

复杂载荷环境变厚度功能梯度组合梁镍钛合金 钢丝绳非线性减振分析

马广才, 臧 健, 宋旭圆, 张 振

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2024年5月20日; 录用日期: 2024年6月18日; 发布日期: 2024年6月29日

摘 要

本文对弹性边界和热环境下带有镍钛合金钢丝绳(NiTi-ST)的变厚度功能梯度材料组合梁(FGMs)的力学性能和非线性振动控制进行了研究。根据Euler-Bernoulli假设, 建立了带有镍钛合金钢丝绳的变厚度功能梯度材料组合梁的能量表达式。基于瑞利-里茨法, 求解了弹性边界和热环境下的变厚度功能梯度材料组合梁的固有频率和模态函数。通过有限元法(FEM)和理论结果比较, 验证了理论方法的正确性和收敛性, 讨论了梁的厚度参数和环境的温度对系统固有特性的影响。此外, 利用拉格朗日方程, 推导了系统的动力学方程。应用谐波平衡法求得系统的幅频响应曲线, 研究了镍钛合金钢丝绳的非线性减振性能。

关键词

变厚度功能梯度材料组合梁, 镍钛合金钢丝绳, 非线性振动控制, 热环境

Nonlinear Vibration Damping Analysis of Variable Thickness FGMs Combined Beams with NiTi-ST in Complex Load Environment

Guangcai Ma, Jian Zang, Xuyuan Song, Zhen Zhang

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 20th, 2024; accepted: Jun. 18th, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

In this paper, the mechanical properties and nonlinear vibration control of variable thickness

文章引用: 马广才, 臧健, 宋旭圆, 张振. 复杂载荷环境变厚度功能梯度组合梁镍钛合金钢丝绳非线性减振分析[J]. 声学 & 振动, 2024, 12(2): 53-62. DOI: 10.12677/ojav.2024.122005

FGMs combined beams with NiTi-ST under elastic boundary and thermal environment are investigated. According to the Euler-Bernoulli hypothesis, the energy expression of the variable thickness FGMs combined beam with NiTi-ST is established. Based on the Rayleigh-Ritz method, the modal function and natural frequency of the variable thickness FGMs combined beams under elastic boundary and thermal environment is solved. The correctness and convergence of the theoretical method are verified by the comparison of FEM and theoretical results, and discussed the influence of thickness parameters and temperature on the natural characteristics of the system. Furthermore, utilizing the Lagrange equation, the dynamics differential equation of the system is obtained. The amplitude-frequency curve of system is solved by the harmonic balance method, and investigated the nonlinear damping performance of the NiTi-ST.

Keywords

Variable Thickness Combined Beams, NiTiNOL-Steel Wire Ropes, Nonlinear Vibration Control, Thermal Circumstance

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

与传统的各向同性材料相比,功能梯度材料可以提供更突出的力学性能,由于其良好的耐热性能和机械性能,在航空航天领域有广泛的应用。有别于简单的功能梯度梁结构,组合梁结构有着优越的工程适用性。然而航空航天领域中飞机在高速飞行过程中,机翼受空气动力影响会产生一定的振动,对飞行安全产生不利的影响,微弱的有害振动就可能引起重大事故的发生,所以组合梁结构的振动分析与减振具有重要的意义。

目前,全球温室效应加剧,为了减少碳排放,新能源飞机也成为各国学者研究的热点[1] [2] [3],而变厚度组合梁结构广泛存在于航空飞行器中,如飞机的机翼。组合结构相比于简单结构应用范围广,更能应对复杂的环境条件,所以其研究引起学者们极大的兴趣。魏进[4]提出了获取系统全局模态的一般性解析方法,并研究了空间组合梁梁的动力学建模和动态响应。张坤[5]发现了一种等跨径连续组合梁桥的自振频率的快速计算方法,探讨了移动车辆荷载作用下钢-混组合梁桥动力学性能。牛国华等人[6]提出了一种基于组合变截面梁结构振动特性的计算方法,研究了组合变截面梁的自由振动特性分析。Zhang等[7]分析了组合梁的振动特性,并对三稳态压电能量阱进行了测试。Cao等人[8]利用建立的系统动力学模型,研究了几何非线性和非线性旋转频率的耦合非线性对三稳态旋转能量采集系统的动力学和能量特性的影响。从上述文献来看,关于变厚度功能梯度材料组合梁的建模过程还不够清晰,组合梁结构建模困难。因此,有必要建立简易明确的变厚度功能梯度材料组合梁动力学模型,并使其应用于广泛的工程研究中。

对于有害振动的减振问题,有很多种方式可用于减振。但是考虑到结构质量和温度在航空航天领域的限制,设计耐高温的轻质减振结构是至关重要的,镍钛合金钢丝绳恰好满足上述的条件。由于其良好的减振性能,引起诸多学者的关注。Carboni等人[9]采用现象学模型与差分进化算法相结合,对三类非线性系统的动力学响应进行了识别。Brewick等人[10]讨论了基于数据的镍钛合金钢丝绳的非线性识别和本构模型。Zang等人[11]推导了带有镍钛合金钢丝绳的功能梯度矩形板的动力学模型,并进行了非线性振

动分析。Zheng 等人[12]确定了镍钛合金钢丝绳与复合材料耦合的振动抑制效果和非线性行为。张博文等人[13]提出了一种新型阻尼装置镍钛合金钢丝绳，并研究了对湿热环境下功能梯度梁的振动控制。综上，镍钛合金钢丝绳在轻质结构非线性振动减振方面，具有良好的应用前景。并且是功能梯度材料梁减振的有效方式。

通过对已有研究的工作分析，尚存在诸多不足。例如热影响分析不明确，组合结构建模困难，变厚度功能梯度材料组合梁非线性减振研究不充分等。本文针对现有研究的不足，在复杂载荷环境下带有镍钛合金钢丝绳的变厚度功能梯度材料组合梁的非线性减振方面进行了研究分析。首先根据 Euler-Bernoulli 假设，建立了系统的统一能量表达式。通过瑞利 - 里茨法求解系统的模态函数，加载镍钛合金钢丝绳，再使用拉格朗日方程得到系统的动力学方程，并利用谐波平衡法求解动力学方程的近似解析解，最后使用 Ansys 等仿真软件，对系统进行模态分析，与理论固有频率解对比，证明了本文方法的收敛性和可用性。且利用谐波平衡法讨论了不同参数对镍钛钢丝绳的非线性减振特性的影响，并得出结论。

2. 动力学建模

2.1. 模型描述

图 1 所示为加载镍钛合金钢丝绳的变厚度功能梯度材料组合梁结构。图 2 为镍钛合金钢丝绳的示意图。变厚度功能梯度材料组合梁的两端通过一组刚度为 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 的弹簧连接固定，两根梁通过中间弹簧 k_5 、 k_6 连接。导入坐标系 $o-xz$ ，原点 o 固定在横梁 1 的中性面上。符号 l_1 、 l_2 、 b 、 h_1 、 h_2 分别表示横梁的长度、宽度和高度。在左梁的 x_0 点加载气动简谐外部激励 F 。在计算过程中，忽略了热环境对弹簧刚度的影响。

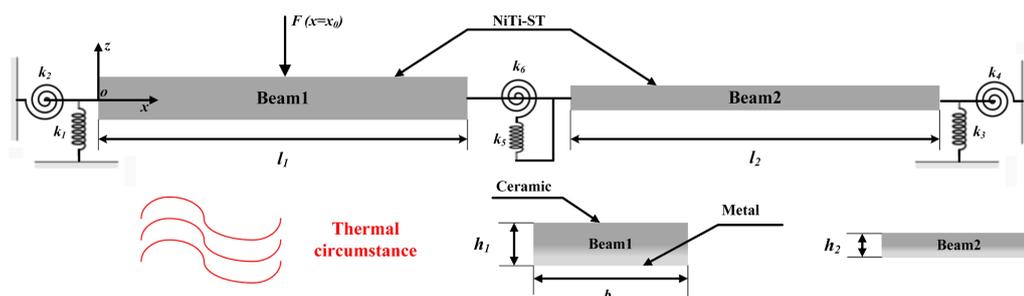


Figure 1. The model of variable thickness FGMs combined beams

图 1. 变厚度功能梯度组合梁模型

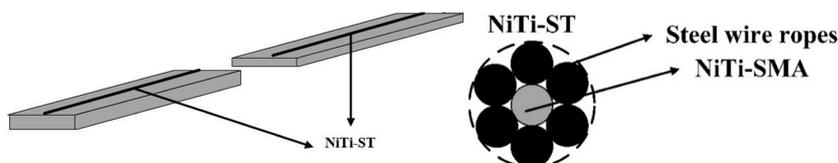


Figure 2. NiTi-ST diagram

图 2. 镍钛合金钢丝绳示意图

如图 1 所示，功能梯度材料由金属和陶瓷制成，材料属性(包括弹性模量 E 、泊松比 ν 、密度 ρ 、热膨胀系数 α_x)与温度相关，关系如下所示：

$$P(T) = P_0 (P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1)$$

P_0 、 P_1 、 P_2 和 P_3 是与温度有关的材料系数，且功能梯度的材料属性沿厚度方向变化：

$$P(T, z) = [P_0(T) - P_1(T)]((2z + h)/2h)^n + P_1(T) \quad (2)$$

式中: n 为材料的梯度指数。

2.2. 变厚度功能梯度材料组合梁的能量

2.2.1. 能量表示

如 2.1 节所示, 变厚度功能梯度组合梁系统中存在两根梁, 中间采用一系列人工弹簧连接。建模过程中, 可被视为独立的梁结构, 最后将所有能量进行相加。结构的势能可以写为:

$$U = \frac{1}{2} b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \sigma \varepsilon dx dz \quad (3)$$

根据 von Kármán 理论, 应力 σ 和应变 ε :

$$\sigma = Q \varepsilon \quad (4)$$

$$\varepsilon = -z (\partial w / \partial x) \quad (5)$$

式中: w 表示变厚度功能梯度材料组合梁的横向位移。 Q 是刚度系数, 表示为:

$$Q = E(z, t) / (1 - \nu^2) \quad (6)$$

式中: $E(z, t)$ 是杨氏模量, ν 是材料的泊松比。基于 Euler-Bernoulli 理论, 位移如下:

$$u_x = -z (\partial w / \partial x), u_z = w \quad (7)$$

式中: u_x 和 u_z 表示变厚度组合梁任意位置的轴向和横向位移。

根据文献[14], 热能可以写为:

$$U_T = \frac{1}{2} b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \sigma_T (\partial w / \partial x)^2 dx dz \quad (8)$$

热应力:

$$\sigma_T = Q \varepsilon_T \quad (9)$$

式中: 热应变 ε_T 可以表示为:

$$\varepsilon_T = \alpha_x \Delta T \quad (10)$$

式中: α_x 为 x 方向热膨胀系数, ΔT 是温度差。

根据胡克定律, 连接处弹簧势能:

$$U_k = \frac{1}{2} k_5 (w_{1c} - w_{2c})^2 + \frac{1}{2} k_6 (w'_{1c} - w'_{2c})^2 \quad (11)$$

式中: k_5 、 k_6 代表拉伸和扭转弹簧刚度。下标 1 和 2 代表横梁 1 和 2。下标 c 代表连接弹簧位置。

本文中, 两端为弹性边界, 采用一系列拉伸和扭转弹簧进行连接, 根据胡克定律, 两端弹簧势能:

$$U_z = \frac{1}{2} k_1 w_{10}^2 + \frac{1}{2} k_2 w_{10}'^2, U_y = \frac{1}{2} k_3 w_{21}^2 + \frac{1}{2} k_4 w_{21}'^2 \quad (12)$$

式中: U_z 和 U_y 代表两端弹簧的势能, k_1 、 k_3 和 k_2 、 k_4 代表拉伸和扭转弹簧刚度。 w' 代表 w 对 x 的偏导数。下标 1_0 和 2_1 代表横梁 1 的左端和横梁 2 的右端。

变厚度功能梯度材料组合梁的动能:

$$T = \frac{1}{2} b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left(\rho \left((\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_z)^2 \right) \right) dx dz \quad (13)$$

式中: ρ 是梁的密度, \dot{u}_x 和 \dot{u}_z 表示 x 方向和 z 方向位移对于 t 的导数。

2.2.2. 虚功表示

复杂环境下的力通常是周期性的, 在本文的计算中, 简化为一个简谐激励 F :

$$F = Af \sin(\omega t) \quad (14)$$

式中： ω 是力的频率。力 F 所做的功：

$$W_F = \int_0^l Af \sin(\omega t) w dx \quad (15)$$

铺设系统表面的钢丝绳可以看作一个非线性阻尼力。钢丝绳力的拟合表达式[12]：

$$f_{st} = K_1 w + K_3 w^3 + c_1 \dot{w} + r_{21} w^2 \dot{w} + r_{12} w \dot{w}^2 \quad (16)$$

式中： K_1 、 K_3 、 c_1 分别为线性刚度系数、立方刚度系数和线性阻尼系数， r_{21} 、 r_{12} 为耦合阻尼系数。钢丝绳做的功：

$$W_{st} = \int_0^l -\gamma f_{st} w dx \quad (17)$$

式中： γ 为镍钛合金钢丝绳的相对尺寸修正系数。

2.3. 模态求解过程

未知的位移函数可以写成：

$$w(\xi, t) = \chi(\xi) \mathbf{q}(t) \quad (18)$$

式中： $\xi = x/l$ 是无量纲长度， $\chi(\xi)$ 是模态函数可以使用多项式表示为：

$$\chi(\xi) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(\xi) \quad (19)$$

使用 Schmidt 正交化后的多项式函数代替梁的位移函数，不同边界条件下，多项式的首项是不同的[15]。本文梁的两端为自由边界，多项式首项为 1。考虑：

$$T_{\max} = (U + U_T + U_k + U_z + U_y)_{\max} \quad (20)$$

瑞利商取驻值得：

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_z + \mathbf{K}_y + \mathbf{K}_k - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (21)$$

式中： \mathbf{K} 、 \mathbf{K}_T 、 \mathbf{K}_z 、 \mathbf{K}_y 和 \mathbf{K}_k 分别为弹性势能矩阵、热能矩阵、边界弹簧矩阵和连接弹簧矩阵， \mathbf{M} 为质量矩阵， $\mathbf{X} = [a_n]^T$ 是特征向量。通过求解公式(21)，即可得系统的固有频率和模态函数。

2.4. 动力学方程及其求解

由 2.3 节瑞利法求得的模态函数，使用拉格朗日方程可得：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (22)$$

式中：为了简化计算， \mathbf{C} 为瑞利阻尼矩阵，表示为：

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (23)$$

式中： a 和 b 是质量阵和刚度阵的系数，可以写为：

$$a = 2(\xi_2/\omega_2 - \xi_1/\omega_1) / (1/\omega_2^2 - 1/\omega_1^2), \quad b = 2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (24)$$

利用谐波平衡法求解系统的动力学方程(22)，其解用傅里叶级数表示为：

$$q_l = \sum_{i=1}^H A_{li} \cos(i\omega t) + B_{li} \sin(i\omega t) \quad (25)$$

$$q_r = \sum_{i=1}^H A_{ri} \cos(i\omega t) + B_{ri} \sin(i\omega t) \quad (26)$$

式中： H 为谐波平衡法的阶数，取第一和第三谐波系数为零，用弧长法求解，得到代数方程，通过计算均方根，可以得到响应的幅频特性曲线。

3. 收敛性分析

从理论上讲,公式(19)中的正交多项式位移函数可以无限展开。因此,由位移函数求解出的固有频率具有无限项。在实际工程应用中,出于经济和方便的原因,只选择有限项的正交多项式函数。因此,有必要验证当前方法的收敛性和准确性,以确定合适的正交多项式位移函数项。在本研究中,功能梯度材料梁由金属(SUS304)和陶瓷(Al_2O_3)制成,变厚度功能梯度材料组合梁的材料和几何参数如表 1 和表 2 所示,湿膨胀系数 β 和密度 ρ 表明不随温度变化。泊松比 $\nu = (\nu_m + \nu_c)/2 = 0.3$ ($T = 280 \text{ K}$)。

Table 1. Temperature-dependent coefficients for metal (SUS304) and ceramic (Al_2O_3) [15]

表 1. 金属(SUS304)和陶瓷(Al_2O_3)与温度相关的系数[15]

Material	Property	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Metal (SUS30)	E/Pa	201.04×10^9	0	3.079×10^{-4}	6.534×10^{-7}	0
	$\alpha/(\text{K}^{-1})$	12.33×10^{-6}	0	8.086×10^{-4}	0	0
	$\beta/(\text{m}^3/\text{kg})$	5×10^{-4}	0	0	0	0
	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	8166	0	0	0	0
Ceramic (Al_2O_3)	E/Pa	349.55×10^9	0	3.853×10^{-4}	4.027×10^{-7}	1.673×10^{-10}
	$\alpha/(\text{K}^{-1})$	6.8269×10^{-6}	0	1.838×10^{-4}	0	0
	$\beta/(\text{m}^3/\text{kg})$	1×10^{-5}	0	0	0	0
	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	3800	0	0	0	0

Table 2. Geometrical parameters of the FGMs combined beams

表 2. 变厚度功能梯度组合梁的几何参数

结构参数	符号	数值	单位
横梁 1 长度	l_1	0.25	m
横梁 2 长度	l_2	0.25	m
横梁 1 厚度	h_1	0.005	m
横梁 2 厚度	h_2	0.003	m
宽度	b	0.015	m
梯度指数	n	1	

表 3 给出了弹性边界条件下变厚度功能梯度组合梁的固有频率。全部弹簧刚度无限大,模拟固定边界条件。显然,随着项数(NT)的增加,固有频率逐渐收敛,使用 15 项或更多项可以满足实际工程的要求。在随后的数值研究中,为了考虑经济性和收敛性,选择 $NT = 15$ 。

Table 3. Convergence of with elastic supports

表 3. 弹性边界下的收敛性分析

	$NT = 4$	$NT = 6$	$NT = 8$	$NT = 10$	$NT = 15$
1	107.75 Hz	105.86 Hz	105.86 Hz	105.86 Hz	105.86 Hz
2	458.45 Hz	314.30 Hz	313.75 Hz	313.75 Hz	313.75 Hz

采用 APDL 软件进行仿真模拟,证明理论建模过程的正确性。利用 Shell 181 单元和 Combination 250 单元进行模态分析,使用复合材料分层的方式近似模拟功能梯度材料厚度方向连续变化。理论计算和仿真模拟得出的固有频率如表 4 所示。再比较理论与仿真求解的振型,如表 5 所示,振型趋势一致。结合

固有频率比较的误差和振型趋势来看,目前本文的变厚度功能梯度材料组合梁的建模过程是完全正确的。

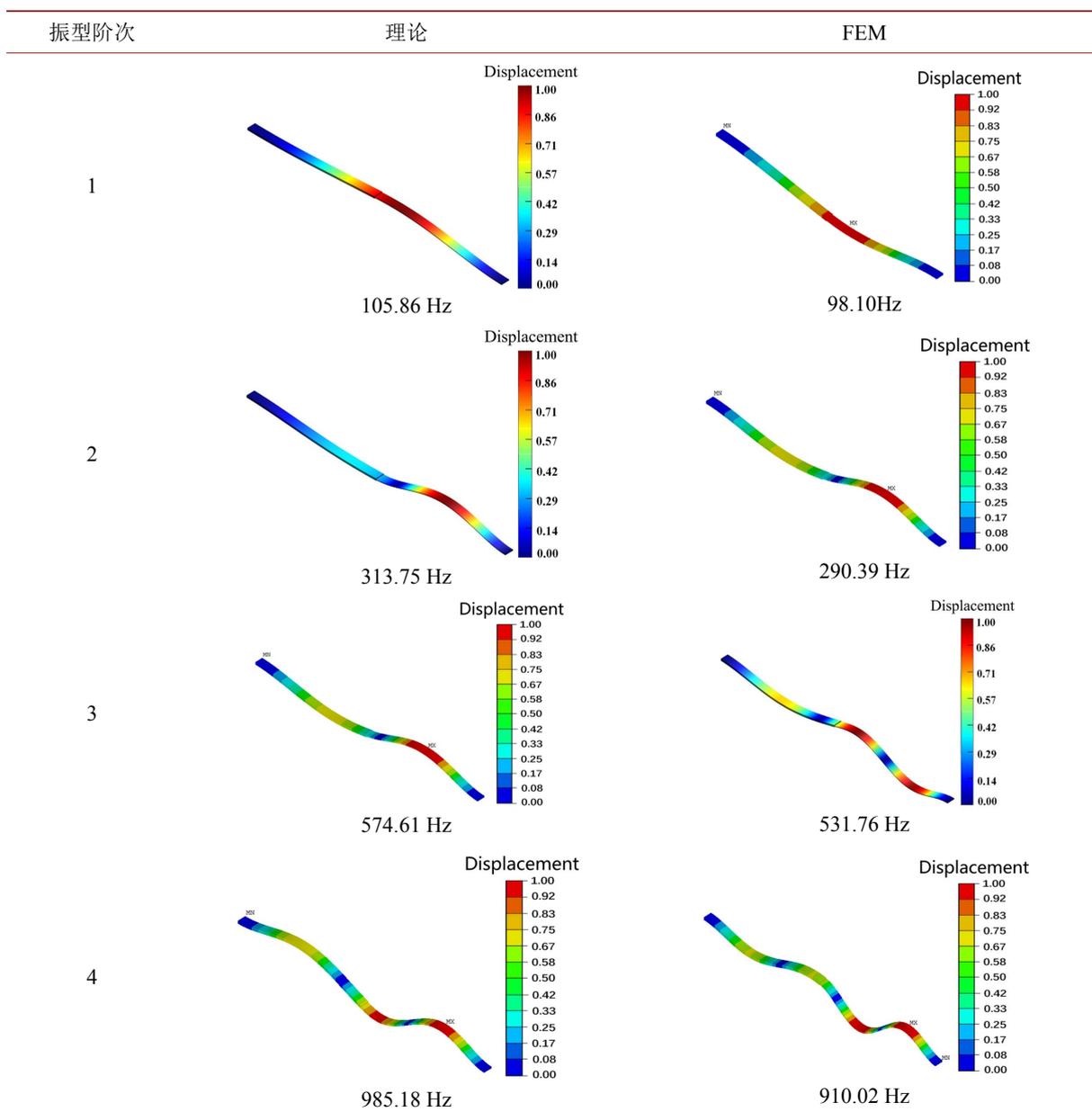
Table 4. Comparing the natural frequency of variable thickness FGMs combined beams

表 4. 变厚度功能梯度材料组合梁的固有频率比较

	理论计算(Hz)	仿真模拟(Hz)	误差(%)
1	105.86	98.10	7.91
2	313.75	290.39	8.04
3	574.61	531.76	8.06
4	985.18	910.02	8.26

Table 5. Modal shapes of the variable thickness FGMs combined beams with the elastic boundary

表 5. 变厚度功能梯度组合梁的模态振型



4. 参数影响讨论

4.1. 温度参数对固有频率的影响

论当 $h_2 = 0.003 \text{ m}$ 时，首先分析复杂环境中温度参数对系统固有频率的影响。由表 6 可知，温度由 280 K 增加到 290 K 时，一阶固有频率由 105.86 Hz 减小到 59.27 Hz，前四阶固有频率均有所减小。若温度持续增加，低阶固有频率会逐渐减小至零。所以，在以后的工程环境中，选择合适的温度条件具有重要的意义。

Table 6. The effect of temperature on the natural frequency

表 6. 温度对固有频率的影响

	280 K (Hz)	285 K (Hz)	290 K (Hz)
1	105.86	86.25	59.27
2	313.75	293.42	271.38
3	574.61	548.69	521.33
4	985.18	960.21	934.38

4.2. 厚度参数对动力学性能的影响

4.2.1. 厚度参数对固有频率的影响

温度对固有频率的影响已经得出结论。采用本文所述方法讨论厚度参数对固有频率的影响，厚度改变对固有频率影响如表 7 所示。当横梁 2 厚度 h_2 由 0.003 m 减小到 0.001 m 时，第一阶固有频率由 105.86 Hz 减小到 74.32 Hz，前四阶固有频率均有减小。由仿真计算和理论计算的对比误差可知，建模过程是完全正确的。当厚度变薄时，理论与仿真的固有频率误差会稍有增加。

Table 7. The effect of thickness on the natural frequency

表 7. 厚度对固有频率的影响

	$h_1 = 0.005 \text{ m}, h_2 = 0.003 \text{ m}$			$h_1 = 0.005 \text{ m}, h_2 = 0.001 \text{ m}$		
	理论计算(Hz)	仿真计算(Hz)	误差(%)	理论计算(Hz)	仿真计算(Hz)	误差(%)
1	105.86	98.10	7.91	74.32	67.71	9.76
2	313.75	290.39	8.04	130.75	116.20	12.52
3	574.61	531.76	8.06	316.05	271.01	16.62
4	985.18	910.02	8.26	520.75	474.79	9.68

4.2.2. 厚度参数对功能梯度材料组合梁振型的影响

如图 3 所示，探讨厚度参数对振型的影响。由于功能梯度材料属性会随着厚度的改变而有所改变，所以当横梁 2 的厚度 $h_2 = 0.003 \text{ m}$ 减小到 $h_2 = 0.001 \text{ m}$ 时，横梁 2 的刚度会有所降低，而刚度降低的横梁 2 就更易发生振动，导致振型峰值的横坐标出现在更右处。

4.2.3. 厚度参数对系统振动响应的影响

在变厚度功能梯度材料组合梁表面铺设镍钛合金钢丝绳后，讨论厚度参数对幅频特性曲线的影响，如图 4 所示。幅频特性曲线提取位置为横梁 2 长度的中点，简谐激励加载在横梁 1 长度的中点。由图 4 可知，随着厚度 $h_2 = 0.003 \text{ m}$ 减小到 $h_2 = 0.001 \text{ m}$ 时，幅频特性曲线的幅值增加。幅频特性曲线峰值的横

坐标左移, 其左移趋势与厚度对固有频率的影响一致。镍钛合金钢丝绳的减振效果增加, 幅频特性曲线第一阶的峰值减振效果由 15.42% 增加到 35.71%, 第二阶的峰值减振效果差距与第一阶相差不多。但无论厚度如何变化, 镍钛合金钢丝绳都有很好的减振效果。

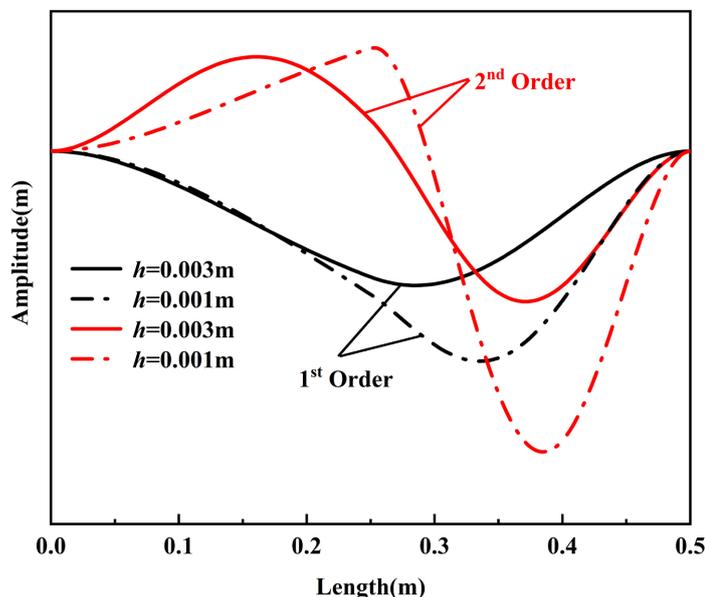


Figure 3. The influence of thickness parameter on the modal shapes
图 3. 厚度参数对振型的影响

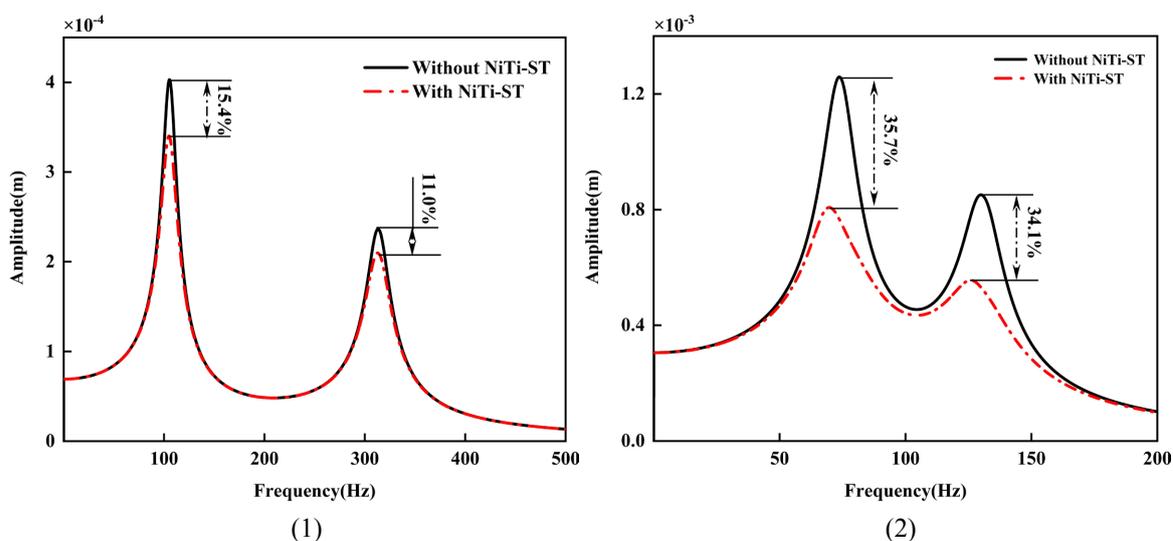


Figure 4. The effect of thickness on the amplitude-frequency characteristic curves: (1) $h_2 = 0.003$ m; (2) $h_2 = 0.001$ m
图 4. 厚度对幅频特性曲线的影响: (1) $h_2 = 0.003$ m; (2) $h_2 = 0.001$ m

5. 结论

本文通过瑞利 - 里茨法、拉格朗日方程和谐波平衡法等方法对系统进行了动力学分析, 得到了加载镍钛合金钢丝绳后动力学方程的近似解析解, 再通过 APDL 软件对系统进行模态响应分析, 并与理论的固有频率对比, 证明建模过程的正确性。最后讨论不同参数对系统的影响, 得到结论如下:

1) 温度对系统固有频率有较大的影响。随着温度由 280 K 升高到 290 K, 一阶固有频率逐渐由 105.86 Hz 降低至 59.27 Hz。此后, 随着温度再次升高, 低阶固有频率会逐渐减小至零。所以, 在不同的温度条件下, 系统有其独特的动力学性能。

2) 厚度对系统固有特性也有着不小的影响。当横梁 2 的厚度由 0.003 m 减小到 0.001 m 时, 系统的一阶固有频率由 105.86 Hz 降低至 74.32 Hz, 前四阶固有频率均有减小。由于厚度变薄导致刚度降低, 薄的位置更易振动, 所以导致振型峰值的横坐标右移。

3) 当横梁 2 厚度变小时, 变厚度功能梯度材料组合梁的幅频特性曲线的幅值增大, 峰值的横坐标左移, 钢丝绳减振效果增加。无论厚度如何变化, 镍钛合金钢丝绳都有很好的减振效果。所以在轻质结构减振方面, 镍钛合金钢丝绳具有良好的应用前景。

参考文献

- [1] 杨凤田, 范振伟, 项松, 等. 中国电动飞机技术创新与实践[J]. 航空学报, 2021, 42(3):7-12.
- [2] 漆卫微. EAD200 飞机的总体方案设计与性能分析[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2015.
- [3] Wells, D. (2011) NASA Green Flight Challenge: Conceptual Design Approaches and Technologies to Enable 200 Passenger Miles per Gallon. 11th *AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO) Conference*, Virginia Beach, VA, 20-22 September 2011. <https://doi.org/10.2514/6.2011-7021>
- [4] 魏进. 复杂柔性结构全局模态方法及其在空间组合结构中的应用[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
- [5] 张坤. 移动车辆荷载作用下钢—混组合梁桥动力性能研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
- [6] 牛国华, 王刚锋, 王剑. 组合 L 型变截面梁的自由振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(5): 228-234.
- [7] Zhang, X., Xu, H., Chen, X., Zhu, F., Guo, Y. and Tian, H. (2022) Vibration Characteristics and Experimental Research of Combined Beam Tri-Stable Piezoelectric Energy Harvester. *Micromachines*, **13**, Article No. 1465. <https://doi.org/10.3390/mi13091465>
- [8] Cao, Y., Yang, J. and Yang, D. (2023) Coupling Nonlinearities Investigation and Dynamic Modeling of a Tristable Combined Beam Rotational Energy Harvesting System. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **200**, Article 110503. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110503>
- [9] Carboni, B., Lacarbonara, W., Brewick, P.T. and Masri, S.F. (2018) Dynamical Response Identification of a Class of Nonlinear Hysteretic Systems. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **29**, 2795-2810. <https://doi.org/10.1177/1045389x18778792>
- [10] Brewick, P.T., Masri, S.F., Carboni, B. and Lacarbonara, W. (2016) Data-based Nonlinear Identification and Constitutive Modeling of Hysteresis in Nitinol and Steel Strands. *Journal of Engineering Mechanics*, **142**. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)em.1943-7889.0001170](https://doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0001170)
- [11] Zang, J., Wang, Y. and Zhang, Y-W. (2023) Analysis of Nonlinear Vibration Control for a Functionally Graded Material Plate by NiTiNOL-Steel Wire Ropes. *Nonlinear Dynamics*, **44**, 877-896.
- [12] Zheng, L., Zhang, Y., Ding, H. and Chen, L. (2021) Nonlinear Vibration Suppression of Composite Laminated Beam Embedded with Nitinol-Steel Wire Ropes. *Nonlinear Dynamics*, **103**, 2391-2407. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06258-w>
- [13] 张博文, 臧建. 湿热环境下铺设镍钛合金钢丝绳功能梯度梁的振动控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(11): 19-26.
- [14] Wang, C., Song, X., Zang, J. and Zhang, Y. (2023) Experimental and Theoretical Investigation on Vibration of Laminated Composite Conical-Cylindrical-Combining Shells with Elastic Foundation in Hygrothermal Environment. *Composite Structures*, **323**, Article 117470. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117470>
- [15] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H. and Nguyen, T. (2016) An Analytical Method for the Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams under Mechanical and Thermal Loads. *Composites Part B: Engineering*, **100**, 152-163. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.06.067>