

# Gravitational Formula of Apple Falling for Considering Air Resistance

Yuhua Fu

CNOOC Research Institute, Beijing

Email: fuyh1945@sina.com

Received: Apr.4th, 2020, published: Apr.7th, 2020

---

## Abstract

On the basis of the derivation of several improved formulas of universal gravitation, by comparing their specific forms, for considering repulsive force in the opposite direction of gravity (namely air resistance), the more accurate gravitational formula of apple falling can be obtained.

## Keywords

Improved Formula of Universal Gravitation, Apple, Falling, Repulsive Force, Air Resistance, More Accurate Gravitational Formula

---

# 苹果下落时考虑空气阻力的引力公式

付昱华

中海油研究总院, 北京

Email: fuyh1945@sina.com

收稿日期: 2020年4月4日; 发布日期: 2020年4月7日

---

## 摘要

在导出几个改进的万有引力公式的基础上, 通过比较其具体形式, 考虑苹果下落时所受到的与引力方向相反的斥力作用, 亦即空气阻力, 可以得到苹果下落时较精确的引力公式。

## 关键词

改进的万有引力公式, 苹果, 下落, 斥力作用, 空气阻力, 较精确的引力公式

---

## 1. 引言

对于引力相互作用的探讨，是一个永远不会完结的课题。但是人们在探讨引力相互作用时，往往忽略一些不应忽略的因素；例如在地球上讨论苹果下落问题时，往往忽略空气阻力等等因素，然而实际情况是这些因素根本不应忽略；有鉴于此，本文讨论苹果(或其他物体)下落时，考虑空气阻力而得到的较精确的引力公式。

## 2. 几个改进的万有引力公式

因为与本文关系密切，所以先将参考文献[1-3]中导出的几个改进的万有引力公式简述如下。

对于水星近日点进动问题和光线近日偏折问题，可以得出了如下改进的牛顿万有引力公式

$$F = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{3G^2M^2mp}{c^2r^4} \quad (1)$$

式中：负号表示两物体之间的作用力为吸引力； $G$ 为引力常数； $M$ 和 $m$ 为两物体的质量； $r$ 为两物体间的距离； $c$ 为光速； $p$ 为质量为 $m$ 的物体在质量为 $M$ 的物体的引力场中沿圆锥曲线或近似圆锥曲线运动时所得到的半正焦弦，而且有： $p = a(1 - e^2)$ ，对于椭圆； $p = a(e^2 - 1)$ ，对于双曲线； $p = y^2/2x$ ，对于抛物线。应用上式求解水星近日点进动问题和光线近日偏折问题，所得结果与广义相对论完全一致。

对于如下实例，改进的牛顿万有引力公式为另一种不同的形式，而且同时得到改进的牛顿第二定律。

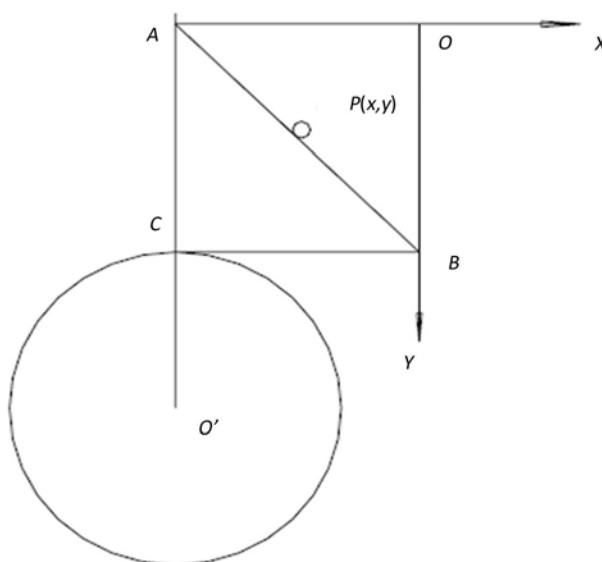


Figure 1. A small ball is rolling from A to B

图 1. 小球从 A 滚动到 B

如图 1 所示，设有一条从 A 到 B 的直线(实际上是一个斜面)，考虑小球沿直线从 A 滚动到 B 的情况。设当小球位于 A 点时，其初速度为零。假设小球可以视为质点，因而转动动能可以忽略不计，摩擦作用也忽略不计。

设圆  $O'$  代表地球。地球的质量为  $M$ ，小球的质量为  $m$ 。设  $AO'$  为一条铅垂线， $x$  坐标与  $AO'$  垂直， $y$  坐标与  $x$  坐标垂直(与  $OB$  重合)。 $BC$  与  $OB$  垂直。 $OA$ ， $OB$ ， $BC$ ， $AC$  的长度均为  $H$ ， $O'C$  的长度等于地球半径  $R$ 。假设从 A 到 B 的直线以及  $x$ - $y$  坐标均以某种方式固定于地面，因此可以不考虑地球的运动而只考虑小球在  $x$ - $y$  坐标中的运动。

经过求解，得到变维分形形式的改进的牛顿第二定律如下

$$F = ma^{1+8.85 \times 10^{-8}u} \quad (2)$$

式中：变量  $u$  为小球滚下的水平距离( $u = x + H$ )。

同时得到变维分形形式的改进的万有引力公式如下

$$F = -\frac{GMm}{r^{2-2.71 \times 10^{-13}u}} \quad (3)$$

式中：变量  $u$  为小球滚下的水平距离( $u = x + H$ )。

另外，对于图 2 所示小球(对于苹果也是一样)在地球引力场中自由下落的情况，应用能量守恒定律导出了原有的万有引力定律和牛顿第二定律。

如图 2 所示，设圆  $O'$  代表地球。地球的质量为  $M$ ，小球的质量为  $m$ 。设  $AO'$  为一条铅垂线， $y$  坐标与  $AO'$  平行。 $AC$  的长度为  $H$ ， $O'C$  的长度等于地球半径  $R$ 。假设可以不考虑地球的运动而只考虑小球在地球引力场中的自由下落(从点  $A$  到点  $C$ )。

假设万有引力定律中的有关指数是未知的，只知道公式的形式为：

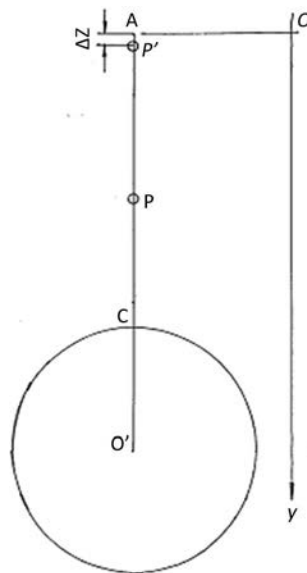
$$F = -\frac{GMm}{r^D} \quad (4)$$

式中： $D$  为待定常数。

类似地，假设牛顿第二定律中的有关指数也是未知的，只知道公式的形式为：

$$F = ma^{D'} \quad (5)$$

式中： $D'$  为待定常数。



**Figure 2.** A small ball is falling in gravitational field of the Earth  
**图 2.** 小球在地球引力场中自由下落

应用能量守恒定律，对于小球下落的全程(从点  $A$  到点  $C$ )，可以导出牛顿第二定律，亦即导出  $D' = 1$ ；但是仅对于小球从  $A$  点自由下落一段极短距离  $\Delta Z$ ，到达端点  $P'$  时的情况，可以导出万有引力定律，亦

即导出  $D = 2$ 。

### 3. 考虑空气阻力时的引力公式

与实际情况相比较，上述所有的公式都有一个共同的不足之处，亦即都没有考虑空气阻力。据此，我们先确定考虑空气阻力时引力公式的形式。

经过与上述改进的万有引力公式相比较，可以认为在原有的万有引力公式中增加修正项的做法是可取的。另外，改进的公式在苹果(或其他物体)处于静止状态时，应能还原到原有的万有引力公式，亦即应该含有下落距离  $y$  的项。

由于空气阻力的方向与吸引力相反，属于斥力，参照公式(1)的具体形式，改进公式应取为如下形式。

$$F = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{kGMmy}{r^4} \quad (6)$$

式中， $y$  为下落距离， $y = R + H - r$ ， $0 \leq y \leq H$ ； $k$  为待定常数；显然，当  $y = 0$  时就还原到原有的万有引力公式。

由此可得

$$F = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{kGMm(R+H)}{r^4} - \frac{kGMm}{r^3}$$

据此得引力势能为

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{kGMm(R+H)}{3r^3} - \frac{kGMm}{2r^2}$$

根据能量守恒定律可得

$$-\frac{GMm}{r_{O'A}} + \frac{kGMm(R+H)}{3r_{O'A}^3} - \frac{kGMm}{2r_{O'A}^2} = \frac{1}{2}mv_p'^2 - \frac{GMm}{r_{O'P}} + \frac{kGMm(R+H)}{3r_{O'P}^3} - \frac{kGMm}{2r_{O'P}^2}$$

式中， $v_p'$  为苹果(或小球，或其它物体)位于  $P$  点时的速度。

现在我们根据苹果(或小球)降落到地面(位于  $C$  点时)的速度  $v_c'$  来确定待定常数  $k$ 。需要说明的是，确定  $v_c'$  可以有两种方法：理论方法和实验方法，但是目前只能应用实验方法。

确定待定常数  $k$  的方程为

$$\frac{kGM}{6R^2} - \frac{kGM}{6(R+H)^2} - \frac{kGMH}{3R^3} = \frac{1}{2}v_c'^2 + \frac{GM}{R+H} - \frac{GM}{R}$$

假设  $v_c'$  已经用实验方法测定，于是可以解出  $k$  值。

$$k = \frac{\frac{1}{2}v_c'^2 + \frac{GM}{R+H} - \frac{GM}{R}}{\frac{GM}{6R^2} - \frac{GM}{6(R+H)^2} - \frac{GMH}{3R^3}}$$

简化后可得

$$k = \frac{\frac{GMH}{R(R+H)} - \frac{1}{2}v_c'^2}{GM \left( \frac{3H^2R + 2H^3}{6R^3(R+H)^2} \right)}$$

#### 4. 结论

- 1) 考虑空气阻力，确实可以得到苹果下落时较精确的引力公式。
- 2) 对于不同材质的物体，例如木球和铁球，其落地时的速度是不一样的，因而其对应的引力公式也是不同的。
- 3) 由于仅仅在下落前以及落地时满足能量守恒定律，因此本文所得到的公式仍然可以进一步改进。
- 4) 严格地讲，本文所得到的公式为综合引力公式；由于确定待定系数时应用了实测数据，因而除了考虑了传统意义上的“纯粹引力”和空气阻力的共同作用以外，还相当于考虑了其它各种因素的影响(包括某些目前还不知晓或者还没有考虑的影响因素，例如物体下落时温度可能会上升等等)，不过其它各种因素的影响应该是小于空气阻力的影响。

#### 参考文献

- [1] 付昱华, 改进的牛顿万有引力公式, 自然杂志, 2001 年 1 期, 58-59.
- [2] Fu Yuhua, New Newton Mechanics Taking Law of Conservation of Energy as Unique Source Law, Science Journal of Physics, Volume 2015, Article ID sjp-130, 12 Pages, 2015, doi: 10.7237/sj130.
- [3] Fu Yuhua. New Newton Mechanics and Related Problems, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.