

A Suspension Footbridge Model under Crowd-Induced Excitation

Tao Zhang, Bin Zhen, Lijun Ouyang, Tingting Li

School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: litaosfive@163.com

Received: Dec. 17th, 2018; accepted: Jan. 2nd, 2019; published: Jan. 9th, 2019

Abstract

In this paper “the plane bifilar pendulum model” is proposed to study vibration of a suspension footbridge under crowd excitation. We use a plane bifilar pendulum to describe a suspension bridge by considering its structural features, which consists of two strings and a central rigid body representing the cables and deck of the footbridge, respectively. In addition, the vertical and lateral forces exerted by crowd on the deck both are considered to be harmonic with constant amplitudes. According to Lagrange method, we found that the dynamic behavior of the suspension footbridge under crowd-induced excitation can be described by a Hill equation. The solution and its stability of the plane pendulum model are theoretically analyzed based on the perturbation method, the correctness of which is verified by numerical simulations. By applying the analytical results to the London Millennium Bridge, we can easily explain the occurrence of excessive lateral vibration with 0.48 and 0.96 Hz and the “lock-in” phenomenon. Our research suggests that structural features of a suspension footbridge should not be ignored in the investigation of the pedestrian-footbridge interaction.

Keywords

Suspension Footbridge, Bifilar Pendulum, Mathieu Equation, Hill Equation, Stability

一个行人行走激励下的悬索桥动力模型

张涛, 镇斌, 欧阳利军, 李婷婷

上海理工大学, 上海
Email: litaosfive@163.com

收稿日期: 2018年12月17日; 录用日期: 2019年1月2日; 发布日期: 2019年1月9日

摘要

提出了一个“双线摆模型”用于描述行人激励下悬索桥的动力行为。该模型中用两根弦和一块刚体分别

代表悬索和桥面板。桥上行人行走时产生的竖向和侧向激励都用振幅为常数的简谐函数表示。在这一简化条件下根据Lagrange方法发现行人激励下悬索的动力学控制方程是一个Hill方程。利用扰动法对Hill方程进行了求解和稳定性分析,并通过数值计算证明了解析结果的正确性。利用该解析结论可以解释著名的伦敦千禧桥为何会在行人激励下出现0.48和0.96 Hz的侧向振动并伴有锁频现象。本文研究表明在人与悬索桥相互作用研究中不应该忽略悬索桥的悬挂结构特征。

关键词

悬索桥, 双线摆, Mathieu方程, Hill方程, 稳定性

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着新材料的应用和桥梁建造技术的进步,世界各地出现了越来越多低自振频率(低于3 Hz)的细长型人行桥。实测发现人行走时会同时产生水平和竖直方向的时变力。行人产生的竖向力的频率在1.4~2.4 Hz之间,水平力的频率为竖向力的一半,在0.7~1.2 Hz之间[1]。因此,现代人行桥对人行荷载变得非常敏感。当人行桥的水平或者竖向自振频率和行人的侧向,竖向步频接近时,直接共振极有可能发生。对日本T桥的研究发现当人行桥的某一阶水平和另一阶竖向自振频率成1:2的比例关系时,由于桥的非线性,桥的竖向振动有可能反过来引发桥的水平振动,这被称为内共振[2]。伦敦千禧桥是最为著名的在开放三天后就被迫关闭的悬索型人行桥。千禧桥由三跨连接而成,分别是南跨、北跨和中跨。其中中跨在放开期间出现了高达70 mm的最大侧向振幅。对千禧桥的封闭测试表明,中跨的前四阶竖向振动频率分别为:1.15, 1.54, 1.89和2.32 Hz;而中跨的前两阶侧向振动频率分别为0.48和0.96 Hz。尽管中跨的第二阶侧向振动频率和第三阶竖向振动频率之比为1:2,满足内共振的必要条件,但这两个频率之间并没有相关性[3]。此外,中跨第一阶侧向振动频率远低于人行走时产生的侧向激励频率,因此不能用直接共振理论来进行解释。

为理解人-桥之间复杂的相互作用机理,最近十多年各国学者提出了很多具有影响力的行人激励力模型[4] [5] [6]。如果要用这些力模型解释千禧桥中跨0.48 Hz侧向振动的出现,必须要求桥上行人每走3~4步就小幅度地调整行走的方向,但这和实际观察并不相符。Piccardo和Tubino [7]假设桥上行人产生的激励力具有简谐变化规律,且激励力的振幅和桥面的侧向位移相关。在这一假设下人行桥的动力行为可以用Mathieu方程来描述,由此可以解释千禧桥中跨0.48 Hz侧向振动的出现。需要指出的是,他们的力模型和Dallard等[3] [4]对千禧桥实测得到的力模型并不一致。

根据上述陈述,在当前人-桥相互作用研究中有两点值得关注。一是几乎所有的研究都在试图寻找合适的行人力描述模型。另一个是桥的结构形式很少反映到人-桥动力研究中。在几乎所有的人-桥动力学相互作用模型中,不管桥本身的结构特征如何,桥总被简化为一个有阻尼的单自由度系统。实际上McRobie等[8]和Zhou等[9]都对平面悬挂系统进行过研究。他们的研究表明悬挂系统中悬索的参数对系统的动力学行为有较大的影响。这启发我们在人-桥动力相互作用的研究中考虑桥的结构特征。本文将根据这一思路讨论行人行走激励下悬索桥的动力学行为。为简化问题,假设桥上行人沿着桥长度方向均匀分布,因此研究中可以近似用桥横截面平面来代替整跨桥。桥上行人产生的水平和竖直方向的激励力

都假设为简谐变化。本文将这一简化模型称为“平面双线摆模型”。本文首先对这一简化模型进行建模，然后进行稳定性分析。利用稳定性分析结果，本文将解释千禧桥中出现 0.48 和 0.96 Hz 侧向振动以及锁频现象的原因。本文的分析表明人-桥相互作用研究中桥梁结构特性不应该被忽略。

本文剩余部分的结构如下：第二节中利用 Lagrange 方法对简化的平面双线摆模型进行建模；第三、四节中分别对模型方程的通解和稳定性进行分析；讨论和分析在第五节给出。

2. 平面双线摆模型

本文中考虑的双线摆模型如图 1 所示。双线摆由两条弦和一块刚体构成，其中弦代表悬索，刚体代表桥面板。两条悬索的长度都为 L_1 ，忽略悬索的伸长和质量。桥面板的质量为 M ，长度为 $2L_2$ 。桥面板的质心在 C 点，为简单起见，假设行人行走产生的竖向和侧向力都作用在 C 点。在 O 点建立直角坐标系，两条悬索和 x 轴的初始夹角为 θ_0 ，假设桥摆动的某一时刻悬索和初始时刻的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 。选择 θ_1 作为广义坐标，下列几何关系满足，

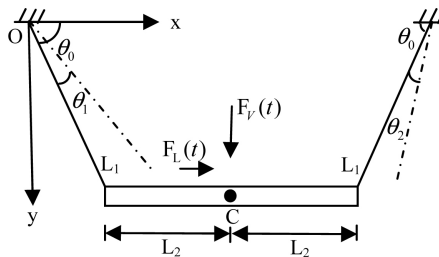


Figure 1. The plane bifilar pendulum model

图 1. 平面双线摆模型

$$\left[2L_2 + 2L_1 \cos \theta_0 - L_1 \cos(\theta_0 - \theta_2) - L_1 \cos(\theta_0 + \theta_1)\right]^2 + L_1^2 \left[\sin(\theta_0 - \theta_2) - \sin(\theta_0 + \theta_1)\right]^2 = (2L_2)^2. \quad (1)$$

在(1)中将 θ_1 视为 θ_2 的函数并对 θ_2 求导，得

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{2(L_1 \cos \theta_0 + L_2) \sin(\theta_0 + \theta_1) - p}{2(L_1 \cos \theta_0 + L_2) \sin(\theta_0 - \theta_2) - p}, \quad (2)$$

其中 $p = L_1 \sin(2\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)$ 。

桥摆动过程中质心 C 的坐标可以写为

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

其中，

$$x_1 = L_1 \cos(\theta_0 + \theta_1), x_2 = 2(L_1 \cos \theta_0 + L_2) - L_1 \cos(\theta_0 - \theta_2),$$

$$y_1 = L_1 \sin(\theta_0 + \theta_1), y_2 = L_1 \sin(\theta_0 - \theta_2).$$

假设质心 C 点的旋转角为 θ_c ，则 θ_c 应该满足

$$\sin \theta_c = L_1 (\sin(\theta_0 - \theta_2) - \sin(\theta_0 + \theta_1)) / (2L_2).$$

平面双线摆系统的动能和势能可以写为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}_c^2 = \frac{1}{2} (m P_1(\theta_1, \theta_2) + J_c P_2(\theta_1, \theta_2)) \dot{\theta}_1^2, \\ V &= -mgy_c = -\frac{mgL_1}{2} [\sin(\theta_0 + \theta_1) + \sin(\theta_0 - \theta_2)], \end{aligned} \quad (3)$$

其中“ \cdot ”表示对时间 t 的求导, J_C 表示桥面的转动惯量, 并且

$$P_1(\theta_1, \theta_2) = \frac{L_1^2}{4} \left[1 + \left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right)^2 - 2 \cos(2\theta_0 + \theta_1 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right],$$

$$P_2(\theta_1, \theta_2) = \left[\frac{L_1 \sin(2\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)}{2(L_1 \cos \theta_0 + L_2) \sin(\theta_0 - \theta_2) - L_1 \sin(2\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)} \right]^2.$$

根据(3), 系统的 Lagrange 函数可以写为 $L = T - V$ 。将其带入 Lagrange 方程, 可以得到

$$\ddot{\theta}_1 + W(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2) = Q, \quad (4)$$

其中

$$W(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2) = \frac{\left[m \left(\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right) + J_C \left(\frac{\partial P_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right) \right]}{2[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]} \dot{\theta}_1^2 - \frac{mgL_1 \left[\cos(\theta_0 + \theta_1) - \cos(\theta_0 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right]}{2[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]},$$

Q 代表广义力, 由三部分构成 $Q = Q_V + Q_L + Q_R$, 其中

$$Q_V = \frac{F_V(t) L_1 \left[\cos(\theta_0 + \theta_1) - \cos(\theta_0 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right]}{2[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]}, Q_L = -\frac{F_L(t) L_1 \left[\sin(\theta_0 + \theta_1) + \sin(\theta_0 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right]}{2[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]},$$

$$Q_R = -\frac{C_L L_1^2 \left[\sin(\theta_0 + \theta_1) + \sin(\theta_0 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right]^2}{4[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]} \dot{\theta}_1 - \frac{C_V L_1^2 \left[\cos(\theta_0 + \theta_1) - \cos(\theta_0 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right]^2}{4[mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)]} \dot{\theta}_1$$

$$- \frac{C_{\theta_c} P_2(\theta_1, \theta_2)}{mP_1(\theta_1, \theta_2) + J_C P_2(\theta_1, \theta_2)} \dot{\theta}_1.$$

$\theta_1 = \theta_2 = 0$ 显然是系统(4)的平衡位置。考虑 θ_{i2} 很小, 只在 0 附近发生微小的变化。将(4)在平衡位置附近线性化, 可得

$$\ddot{\theta}_1 + 2\alpha_1 \dot{\theta}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 F_L(t) + \alpha_4 F_V(t)) \theta_1 = \alpha_5 F_L(t), \quad (5)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{C_L L_2^2 \sin^2 \theta_0 + C_{\theta_c} \cos^2 \theta_0}{mL_2^2 \sin^2 \theta_0 + J_C \cos^2 \theta_0}, \alpha_2 = \frac{mg(L_2 + L_1 \cos^3 \theta_0)(L_2 + L_1 - L_1 \cos \theta_0)^2}{mL_1 L_2 \sin^3 \theta_0 (L_2 + L_1 - L_1 \cos \theta_0)^2 + J_C L_1 L_2 \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0},$$

$$\alpha_3 = \frac{L_2 \cos \theta_0 (L_2 + L_1 \cos \theta_0)}{L_1 (mL_2^2 \sin^2 \theta_0 + J_C \cos^2 \theta_0)}, \alpha_4 = \frac{L_2 (L_2 + L_1 \cos^3 \theta_0)}{L_1 \sin \theta_0 (mL_2^2 \sin^2 \theta_0 + J_C \cos^2 \theta_0)}, \alpha_5 = -\frac{L_2^2 \sin \theta_0}{L_1 (mL_2^2 \sin^2 \theta_0 + J_C \cos^2 \theta_0)}.$$

定义平面双线摆系统的自振圆频率为 ω , 则在(5)中令 $\alpha_{1,3,4,5} = 0$, 可得 $\omega = \sqrt{\alpha_2}$ 。当 $\theta_0 = \pi/2$ 时, 圆频率退化为 $\omega = \sqrt{g/L_1}$ 。这表明双线摆模型控制方程(5)是正确的。

行人产生的竖向力 $F_V(t)$ 和侧向力 $F_L(t)$ 采用文献[10]建议的简谐表达形式,

$$F_i(t) = \lambda \alpha_i g m_p(x) \cos(\Omega_i t), i = V, L,$$

其中 λ 是桥上行人同步行走占总人数的百分比, $m_p(x)$ 是同步行人沿桥长度方向上的线密度, α_i 是动载因子, g 是重力加速度, $\Omega_{V,L}$ 是行人行走力的主频率。考虑到竖向频率为侧向频率的一倍, 将 $F_{V,L}(t)$ 的

表达式带入(5), 并重新对时间进行标度 $\tau = \Omega_L t$, (5)可以写为

$$\ddot{\theta}_1 + 2\xi\dot{\theta}_1 + (\nu - \varepsilon \cos \tau - \eta \cos(2\tau))\theta_1 = \kappa \varepsilon \cos \tau, \quad (6)$$

其中“·”表示对时间 τ 的求导, 且

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\Omega_L}, \nu = \frac{\alpha_2}{\Omega_L^2} = \frac{\omega^2}{\Omega_L^2}, \varepsilon = \frac{\alpha_3 \lambda \alpha_L g m_p(x)}{\Omega_L^2}, \eta = \frac{\alpha_4 \lambda \alpha_V g m_p(x)}{\Omega_L^2}, \mu = \frac{\Omega_V}{\Omega_L}, \kappa = -\frac{L_2 \sin^2 \theta_0}{L_2 + L_1 \cos^3 \theta_0}.$$

在(6)中引入变换 $\theta_1(t) = e^{-\xi t} y(t)$, (6)可以写为

$$\ddot{y} + (\delta - \psi(\tau))y = \kappa \varepsilon \cos \tau, \quad (7)$$

其中 $\delta = \nu - \xi^2$, $\psi(\tau) = \varepsilon \cos \tau + \eta \cos(2\tau)$ 。

(7)是2次简谐模式的Hill方程。由(5)和(6)可知, 参数 ε 和 η 都是小参数。下节中将讨论(7)的通解。

3. 平面双线摆控制方程的通解

本节中寻找(7)中具有如下形式的通解

$$y = y_0 + \varepsilon y_{11} + \eta y_{12} + \varepsilon^2 y_{21} + \eta^2 y_{22} + \varepsilon \eta y_{23} + \dots \quad (8)$$

将(8)带入(7), 并令 ε 和 η 各阶系数都为0, 可以得到下列等式

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + \delta y_0 &= 0, \\ \ddot{y}_{11} + \delta y_{11} &= (\kappa - y_0) \cos \tau, \\ \ddot{y}_{12} + \delta y_{12} &= -y_0 \cos(2\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

(9)中第一式的通解可以写为

$$y_0 = a \cos(\sqrt{\delta} t) + b \sin(\sqrt{\delta} t)$$

其中 a 和 b 是由取决于初始条件的常数。将上式带入(9)的后两式, 并写出它们的通解

$$\begin{aligned} y_{11} = \frac{1}{4\delta^2 - 5\delta + 1} & \left(-\delta^{3/2} + \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(a \cos(\sqrt{\delta}\tau - \tau) + b \sin(\sqrt{\delta}\tau - \tau) \right) \\ & + \left(\delta^{3/2} - \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(a \cos(\sqrt{\delta}\tau + \tau) + b \sin(\sqrt{\delta}\tau + \tau) + (4\delta - 1)\kappa \cos \tau \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y_{12} = \frac{1}{8(\delta - 1)} & \\ & \left(-(\sqrt{\delta} + 1) \left(a \cos(\sqrt{\delta}\tau - 2\tau) + b \sin(\sqrt{\delta}\tau - 2\tau) \right) + (\sqrt{\delta} - 1) \left(a \cos(\sqrt{\delta}\tau + 2\tau) + b \sin(\sqrt{\delta}\tau + 2\tau) \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

显然, 当 $\delta = 1/4$ 和 $\delta = 1$ 时(10), (11)没有有界解。远离这两个共振点, 对(7)进行直接数值计算并和(10), (11)比较, 结果显示在图2中。图2表明解析结果是正确的。根据 δ 的定义, 如果考虑小阻尼, $\delta = 1/4$ 意味着行人的侧向步频为桥的侧向自振频率的2倍; $\delta = 1$ 意味着行人的侧向步频和桥的侧向自振频率相等。下一节分析当 $\delta \rightarrow 1/4, 1$ 时(7)的解稳定性。

4. 平面双线摆系统的稳定性分析

如果(7)的解是有界的, 则定义解是稳定的。在这一节本文讨论 $\delta \rightarrow 1/4, 1$ 时 $\delta - \varepsilon$ 参数平面上的分界线(transition curves)分布。根据 Floquet 理论, 在分界线上(7)有周期解, 并且周期为 $T = 2\pi/\Omega_L$ 或者 $T = 4\pi/\Omega_L$ 。本节将讨论为什么(7)的不稳定解最可能出现在 $\delta \rightarrow 1/4, 1$ 时。

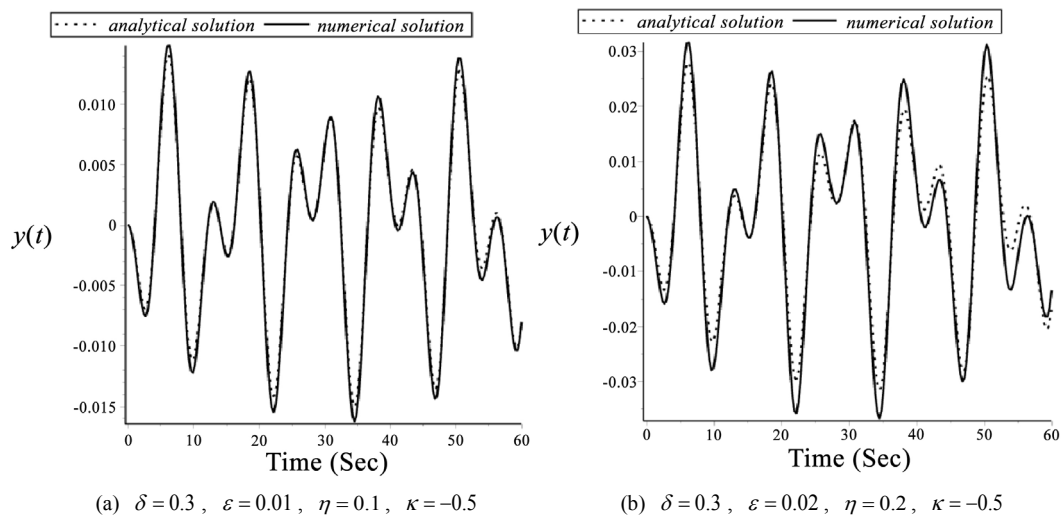


Figure 2. Comparison between the first order analytical solution (···dot line) and the numerical solution (— solid line)
图 2. 一阶解析解(···点)和数值解(—实线)的比较

假设 δ 可以展开成如下形式

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon\delta_{11} + \eta\delta_{12} + \varepsilon^2\delta_{21} + \eta^2\delta_{22} + \varepsilon\eta\delta_{23} + \dots,$$

其中是 δ_j 待定常数。将上式和(8)带入(7)并令 ε 和 η 的各阶系数分别为 0，可以得到下列等式

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + \delta_0 y_0 &= 0, \\ \ddot{y}_{11} + \delta_0 y_{11} &= \kappa \cos \tau - (\delta_{11} + \cos \tau) y_0, \\ \ddot{y}_{12} + \delta_0 y_{12} &= -(\delta_{12} + \cos(2\tau)) y_0, \\ \ddot{y}_{21} + \delta_0 y_{21} &= -\delta_{21} y_0 - (\delta_{11} + \cos(\tau)) y_{11}, \\ \ddot{y}_{22} + \delta_0 y_{22} &= -\delta_{22} y_0 - (\delta_{12} + \cos(2\tau)) y_{12}, \\ \ddot{y}_{23} + \delta_0 y_{23} &= -\delta_{23} y_0 - (\delta_{12} + \cos(2\tau)) y_{11} - (\delta_{11} + \cos \tau) y_{12}, \end{aligned} \quad (12)$$

对于 δ 分成两种情况进行讨论。

4.1. δ 接近 1/4

将 $\delta=1/4$ 带入(12)的第一式，可以解得

$$y_0 = a \cos \frac{\tau}{2} + b \sin \frac{\tau}{2}, \quad (13)$$

其中 a 和 b 是由取决于初始条件的常数。将(13)带入(12)的第二式，解得 y_{11} 。要消除 y_{11} 中的久期项必须满足

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \text{ and } b = 0 \text{ 或者 } \delta_{11} = -\frac{1}{2} \text{ and } a = 0$$

4.1.1. $\delta_{11} = \frac{1}{2}$ and $b = 0$

在这种情况下(12)的特解可以写为

$$y_{11} = -\frac{1}{4} a \cos \frac{3\tau}{2} + \frac{4}{3} \kappa \cos \tau.$$

将(13)带入(12)中的第三式，消去久期项必须要满足 $\delta_{12} = 0$ 。这种情况下(12)的特解为

$$y_{12} = -\frac{1}{12}a \left(3 \cos \frac{3\tau}{2} + \cos \frac{5\tau}{2} \right).$$

相似地, 利用(12)最后三个方程, 有

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= -\frac{1}{8}, \\ y_{21} &= \frac{1}{48}a \left(-3 \cos \frac{3\tau}{2} + \cos \frac{5\tau}{2} \right) + \frac{8}{45}\kappa(15 + 5 \cos \tau - \cos(2\tau)), \\ \delta_{22} &= -\frac{1}{6}, \\ y_{22} &= \frac{1}{480}a \left(5 \cos \frac{7\tau}{2} + \cos \frac{9\tau}{2} \right), \\ \delta_{23} &= -\frac{1}{4}, \\ y_{23} &= \frac{1}{72}a \left(-3 \cos \frac{3\tau}{2} + \cos \frac{5\tau}{2} + \cos \frac{7\tau}{2} \right) - \frac{8}{3}\kappa \left(\frac{1}{3} \cos \tau + \frac{1}{35} \cos(3\tau) \right). \end{aligned}$$

此时分界线的表达式可以写为

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{4}\varepsilon\eta. \quad (14)$$

在(14)所示的分界线上会出现周期为 $T = 2(2\pi/\Omega_L)$ 的周期解。

4.1.2. $\delta_{11} = -\frac{1}{2}$ and $a = 0$

在这种情况下可求得分界线为

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\eta. \quad (15)$$

此时在分界线上的周期解的表达式可以近似写为

$$\begin{aligned} y &= b \sin \frac{\tau}{2} - \left(\frac{1}{4}b \sin \frac{3\tau}{2} - \frac{4}{3}\kappa \cos \tau \right) \varepsilon - \frac{1}{12}b \left(-3 \sin \frac{3\tau}{2} + \sin \frac{5\tau}{2} \right) \eta \\ &+ \left[\frac{1}{48}b \left(3 \sin \frac{3\tau}{2} + \sin \frac{5\tau}{2} \right) - \frac{8}{45}\kappa(-15 + 5 \cos \tau + \cos(2\tau)) \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{480}b \left(-5 \sin \frac{7\tau}{2} + \sin \frac{9\tau}{2} \right) \eta^2 \\ &+ \left[\frac{1}{72}b \left(-3 \sin \frac{3\tau}{2} - \sin \frac{5\tau}{2} + \sin \frac{7\tau}{2} \right) - \frac{8}{3}\kappa \left(\frac{1}{3} \cos \tau + \frac{1}{35} \cos(3\tau) \right) \right] \varepsilon\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

4.2. δ 接近 1

按前面介绍的方法可以求得此时的分界线和对应的周期解表达式

$$\delta = 1 - \frac{\kappa}{a}\varepsilon + \frac{1}{2}\eta + \frac{5}{12}\varepsilon^2 - \frac{1}{32}\eta^2. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y &= a \cos \tau + \frac{1}{6}a(3 - \cos(2\tau))\varepsilon - \frac{1}{16}a \cos(3\tau)\eta \\ &+ \left[\frac{1}{96}a \cos(3\tau) + \frac{1}{18}\kappa(9 + \cos(2\tau)) \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{768}a(-3 \cos(3\tau) + \cos(5\tau))\eta^2 \\ &+ \left[\frac{1}{1440}a(-265 \cos(2\tau) + 11 \cos(4\tau) - 480) + \frac{1}{128}\kappa(3 \cos \tau + \cos(3\tau)) \right] \varepsilon\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

根据这节的解析分析以及 δ 的定义, 当桥的振动阻尼比较小时桥的稳定性最糟糕的情况出现在桥的自振频率等于人行走的侧向步频或者侧向步频的一半。接下来, 我们数值地展示桥的不同振幅下稳定性区域的变化。根据实测, 当行人行走的步频在 2 Hz 时产生的侧向和竖向激励力之比在 0.05 到 0.12 左右。数值计算中我们令 ε 和 η 之比为 0.1, 并且将 κ 的值固定为 -0.5。数值结果展示在图 3 中。

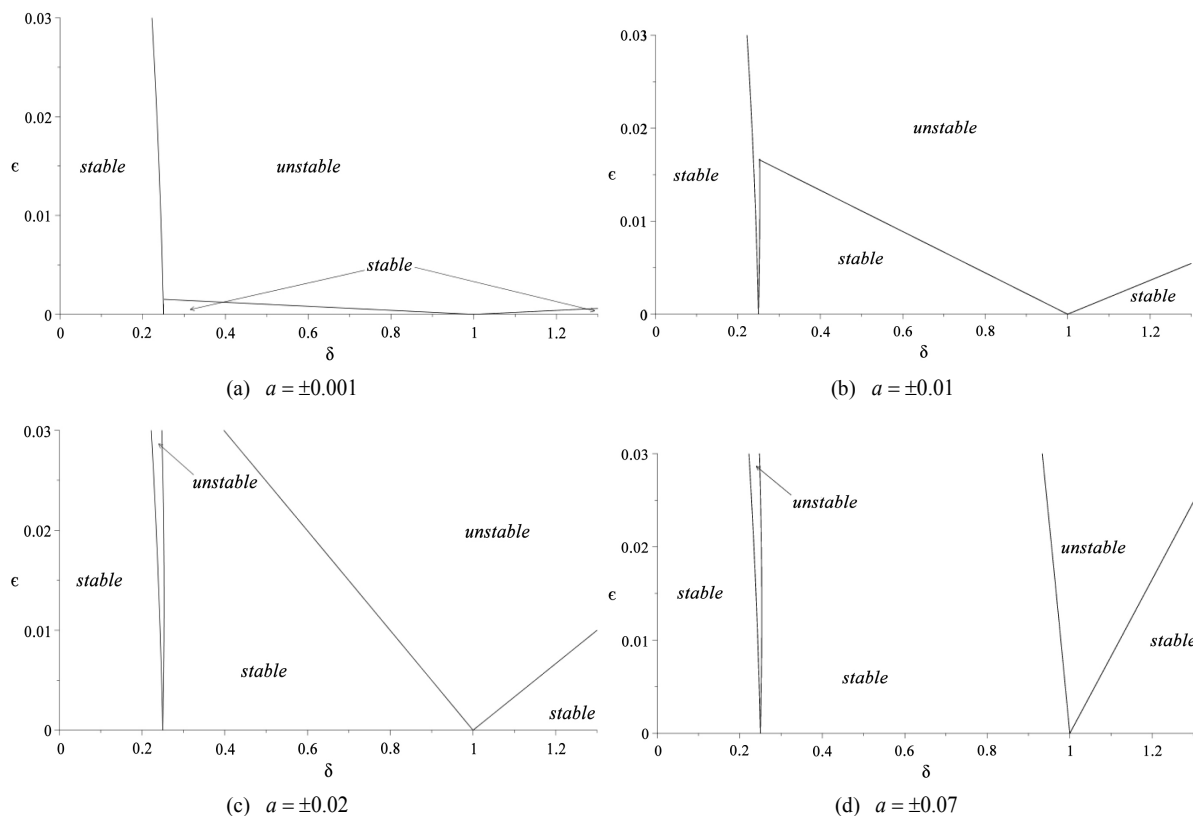


Figure 3. Transition curves of Eq. (7) in the $\delta - \varepsilon$ parameter plane for $\kappa = -0.5$

图 3. $\delta - \varepsilon$ 平面上方程(7)的分界线, 其中 $\kappa = -0.5$

a 表示桥做侧向周期振动时的振幅。当 a 非常小时, 此时 ε 非常小。如图 3(a)所示, 此时参数平面上稳定性区域面积很小。这表明此时增加桥上人数很容易加大桥的侧向不稳定性, 这会使得 a 增加。随着 a 增大参数平面上不稳定区域开始缩小, 并逐渐收缩到 $\delta=1/4, 1$ 附近(见图 3(b)~(d))。根据参数 δ 物理含义, 当人数增加的足够多时不稳定情况仅仅在桥的侧向自振频率接近 1/2 人的侧向步频, 或者接近人的竖向步频时出现。利用图 3 中的稳定性图片可以解释悬索桥在行人行走作用下出现的锁频现象。当桥上行人数量从零开始增加时, 不管桥的侧向频率和行人激励力频率之间的关系, 桥的侧向振动会迅速增加。随着桥的侧向振动幅度的增加, 桥上行人会不自觉地和桥同步使得行走更为舒适。而这种同步将使得行人的竖向行走频率接近桥的侧向自振频率或者自振频率的倍数。但这恰恰是悬索桥系统稳定性被破坏的条件, 因此这将最终造成悬索桥过大的侧向振动。由于行人在行走过程中不自觉地和侧向摆动的桥同步, 所以这一过程几乎是无法避免的。著名的伦敦千禧桥中跨的第一阶侧向自振频率为 0.48 Hz, 根据上面的分析过大侧向振动会出现在行人侧向步频为 1 倍和 2 倍桥侧向自振频率附近。根据实测行人侧向力步频在 0.7~1.2 Hz 左右, 因此千禧桥会在 0.35~0.6 Hz 和 0.7~1.2 Hz 附近出现过大的侧向振动。实际上发生侧向振动频率恰好为 0.48 和 0.96 Hz。

5. 结论

本文提出平面双线摆模型来研究行人荷载作用下悬索桥的动力学行为。如果将行人行走产生的竖向和侧向激励力简化为简谐荷载, 则平面双线摆模型的控制方程为 Hill 方程。通过对 Hill 方程的稳定性分析可以解释悬索桥中出现的锁频现象。将稳定性分析结论应用到伦敦千禧桥可以解释千禧桥中为何会出现 0.48 和 0.96 Hz 过大侧向振动。本文提出的平面双线摆模型和其他人行桥模型最大区别在于本模型中考虑了悬索结构的特性。利用这一特性本模型可以较容易地解释其他模型不易解释的问题, 这表明在进行人-桥相互作用研究时应该考虑桥梁结构的特性, 而不应将所有形式的桥梁都简化为单自由度体系。

致 谢

本文感谢国家自然科学基金(11472160, 51708349)的支持。

参考文献

- [1] Bachmann, H. and Ammann, W. (1987) Structural Engineering Documents 3e, Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines. International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), Zurich, Switzerland.
- [2] Fujino, Y., Pacheco, B.M., Nakamura, S. and Warnitchai, P. (1993) Synchronism of Human Walking Observed during Lateral Vibration of a Congested Pedestrian Bridge. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, **22**, 741-758. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290220902>
- [3] Dallard, P., Fitzpatrick, A.J., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill Smith, R.M. and Willford, M. (2001) The London Millennium Footbridge. *Structural Engineer*, **79**, 17-33.
- [4] Dallard, P., Fitzpatrick, A.J., Flint, A., Low, A., Ridsdill Smith, R.M., Willford, M. and Roche, M. (2001) London Millennium Bridge: Pedestrian-Induced Lateral Vibration. *Journal of Bridge Engineering*, **6**, 412-417. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2001\)6:6\(412\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2001)6:6(412))
- [5] Roberts, T.M. (2005) Lateral Pedestrian Excitation of Footbridges. *Journal of Bridge Engineering*, **10**, 107-112. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2005\)10:1\(107\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2005)10:1(107))
- [6] Newland, D.E. (2004) Pedestrian Excitation of Bridges. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **218**, 477-492. <https://doi.org/10.1243/095440604323052274>
- [7] Piccardo, G. and Tubino, F. (2008) Parametric Resonance of Flexible Footbridges under Crowd-Induced Lateral Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, **311**, 353-371. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.008>
- [8] MCRobie, A., Morgenthal, G., Lasenby, J. and Ringer, M. (2003) Section Model Tests on Human Structure Lock In. *Proceedings of the Institution of Civil Engineering-Bridge Engineering*, **156**, 71-79. <https://doi.org/10.1680/bren.2003.156.2.71>
- [9] Zhou, D. and Ji, T.J. (2008) Dynamic Characteristics of a Generalized Suspension System. *International Journal of Mechanical Sciences*, **50**, 30-42. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.05.007>
- [10] Grundamann, H., Kreuzinger, H. and Schneider M. (1993) Dynamic Calculation of Footbridges. *Bauingenieur-Germany*, **68**, 215-225.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2326-3458, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: hjce@hanspub.org