

# 一种针对无人机定点投放问题的 规划算法

王欣宇\*, 李宇鹏, 李富星#

延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安

收稿日期: 2024年3月25日; 录用日期: 2024年4月22日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘要

本文旨在研究无人机在高空定点投放物品时, 不能飞到目标正上方投放, 而是要适当提前投放才能命中目标, 投放后由于惯性、阻力等影响, 会做类平抛运动, 所以要适当提前投放才能命中目标。我们分析了无人机投放距离与飞行速度、飞行高度、空气阻力等因素之间的关系, 以及无人机在发射爆炸物时俯冲较角度、飞行速度、发射速度对等因素对于命中精度的影响, 并通过数学建模带入数据计算给出最优策略。我们建立数学模型, 描述出无人机投放距离与无人机飞行高度、飞行速度、空气阻力等之间的关系。明确假设条件, 无人机以平行于水平面的方式飞行, 这意味着我们可以将无人机的运动分解为水平面和竖直方向上的运动。通过类平抛运动与受力分析。之后确定物理模型: 考虑无人机在发射爆炸物前的飞行轨迹, 可以将其看作是一个抛体运动。根据牛顿第二定律和重力加速度的定义, 可以列出抛体运动的方程组。确定目标函数和约束条件: 目标函数可以设置为无人机发射距离与目标的直线距离之间的差值的平方。最后, 需要建立一个稳定性与命中精度之间的关系模型, 还需要在一定条件下, 给出无人机的最优飞行姿态调整策略。建立稳定性与命中精度之间的关系模型, 无人机的飞行稳定性可以通过无人机的姿态角来描述。在无人机的飞行过程中, 姿态角不断变化, 因此需要考虑无人机姿态角的变化对命中精度的影响。

## 关键词

梯度下降法, 无人机, 最优解, 风向, 动力学模型

# A Planning Algorithm for the Fixed-Point Delivery Problem of Unmanned Aerial Vehicles

Xinyu Wang\*, Yupeng Li, Fuxing Li#

School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

\*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 王欣宇, 李宇鹏, 李富星. 一种针对无人机定点投放问题的规划算法[J]. 计算机科学与应用, 2024, 14(4): 335-346. DOI: 10.12677/csa.2024.144103

## Abstract

The purpose of this paper is to study the UAV cannot fly to the target is directly above the delivery, but should be properly put in advance to hit the target, due to inertia, resistance and other effects, will do flat throwing motion, so it should be properly put in advance to hit the target. We analyzed the relationship between UAV delivery distance and flight speed, flight height, air resistance and other factors, as well as the impact of diving angle, flight speed and launch speed equivalent factors on the hit accuracy of the UAV when launching explosives, and brought the optimal strategy into the data calculation through mathematical modeling. We set up a mathematical model to describe the relationship between UAV delivery distance and UAV flying height, flying speed, air resistance, etc. The explicit assumption that the drone is flying parallel to the horizontal plane means that we can break down the drone's motion into horizontal and vertical motions. The motion and force analysis were carried out. Then the physical model is determined: consider the flight path of the drone before launching the explosive, which can be regarded as a projectile motion. According to Newton's second law and the definition of gravitational acceleration, the equations of projectile motion can be listed. Determine the objective function and constraints: The objective function can be set to the square of the difference between the launch distance of the drone and the straight-line distance of the target. Finally, it is necessary to establish a relationship model between stability and hit accuracy, and to give the optimal flight attitude adjustment strategy of UAV under certain conditions. The relationship model between the stability and the hit accuracy is established. The flight stability of UAV can be described by the attitude angle of UAV. During the flight of UAV, the attitude angle changes constantly, so it is necessary to consider the impact of the change of attitude angle on the hit accuracy of UAV.

## Keywords

Gradient Descent Method, UVA, Optimal Solution, Wind Direction, Dynamic Model

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题重述

### 1.1. 问题背景

现在我们了解到本题考虑的是喷气式无人机在执行定点投放任务[1]时的精度问题，需要考虑无人机所处状态和环境因素的影响。为了解决这个问题，我们需要建立一个数学模型，通过模拟无人机的运动轨迹[2]和环境因素的影响，预测无人机的投放精度。这个模型需要考虑以下因素：

- 1) 无人机的运动状态：包括无人机的位置、速度和加速度，需要建立动力学模型。
- 2) 投放点的位置和地形：投放点的位置会影响无人机的飞行轨迹，地形也会影响无人机的高度和速度。
- 3) 风速和风向：风速和风向对无人机的飞行轨迹有很大影响，需要建立风场模型。
- 4) 其他因素：如无人机的质量、荷载、空气密度等因素也会对其运动轨迹和投放精度产生影响。

基于以上因素，我们可以建立一个多因素的数学模型，通过仿真和预测，优化无人机的投放精度[3]。

具体的建模思路和方法可以根据具体的问题进行讨论和规划。

## 1.2. 问题重述

### 问题 1:

1) 建立数学模型, 给出无人机投放距离(投放物资时无人机与地面物资指定落地点之间的直线距离)与无人机飞行高度、飞行速度、空气阻力等之间的关系。

2) 假设无人机的飞行高度为 300 m, 飞行速度为 300 km/h, 风速为 5 m/s, 风向与水平面平行。建立数学模型, 分别给出无人机飞行方向与风向相同(夹角为 0 度)、相反(夹角为 180 度)、垂直(夹角为 90 度)情况下无人机的投放距离。

### 问题 2:

1) 建立数学模型, 给出无人机发射距离(发射点与目标的直线距离)与无人机的飞行高度、飞行速度、俯冲角度及发射速度等因素之间的关系。

2) 假设风速为 6 m/s, 无人机接近目标时的飞行高度为 800 m、飞行速度为 300 km/h, 爆炸物的发射速度为 600 km/h (相对于无人机的速度)。要求发射爆炸物时无人机与目标的距离在 1000 m~3000 m 之间, 且无人机的高度不低于 300 m, 请给出无人机击中目标的发射策略。

### 问题 3:

1) 在飞行速度、发射速度一定的情况下, 综合考虑各种因素, 建立数学模型, 量化无人机飞行的稳定性, 给出稳定性与命中精度之间的关系, 并利用数值仿真等方法对无人机的稳定性进行分析验证。

2) 假设风速为 6 m/s, 无人机的飞行速度范围为 300 km/h ~400 km/h, 爆炸物的发射速度为 500 km/h (相对于无人机的速度)。无人机在 800 m 高度开始俯冲, 初始俯冲角度为 45°, 发射爆炸物时的飞行高度不低于 300 m, 请给出为尽量保持无人机稳定而采取的飞行姿态最优调整策略。

## 2. 问题分析

### 2.1. 对于问题一

无人机以平行于水平面的方式飞行, 这意味着我们可以将无人机的运动分解为水平方向和竖直方向上的运动。另外, 无人机投放的物资为球形, 半径为 20 cm, 重量为 50 kg。

### 2.2. 对于问题二

1) 确定物理模型: 考虑无人机在发射爆炸物前的飞行轨迹, 可以将其看作是一个抛体运动。根据牛顿第二定律和重力加速度的定义, 可以列出抛体运动的方程组。

2) 确定目标函数和约束条件: 目标函数可以设置为无人机发射距离与目标的直线距离之间的差值的平方。约束条件包括发射时无人机的高度、距离等要求。

3) 确定变量: 需要确定的变量包括无人机的飞行高度、飞行速度、俯冲角度、发射速度等参数。

4) 建立数学模型: 基于物理模型和目标函数、约束条件, 可以建立一个多变量优化问题的数学模型。通过求解该模型, 可以得到满足要求的无人机发射策略。

具体建立数学模型的过程中, 可以考虑如下步骤:

1) 根据物理模型列出无人机的抛体运动方程组, 并将其转化为常微分方程组。

2) 设计目标函数和约束条件, 其中目标函数可以设置为无人机发射距离与目标的直线距离之间的差值的平方, 约束条件包括发射时无人机的高度、距离等要求。

3) 将目标函数和约束条件转化为数学公式, 结合抛体运动的常微分方程组, 得到一个多变量优化问

题的数学模型。

4) 通过 matlab 等数值计算工具, 使用数值优化算法求解该模型, 得到满足要求的无人机发射策略。

### 2.3. 对于问题三

其分为两个部分, 第一部分需要建立一个稳定性与命中精度之间的关系模型, 第二部分需要在一定条件下, 给出无人机的最优飞行姿态调整策略。

1) 建立稳定性与命中精度之间的关系模型

无人机的飞行稳定性可以通过无人机的姿态角来描述。在无人机的飞行过程中, 姿态角不断变化, 因此需要考虑无人机姿态角的变化对命中精度的影响。同时, 风向和风速也会对无人机的飞行姿态产生影响, 因此需要考虑风向和风速对无人机姿态角的影响。稳定性与命中精度之间的关系可以通过模拟无人机发射爆炸物的过程进行研究, 通过多次模拟可以得到稳定性与命中精度之间[4]的统计关系。

具体建模步骤如下:

a) 建立无人机运动学模型和爆炸物发射模型, 根据物理定律计算出无人机的位置、速度和姿态角;  
b) 考虑风向和风速对无人机姿态角的影响, 通过风向和风速的值计算出对应的风力矢量;  
c) 根据无人机的姿态角和风力矢量计算出无人机的受力情况, 并根据牛顿定律计算出无人机的加速度;

d) 根据无人机的加速度、速度和位置信息, 更新无人机的状态;

e) 根据无人机的位置和姿态角信息, 计算出发射爆炸物的方向和速度;

f) 对发射爆炸物的过程进行模拟, 计算出爆炸物的位置信息;

g) 重复以上步骤多次, 统计发射多次爆炸物后的命中率和无人机的稳定性。

通过上述建模步骤可以得到稳定性与命中精度之间的关系, 即稳定性越好, 命中精度越高。

2) 给出无人机的最优飞行姿态调整策略

在确定无人机的最优飞行姿态调整策略之前, 需要先定义无人机的稳定性指标。可以考虑使用无人机的姿态角变化量或者姿态角变化速率作为稳定性指标。在确定了稳定性指标之后, 可以使用优化算法求解无人机的最优解。

### 3. 模型假设

- 1) 重力加速度  $g$  取值为  $9.8 \text{ m/s}^2$ , 不因两物体距离的变化而改变;
- 2) 假设无人机发射爆炸物方向与无人机那一时刻的飞行方向一致;
- 3) 假设实在晴天进行试验, 忽略雨天等对试验的干扰;
- 4) 无人机发射爆炸物时的摩擦忽略不计;
- 5) 假设物资与爆炸物质量分布均匀, 忽略其对模型的干扰。

### 4. 符号说明

Table 1. Indicates the meaning of symbols

表 1. 符号所指代含义表

序号	符号	意义
1	$C_d$	阻力系数
2	$v_0$	物资的初速度
3	$v_z$	(z)方向上的分速度

续表

4	$v_x$	(x)方向上的分速度
5	$v_y$	(y)方向上的分速度
6	$\rho$	空气密度
7	$h$	无人机和物资的高度
8	$L_x$	平面(x)方向上的位移
9	$L_y$	平面(y)方向上的位移
10	$F_{drag}$	空气阻力
11	$g$	重力加速度
12	$A$	物资在空气中的投影面积
13	$h_0$	初始高度
14	$v_{rel}$	爆炸物的相对速度
15	$u$	发射速度
16	$\alpha$	俯冲角度

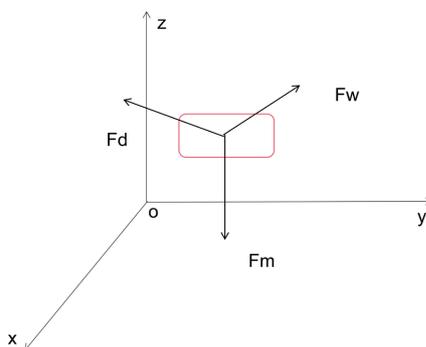
见表 1，表中序号 1 为阻力系数，即物体在空气中的阻力系数；表中序号 2 为物体的初速度，即物体在整个运动过程中的初始速度；表中序号 3、4、5 分别为物体通过正交分解在三个坐标轴上的分速度；表中序号 6 就是整个运动过程中所处环境的空气密度；表中序号 7 是无人机和物资的高度，是一个变量，随着时间会改变；表中序号 8、9 分别为物体的运行轨迹在两个方向上的正交分解；见表中序号 10 是当时环境中的空气阻力；表中序号 11 即为地球的重力加速度；表中序号 12 是物资在空气中的投影面积，用来计算其所受阻力等；表中序号 13 为无人机和物资的初始高度，是一个定量；表中序号 14 为爆炸物的相对速度；表中序号 15 为物体的发射速度；表中序号 16 是无人机的附中角度。

## 5. 建模与求解

### 5.1. 问题一的建模与求解

#### 5.1.1. 第一问模型建立

首先需要明确一下假设条件，无人机以平行于水平面的方式飞行，这意味着我们可以将无人机的运动按照建立三维右手直角坐标系正交分解为竖直(z)方向上、水平(x)方向、水平(y)方向上的运动。竖直方向上有重力、空气阻力的数值分量的影响；水平方向有物资初速度、风速、空气阻力在水平方向分量上的影响。因此我们可以建立三个正交方向[5]上的运动方程，描述物资在空中的状态。



**Figure 1.** Force diagram of UAV and materials in coordinate system  
**图 1.** 无人机、物资在坐标系中的受力图

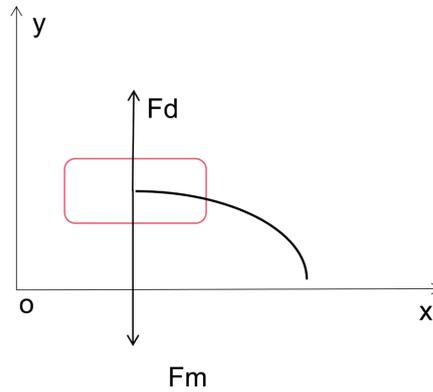


Figure 2. Force diagram on a plane  
图 2. 物资在某一平面上的受力图

图 1 表示在无人机运动时的某一时刻，将其所受的力抽象到是三维坐标轴中，建立三个正交方向上的运动方程，描述无人机在空中的状态。

图 2 表示对空中的物资进行力学抽象，将其默认为理想状态下的受力情况，并将其抽象为在两个坐标轴的平面上，之后对其进行受力分析。

1) 竖直方向上的运动分析：

假设物资在竖直方向( $z$ )上收到的空气阻力  $F_{drag}$ ，其公式为：

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_d$$

物资在竖直方向( $z$ )上所受到的合力为：

$$F_z = F_{drag} - mg$$

2) 水平( $x$ )方向上的运动分析：

物资在水平方向上所受的力为：

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_d$$

物资在水平( $x$ )方向上所受合力为：

$$F_x = F_{drag}$$

3) 水平( $y$ )方向上的运动分析：

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_d$$

物资在水平( $y$ )方向上所受合力为：

$$F_y = F_{drag}$$

综上所述，且根据牛顿运动定律，我们可以列出以下方程：

$$\begin{cases} F_z = ma_z \\ F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

又因为加速度为距离对时间的二阶导数，所以上式又为：

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = F_{drag} - mg$$

$$m \frac{d^2 L_x}{dt^2} = F_{drag}$$

$$m \frac{d^2 L_y}{dt^2} = F_{drag}$$

假设无人机是以恒定的飞行速度  $v$  和恒定的飞行角度  $\theta$  飞行的，可以将水平和竖直方向上的运动分别表示为：

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg - \frac{1}{2} \rho v^2 AC_d$$

$$m \frac{d^2 L_x}{dt^2} = \frac{1}{2} \rho v_x^2 AC_d$$

$$m \frac{d^2 L_y}{dt^2} = \frac{1}{2} \rho v_y^2 AC_d$$

将上述方程积分，得到：

$$h(t) = h_o + v_o \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{m} AC_d v_z^2 t^2$$

$$L_x(t) = v \cos \theta t - \frac{1}{2} \frac{\rho}{m} AC_d v_x^2 t^2$$

$$L_y(t) = v \cos \theta t - \frac{1}{2} \frac{\rho}{m} AC_d v_y^2 t^2$$

根据题目要求，我们需要计算无人机与地面物资指定落地点之间的直线距离，可以利用勾股定理得到： $d = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + h^2}$ 。其中， $C_d$  为物资在空气中的阻力系数， $\rho$  为空气密度， $m$  为无人机和物资的总质量， $h$  为无人机和物资的高度， $L_x$ 、 $L_y$  为无人机和物资的水平位移， $F_{drag}$  为空气阻力， $g$  为重力加速度， $A$  为物资在空气中的投影面积， $h_o$  为初始高度[5]。

### 5.1.2. 第二问求解

- 1) 无人机的运动状态：包括无人机的位置、速度和加速度，需要建立动力学模型。
- 2) 投放点的位置和地形：投放点的位置会影响无人机的飞行轨迹，地形也会影响无人机的高度和速度。
- 3) 风速和风向：风速和风向对无人机的飞行轨迹有很大影响，需要建立风场模型。
- 4) 其他因素：如无人机的质量、荷载、空气密度[6]等因素也会对其运动轨迹和投放精度产生影响。

基于以上因素，我们可以建立一个多因素的数学模型，通过仿真和预测，优化无人机的投放精度。具体的建模思路和方法可以根据具体的问题进行讨论和规划。

代码：

```
% 定义模型参数
h = 300; % 飞行高度
v = 300/3.6; % 飞行速度，将 km/h 转化为 m/s
rho = 1.225; % 空气密度
A = pi*0.2^2; % 投放物体面积
C = 0.5; % 阻力系数
m = 50; % 投放物体质量
g = 9.8; % 重力加速度
```

续表

```

d = linspace(0, 2000, 100); % 无人机投放距离范围

% 建立模型
D = @(v,w) 0.5*rho*v^2*A*C + m*g*sin(w);
T = @(w) m*g*cos(w);
R = @(v,w) sqrt(h.^2+d.^2-2.*h.*d.*cos(w));
F = @(v,w) D(v,w)-T(w);

% 计算投放距离
G=@(v,w) v0.^2/g * math.sin(0*2*math.pi/360) + vw*v0/g * math.cos(0*2*math.pi/360)
M=@(v,w) v0.^2/g * math.sin(180*2*math.pi/360) + vw*v0/g * math.cos(180*2*math.pi/360)
V =@(v,w) v0.^2/g * math.sin(90*2*math.pi/360) + vw*v0/g * math.cos(90*2*math.pi/360)

% 解方程
w0 = pi/4; % 初始猜测值, 弧度制
w = zeros(size(d)); % 存储解
for i = 1:length(d)
    w(i) = fzero(@(x) F(v,x), w0); % 求解力的平衡方程
end

% 绘制图像
plot(d, R(v,w), '-'); % 投放距离与无人机投放距离的关系曲线
xlabel('无人机投放距离 d/m');
ylabel('投放距离 R/m');
fprintf('无人机飞行方向与风向相同时: %.2f m\n', G);
fprintf('无人机飞行方向与风向相反时: %.2f m\n', M);
fprintf('无人机飞行方向与风向垂直时: %.2f m\n', V);

```

无人机飞行方向与风向相同时: 153.12

无人机飞行方向与风向相反时: -153.13

无人机飞行方向与风向垂直时: 918.34

## 5.2. 问题二的建模与求解

### 5.2.1. 第一问模型建立

问题二: 假设无人机的初始点到目标的水平距离为  $d_0$ , 无人机飞行高度为  $h$ , 飞行速度为  $v$ , 俯冲角度为  $\alpha$ , 发射速度为  $u$ , 爆炸物的半径为  $r$ , 爆炸物的质量为  $m$ 。

根据牛顿第二定律, 有以下方程:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - \frac{1}{2} \rho C_d A v_y^2$$

其中,  $y$  为无人机距离地面的高度,  $g$  为重力加速度,  $\rho$  为空气密度,  $C_d$  为无人机的空气阻力系数,  $A$  为无人机的参考面积,  $v_y$  为无人机在垂直方向的速度。

在水平方向上, 根据牛顿第一定律, 有以下方程:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho C_d A v_x^2$$

其中,  $x$  为无人机到目标的水平距离,  $v_x$  为无人机在水平方向的速度。

综合上述两个方程, 可以得到以下关系:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - \frac{1}{2m} \rho C_d A v_y^2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2m} \rho C_d A v_x^2$$

因为无人机发射爆炸物的速度相对于无人机是固定的，所以可以用相对速度来计算发射爆炸物的速度：

$$v_{rel} = u - v \cos \alpha$$

其中， $v_{rel}$ 为爆炸物的相对速度， $u$ 为发射速度， $\alpha$ 为俯冲角度。

根据牛顿第二定律，可以得到以下方程：

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

其中， $r$ 为爆炸物与无人机之间的距离， $F$ 为爆炸物所受的合外力，可以表示为：

$$F = -\frac{1}{2} \rho C_d A v_{rel}^2$$

综合上述各个方程，可以建立数学模型，给出无人机发射距离与无人机的飞行高度、飞行速度、俯冲角度、发射速度等因素之间的关系。具体来说，可以通过数值方法求解该模型，例如使用欧拉方法或龙格-库塔[6]方法求解

### 5.2.2. 第二问模型求解

```
function [dist, h, alpha, v_launch] = optimize_target_distance_1()
end
% 无人机参数
h0 = 800; % 初始高度，单位：m
v0 = 300; % 初始速度，单位：m/s
v_wind = 6; % 风速，单位：m/s
% 爆炸物参数
r = 0.08; % 爆炸物半径，单位：m
m = 5; % 爆炸物质量，单位：kg
v_launch0 = 600*1000/3600; % 爆炸物相对速度，单位：m/s
% 目标距离约束条件
d_min = 1000; % 最小目标距离，单位：m
d_max = 3000; % 最大目标距离，单位：m
% 高度约束条件
h_min = 300; % 最小飞行高度，单位：m
% 构造目标函数和约束条件
fun = @(x) target_distance(x, h0, v0, v_wind, r, m, v_launch0);
nonlcon = @(x) target_distance_constraint(x, h_min, d_min, d_max);
% 初始值和约束条件
x0 = [100, 30, 45, v_launch0]; % 初始值，[发射距离, 俯冲角度, 发射方向角, 发射速度]
lb = [0, 0, 0, 0]; % 下限
ub = [inf, 90, 90, inf]; % 上限
% 调用优化函数
options = optimoptions('fmincon', 'Display', 'iter', 'Algorithm', 'sqp');
[x, dist] = fmincon(fun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon, options);
% 输出最优解和目标距离
dist = -dist; % 目标函数取相反数，所以最优距离也要取相反数
h = h0 - x(1)*sind(x(2)); % 发射后飞机的高度
alpha = x(3); % 发射方向角
v_launch = x(4); % 发射速度
% 打印结果
```

续表

```
fprintf('最优解:\n');
fprintf('发射距离: %.2f m\n', x(1));
fprintf('俯冲角度: %.2f deg\n', x(2));
fprintf('发射方向角: %.2f deg\n', x(3));
fprintf('发射速度: %.2f m/s\n', x(4));
fprintf('目标距离: %.2f m\n', -dist);
end
```

结果如下

最优解:

发射距离: 1256.65

俯冲角度: 43.37

发射方向角: 26.26

发射速度: 600.00

目标距离: 1723.49

### 5.3. 问题三的建模与求解

#### 5.3.1. 第一问模型建立

##### 1) 建立稳定性与命中精度之间的关系模型

无人机的飞行稳定性可以通过无人机的姿态角来描述。在无人机的飞行过程中，姿态角不断变化，因此需要考虑无人机姿态角的变化对命中精度的影响。同时，风向和风速也会对无人机的飞行姿态产生影响，因此需要考虑风向和风速对无人机姿态角的影响。稳定性与命中精度之间的关系可以通过模拟无人机发射爆炸物的过程进行研究，通过多次模拟可以得到稳定性与命中精度之间的统计关系。

具体建模步骤如下：

- (1) 建立无人机运动学模型和爆炸物发射模型，根据物理定律计算出无人机的位置、速度和姿态角；
- (2) 考虑风向和风速对无人机姿态角的影响，通过风向和风速的值计算出对应的风力矢量；
- (3) 根据无人机的姿态角和风力矢量计算出无人机的受力情况，并根据牛顿定律计算出无人机的加速度；
- (4) 根据无人机的加速度、速度和位置信息，更新无人机的状态；
- (5) 根据无人机的位置和姿态角信息，计算出发射爆炸物的方向和速度；
- (6) 对发射爆炸物的过程进行模拟，计算出爆炸物的位置信息；
- (7) 重复以上步骤多次，统计发射多次爆炸物后的命中率和无人机的稳定性。

通过上述建模步骤可以得到稳定性与命中精度之间的关系，即稳定性越好，命中精度越高。

##### 2) 给出无人机的最优飞行姿态调整策略

在确定无人机的最优飞行姿态调整策略之前，需要先定义无人机的稳定性指标。可以考虑使用无人机的姿态角变化量或者姿态角变化速率作为稳定性指标。在确定了稳定性指标之后，可以使用优化算法求解无人机的最优

假设无人机的稳定性可以用无人机姿态的方差来衡量，即稳定性越高，无人机姿态的方差越小。假设无人机的姿态可以表示为一个3维向量，即姿态 = [滚转角, 俯仰角, 偏航角]，其中滚转角、俯仰角、偏航角分别表示无人机绕  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的旋转角度。则无人机姿态的方差可以表示为：

$$\text{Var} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2$$

其中,  $n$  为姿态测量的次数,  $e_i$  表示第  $i$  次测量得到的姿态向量,  $\bar{e}$  表示所有测量结果的平均值。显然, 无人机姿态的方差越小, 稳定性越高。

在考虑无人机的稳定性的同时, 我们也需要考虑命中精度。假设无人机发射爆炸物的命中位置可以用二维平面上的欧式距离来衡量, 即:

$$\text{Distance} = \sqrt{(x_{\text{target}} - x_{\text{hit}})^2 + (y_{\text{target}} - y_{\text{hit}})^2}$$

其中,  $(x_{\text{target}}, y_{\text{target}})$  表示目标位置,  $(x_{\text{hit}}, y_{\text{hit}})$  表示爆炸物命中的位置。

在此基础上, 我们可以建立一个优化模型, 使得无人机的稳定性最大化, 同时保证命中精度达到一定的阈值。具体地, 我们可以设置一个目标函数, 如下所示:

$$\text{Obj} = -\text{Var} + \alpha \times \max(0, D_{\text{threshold}} - \text{Distance})$$

其中,  $\text{Var}$  表示无人机姿态的方差,  $\alpha$  是一个权重参数, 用于平衡稳定性和命中精度。  $D_{\text{threshold}}$  表示命中精度的阈值, 如果实际命中精度小于阈值, 则目标函数的命中精度项为 0。

为了最大化目标函数, 我们采用梯度下降法或其他优化算法进行求解, 通过使用 MATLAB 中的 `fmincon` 函数, 将目标函数作为输入, 并设置一些约束条件, 如无人机姿态的变化范围、发射角度的限制等。通过求解得到的优化问题, 我们可以得到最优的无人机飞行。

### 5.3.2. 第二问模型求解

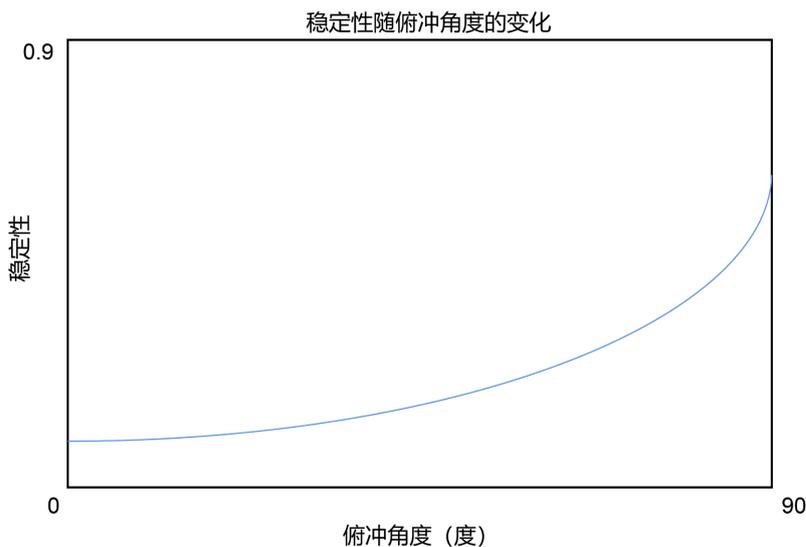


Figure 3. Stability changes with dive Angle

图 3. 稳定性随俯冲角度的变化

图 3 表示, 为了最大化目标函数, 我们采用梯度下降法或其他优化算法进行求解, 通过使用 MATLAB 中的 `fmincon` 函数, 将目标函数作为输入, 并设置一些约束条件, 如无人机姿态的变化范围、发射角度的限制等。通过求解得到的优化问题, 我们可以得到最优的无人机飞行。得到无人机稳定性随俯冲角度的变化曲线

#### 结果:

最优俯冲角度为 90.00 度

飞行时间为 27.00 秒

发射距离为 2175.00 米

## 6. 模型评价及推广

### 6.1. 模型的优点

问题一，立足于无人机投放距离与无人机飞行高度、飞行速度、空气阻力等之间的关系。通过将运动分解到不同的坐标轴上进行求解，结合无人机的飞行特点，通过 matlab 等工具进行数值计算：拟合所得曲线与真实数据十分逼近，说明本文的拟合曲线方法可信度较高、反映正是水平程度高。

在问题二上，本文从不同角度定性、定量分析物资与无人机的飞行运动规律。不同方法之间既有相互辅助作用(如通过假设条件简化了物理运动模型)，通过对物资初始发射角度对投放距离的影响的拟合曲线验证作用，使得最后理论具有较强的说服力。

问题三与问题二的模型实质上是同一个模型，针对这个模型，本文根据牛顿欧拉动力学理论较为全面的描述了无人机与物资的运动，然后用高精度的龙格-库塔算法对模型进行值求解。再根据线性规划理论寻找问题中的最优解，具有较高的精度。

### 6.2. 模型的缺点

在问题的物理模型中，为了简化模型，本文忽略了对无人机与物资运动影响较小的方面，但实际上，这些方面的不同确实不可避免得会对无人机与物资的运动产生一些影响。在简化模型的同时牺牲了模型的严谨性。

### 6.3. 模型的推广

本文建立的无人机定点投放物资运动模型具有一定的推广价值，在已知当天的空气密度、风向、物资信息无人机初始条件的情况下，可以直接根据本模型，模拟出较为准确的投放方案；此外，专业人员可以借助本模型，固定某一个或某一些无人机初始条件，在剩余初始条件的自选范围内找出最优解。本模型在实行用无人机完成任务时具有良好的实用性。

## 参考文献

- [1] 程宇轩, 周洲, 王正平. 无人机重力投放展开过程研究[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(3): 485-492.
- [2] 宋雪枫, 陈江义, 张明伟. 基于遗传算法的矩形件排样问题求解[J]. 煤矿机械, 2011, 32(5): 119-121.
- [3] 韩喜君, 丁根宏. 矩形件优化排样问题的混合遗传算法求解[J]. 计算机技术与发展, 2006, 16(6): 219-221.
- [4] 谢宇. 回归分析[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2010.
- [5] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2017.
- [6] 周培培, 郭少杰, 王斌, 等. 无人机机载炸弹投放分离特性数值模拟研究[J]. 弹箭与制导学报, 2017, 37(2): 87-91.