes v_2 + \cdots + v_n^* \otimes v_n\right), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

下面我们开始计算 $K_{orb}\left(\bullet^G\right)$ 上的另一个环结构 $\bullet_L$。$K_{orb}\left(\bullet^G\right)$ 中的每一个丛都是一个 G 表示，因此我们只考虑不可约的 G 表示。

设 $(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)$ 为两个不可约的 G 表示，则

$$\varphi(V_1,\pi_1) = \sum_{g\in G}\chi_1(g)V_g,$$
$$\varphi(V_2,\pi_2) = \sum_{g\in G}\chi_2(g)V_g$$

所以，

$$\varphi(V_1,\pi_1)\varphi(V_2,\pi_2) = \left(\sum_{g\in G}\chi_1(g)V_g\right)\left(\sum_{g\in G}\chi_2(g)V_g\right) = \sum_{h\in G}\left(\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2(gh)V_h\right)$$

其中，

$$\begin{aligned}&\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2\left(gh\right)\\&=\sum_{g\in G}\chi_1^*\left(g\right)\chi_2\left(gh\right)\\&=\sum_{g\in G}tr\left(\pi_1^*\left(g\right)\right)\bullet tr\left(\pi_2\left(g\right)\pi_2\left(h\right)\right)\\&=\sum_{g\in G}tr\left[\left(\pi_1^*\left(g\right)\otimes\pi_2\left(g\right)\right)\bullet\left(\pi_1\left(1\right)\otimes\pi_2\left(h\right)\right)\right]\\&=\left|G\right|tr\left[\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\left(\pi_1\left(1\right)\otimes\pi_2\left(h\right)\right)\right]\end{aligned}$$

若 $\pi_1\neq\pi_2$，则 $\phi_{\pi_1,\pi_2}=0$，因此 $\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2\left(gh\right)=0$。

若 $\pi_1=\pi_2$，取规范正交基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$。对于任意 i,j，

$$\begin{aligned}&\phi\circ\left(\pi^*\left(1\right)\otimes\pi\left(h\right)\right)\left(v_i^*\otimes v_j\right)\\&=\phi\left(v_i^*\otimes\sum_{k=1}^{n}h_{kj}v_k\right)=\sum_{k=1}^{n}h_{kj}\phi\left(v_i^*\otimes v_k\right)\\&=h_{ij}\frac{1}{n}\left(v_1^*\otimes v_1+v_2^*\otimes v_2+\cdots+v_n^*\otimes v_n\right)\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}&\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2\left(gh\right)\\&=\left|G\right|tr\left[\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\left(\pi_1\left(1\right)\otimes\pi_2\left(h\right)\right)\right]\\&=\frac{\left|G\right|}{n}\left(h_{11}+h_{22}+\cdots+h_{nn}\right)\\&=\frac{\left|G\right|}{n}\chi\left(h\right)\end{aligned}$$

定理 3.7 若 $\left(V_1,\pi_1\right),\left(V_2,\pi_2\right)\in K_{orb}\left(\bullet^G\right)$ 且 $\left(V_1,\pi_1\right),\left(V_2,\pi_2\right)$ 不可约，则

$$\left(V_1,\pi_1\right)\bullet_L\left(V_2,\pi_2\right)=\begin{cases}0, & \pi_1\neq\pi_2,\\ \dfrac{\left|G\right|}{n}\left(V_1,\pi_1\right), & \pi_1=\pi_2.\end{cases}$$

其中 $n=\dim V_1$。

证明：若 $\pi_1\neq\pi_2$，由于 $\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2\left(gh\right)=0$，则

$$\left(V_1,\pi_1\right)\bullet_L\left(V_2,\pi_2\right)=\varphi^{-1}\left(\varphi\left(V_1,\pi_1\right)\bullet\varphi\left(V_2,\pi_2\right)\right)=0.$$

若 $\pi_1=\pi_2$，由于 $\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2\left(gh\right)=\frac{\left|G\right|}{n}\chi\left(h\right)$，则 $\left(V_1,\pi_1\right)\bullet_L\left(V_2,\pi_2\right)=\varphi^{-1}\left(\frac{\left|G\right|}{n}\chi\left(h\right)\right)V_h=\frac{\left|G\right|}{n}\left(V_1,\pi_1\right)$。

证毕

3.3. α-Twisted Orbifold K-理论的环结构 $\bullet_L$

对于 α -twisted orbifold K-理论 ${}^{\alpha}K_{orb}\left(\bullet^G\right)$。根据[5]，存在线性同构

$$\varphi :^{\alpha} K_{orb}\left(\bullet^{G}\right) \to \left(K(G)\right)^{G_\alpha},$$

且$\left(K(G)\right)^{G_\alpha}$上的乘法为：对任意$\sum_{g\in G} a_g V_g$，$\sum_{h\in G} a_h V_h \in \left(K(G)\right)^{G_\alpha}$，

$$\left(\sum_{g\in G} a_g V_g\right)\bullet\left(\sum_{h\in G} a_h V_h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h \frac{1}{\alpha(g,h)} V_{gh}。$$

因此${}^{\alpha}K_{orb}\left(\bullet^{G}\right)$上的乘法为，对任意$(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)\in {}^{\alpha}K_{orb}\left(\bullet^{G}\right)$，

$$\begin{aligned}
&(V_1,\pi_1)\bullet_L(V_2,\pi_2)\\
&=\varphi^{-1}\left(\varphi(V_1,\pi_1)\bullet\varphi(V_2,\pi_2)\right)\\
&=\varphi^{-1}\left[\left(\sum_{g\in G}\chi_1(g)V_g\right)\otimes\left(\sum_{g\in G}\chi_2(g)V_g\right)\right]\\
&=\varphi^{-1}\left[\sum_{h\in G}\left(\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2(gh)\frac{1}{\alpha\left(g^{-1},gh\right)}\right)V_h\right]
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in G}\chi_1\left(g^{-1}\right)\chi_2(gh)\frac{1}{\alpha\left(g^{-1},gh\right)}\\
&=\sum_{g\in G} tr\pi_1\left(g^{-1}\right) tr\pi_2(gh)\frac{1}{\alpha\left(g^{-1},gh\right)}\\
&=\sum_{g\in G} tr\left(\alpha\left(g,g^{-1}\right)\pi_1^*(g)\right) tr\left(\frac{1}{\alpha(g,h)}\pi_2(g)\pi_2(h)\right)\frac{1}{\alpha\left(g^{-1},gh\right)}\\
&=\sum_{g\in G} tr\left(\pi_1^*(g)\right) tr\left(\pi_2(g)\pi_2(h)\right)\frac{\alpha\left(g,g^{-1}\right)}{\alpha(g,h)\alpha\left(g^{-1},gh\right)}\\
&=\sum_{g\in G} tr\left(\pi_1^*(g)\right) tr\left(\pi_2(g)\pi_2(h)\right)\\
&=\sum_{g\in G} tr\left[\left(\pi_1^*(g)\otimes\pi_2(g)\right)\left(\pi_1^*(1)\pi_2(h)\right)\right]\\
&=|G|\,tr\left[\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\left(\pi_1^*\otimes\pi_2(h)\right)\right]
\end{aligned}$$

根据[3]，对于α -twisted 的情形，同样有

$$|G|\,tr\left[\phi_{\pi_1,\pi_2}\circ\left(\pi_1^*\otimes\pi_2(h)\right)\right]=\begin{cases}0, & \pi_1\neq\pi_2,\\ \dfrac{|G|}{n}\chi_1(h), & \pi_1=\pi_2.\end{cases}$$

因此，我们有

定理 3.8 若$(V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2)$为不可约的α -twisted G 表示，则

$$(V_1,\pi_1)\bullet_L(V_2,\pi_2)=\begin{cases}0, & \pi_1\neq\pi_2,\\ \dfrac{|G|}{n}(V_1,\pi_1), & \pi_1=\pi_2.\end{cases}$$

其中$n=\dim V_1$。

证明：类似定理 3.7。

参考文献

[1] Adem, A. and Ruan, Y. (2003) Twisted Orbifold K-Theory. *Communications in Mathematical Physics*, **237**, 533-556. https://doi.org/10.1007/s00220-003-0849-x

[2] Adem, A., Ruan, Y. and Zhang, B. (2007) A Stringy Product on Twisted Orbifold K-Theory. *Morfismos*, **11**, 33-64.

[3] Cheng, C. (2015) A Character Theory for Projective Representations of Finite Groups. *Linear Algebra and Its Applications*, **469**, 230-242. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.11.027

[4] Hu, J. and Wang, B.-L. (2013) Delocalized Chern Character for Stringy Orbifold K-Theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, **365**, 6309-6341. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05834-5

[5] Lin, Y. (2017) Twisted Orbifold K-Theory for Global Quotient. *Topology and Its Applications*, **225**, 9-26. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.03.010

[6] Segal, G.B. (1968) Equivariant K-Theory. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **34**, 129-151. https://doi.org/10.1007/BF02684593