

基于一元二次方程的模型观念培养研究

——以人教版和苏科版初中数学教材为例

张静雯, 黄宇青, 金晶*

黄冈师范学院, 数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年3月12日; 录用日期: 2024年6月19日; 发布日期: 2024年6月29日

摘要

新课标对模型观念的培养提出了新要求, 教师教学迎来了新的机遇与挑战。列方程解决问题是培养学生模型观念的重要内容之一, 教材是教学的基础, 而人教版和苏科版教材各具特色, 研究通过对两版教材从内容设置、素材选取和课程难度三个维度进行比较, 从而研究如何帮助学生感知数学建模的基本过程、培养模型观念, 并对教师教学提出思考和建议。

关键词

模型观念, 初中数学教材, 教学建议

A Study on the Cultivation of Model Concepts Based on Quadratic Equations

—Taking PEP and JSP of Junior High School Mathematics Textbooks as an Example

Jingwen Zhang, Yuqing Huang, Jing Jin*

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Mar. 12th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

The new curriculum puts forward new requirements for the cultivation of the concept of model, and teachers' teaching ushers in new opportunities and challenges. Problem solving by equations is one of the important contents of cultivating students' concept of model, and the textbook is the basis of teaching, while the textbooks of human-taught edition and the Jiangsu Science Press edi-

*通讯作者。

tion have their own characteristics. The study compares the two editions of the textbook in terms of three dimensions: the content setting, the selection of materials, and the difficulty of the curriculum, so as to study how to help students perceive the basic process of mathematical modelling, cultivate the concept of model, and to put forward reflections and suggestions for teachers' teaching.

Keywords

Model Concept, Junior High School Mathematics Textbooks, Teaching Suggestions

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》在核心素养的主要表现及其内涵中明确指出：“初步感知数学建模的基本过程，从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律” [1]。方程式的实质就是对真实世界中存在着的等价关系进行刻画，用等号将两个不同的表达式联系起来，用等式来表示同样或者等于的量，在初中阶段，利用等式来解决问题，在培养初中生的数学模型方面有着非常大的作用。尽管如此，在进行方程的教学过程中，我们常常发现学生对于教学内容和它所展示的核心思想的理解并不深入，他们的教学视野也不够开阔，思维意识相当淡薄。这些问题都导致了他们缺少建立模型的思维，从而极大地影响了教学的成效。与《义务教育数学课程标准(2011 年版)》相比，《义务教育数学课程标准(2022 年版)》在小学阶段强调运用数和字母表达数量关系，重视学生符号意识和推理意识的形成与发展，从而为初中阶段方程的系统学习奠定基础[1]。这种改变给初中数学课程带来了很大的影响：学生对方程的解的概念缺乏，也没有运用等式性质来解决方程的经验。因此，老师们必须加强对方程解的概念的理解，对解方程的处理过程进行细致的研究，反映出等式性质的运用[2]。“模型观念”在两个版本教材中的呈现方式各有千秋，比较不同版本教材的编排异同，从而为教师更好地理解“用一元二次方程解决问题”内容的要求、有效提升“用一元二次方程解决问题”的教学效果、通过“用一元二次方程解决问题”的教学使学生初步感知数学建模的基本过程，为培养模型观念提供参考。

2. 研究设计

2.1. 研究对象

人教版教科书是由人民教育出版社出版，由教育部主管，具有很强的权威性和广泛的适用性，影响大；苏科版教材，经过多年的发展之后，在课程理念或是内容体系上，教材编写已经初步具有江苏教材的特色，也很有探究意义。研究选取人民教育出版社出版的初中数学九年级上册教材(以下简称“人教版”)与江苏凤凰科学技术出版社出版的初中数学九年级上册教材(以下简称“苏科版”)，选取范围为人教版教材中“实际问题与一元二次方程”的内容部分，包括“探究”“分析”和“思考”；苏科版教材中“用一元二次方程解决问题”的内容部分，包括“问题”“分析”“解”和“答”。

2.2. 研究内容

研究采用比较研究法、文献研究法和难度比较法，分别对人教版教材中“实际问题与一元二次方程”

和苏科版教材中“用一元二次方程解决问题”的内容部分，从内容设置、素材选取和课程难度三个维度进行比较研究。

2.2.1. 内容设置

两版教科书都将用一元二次方程解决问题安排在九年级上册第一单元“一元二次方程”的最后一节，并以探究问题的类型划分课时，苏科版和人教版都设计了3课时，研究将苏科版与人教版初中数学教材中用一元二次方程解决问题的基本内容结构进行了分类，见表1。

Table 1. The content structure of problem solving with quadratic equations in the textbooks of Suke edition and Renjiao edition
表 1. 苏科版与人教版教材用一元二次方程解决问题的内容结构

人教版	苏科版
	问题 1: 矩形面积问题
探究 1: 传播问题	问题 2: 增长率问题
探究 2: 增长率问题	问题 3: 销售问题
探究 3: 矩形面积问题	问题 4: 销售问题
	问题 5: 图形 + 行程问题
	问题 6: 图形 + 行程 + 动点问题

2.2.2. 素材选取

考虑到了初中学生的年龄个性特点、兴趣爱好和认知发展水平，两种版本数学教材的素材选取都经过编写者的深思熟虑来确定的，旨在使学生更加容易并快速得掌握相关知识。课外素材的重要性不言而喻。它的丰富多彩，这可以增强学生的学习动力，从而提高课堂表现。同时，有效的素材可以快速地帮助学生贴近生活实际，促使数学更好地描述现实世界，建立合适的数学模型，并且引导学生关注模型的实际应用性。研究将从图片、文字和引言三种素材选取进行比较。

2.2.3. 课程难度

两个版本的教材对于“用一元二次方程解决问题”都有三课时的教学计划，教学内容都是直接呈现例题，通过分析解决例题，体会数学模型的数量关系。因此，在比较了几种课程难度模型后，研究采用了鲍建生教授的综合难度模型，该模型有不同的层次，为了比较研究任务，这一难度模型主要从探究、背景、运算、推理、知识含量五个方面进行了对比，每一种难度因子又分为不同的等级，研究者对五个难度因素的各个等级进行赋值[3]，第一级为1，第二级为2，第三级为3，第四级赋值为4，如表2所示。

根据对每一种综合难度因素的不同等级的赋值，将每一种难度因素的加权平均进行了计算，鉴定每个因素的难度水平，计算公式如下：

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} \left(\sum_j n_{ij} = n; i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, \dots \right)$$

其中， $d_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 依次分别表示五个难度因素上的取值； d_{ij} 为第 i 个难度因素的第 j 个等级的加权平均(依次分别取 1、2、3、……)； n_{ij} 则表示这组题目中属于第 i 个难度因素的第 j 个等级的题目的个数，其总和等于该组题目的总数 n 。

根据采用的鲍建生教授的综合难度模型，对三版教材从探究、背景、运算、推理及知识点等五个难度因素进行了统计，如表3所示。

Table 2. Comprehensive difficulty assignment table
表 2. 综合难度赋值表

难度因素	水平区分			
	水平一	水平二	水平三	水平四
探究	识记	理解	探究	
背景	无背景	个人生活	公共常识	科学情境
运算	无运算	数值运算	一步符号运算	两步符号运算
推理	无推理	一步推理	两步推理	三步推理
知识点	一个知识点	两个知识点	三个知识点	四个知识点
赋值	1	2	3	4

Table 3. Statistical table of difficulty of content parts of problem solving with quadratic equations
表 3. 用一元二次方程解决问题的内容部分难度统计表

因素	难度水平	数量/道		占比/%		加权平均	
		人教版	苏科版	人教版	苏科版	人教版	苏科版
探究	识记	0	0	0	0		
	理解	0	3	0	50	3	2.5
	探究	3	3	100	50		
背景	无背景	0	0	0	0		
	个人生活	1	1	33.3	16.7	2	1.83
	公共常识	1	5	33.3	83.3		
	科学情境	1	0	33.3	0		
运算	无运算	0	0	0	0		
	数值运算	0	0	0	0		
	一步符号运算	2	4	66.7	66.7	3.33	3.33
	两步符号运算	1	2	33.3	33.3		
推理	一步推理	0	1	0	16.7		
	两步推理	0	1	0	16.7	5	3.67
	三步推理	0	3	0	50		
	四步推理	3	1	100	16.7		
知识点	一个知识点	1	2	33.3	33.3		
	两个知识点	2	2	66.7	33.3	1.67	2
	三个知识点	0	2	0	33.3		

3. 初步比较的结果

3.1. 内容设置比较

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》明确提出了数学学科的三大核心素养：“会用数学的眼光观

察现实世界”“会用数学的思维思考现实世界”“会用数学的语言表达现实世界”，在初中阶段主要体现在抽象能力、运算能力等九大能力[1]。从宏观上看，两版教科书中用一元二次方程解决问题的内容编排都体现了《义务教育数学课程标准(2022年版)》对培养学生模型观念的要求，即通过鼓励学生运用数学模型表达和解决问题，培养学生的模式观念，增强学生的数学语言表达能力。因此，两版教材都强调了一元二次方程内容在培养学生基本数学素养方面的价值，都体现了对学生模型观念的培养。

史宁中教授在《数学基本思想 18 讲》中指出：“数学无力解释现实世界，但可以用数学更好地描述现实世界，而数学模型是理性加工现实世界的重要范例。”[4]两个版本的教材都体现了数学模型在解决一元二次方程问题中的实用价值，并加入了大量的实际问题情境，拉近了学生与现实生活的距离，引导学生关注模型的实际应用。特别是两个版本的教材都加入了所求结果与实际不符的情境问题的描述，让学生深刻理解实际问题的解决不仅要建立在数学模型的基础上，更要符合生活的实际，促进数学对现实世界的刻画。

由表 1 可知，“用一元二次方程解决问题”两个版本在教学内容上存在着不同。苏科版教材共设置 6 道习题，并针对习题的不同类型，分别给出了对应的建模策略。这样的安排，可以帮助学生用直觉来抽取问题中的数字信息和它们之间的数学联系，以此来构建数量关系，从而给学生们提供一种有效的分析和解决问题的策略。在问题 5 和问题 6 中，将图形问题与行程问题和动点问题相结合，与人教版教材相比较，苏科版教材选取的问题具有较强的综合性，有利于学生意识到真实情景的复杂性，但问题难度偏低，缺乏具有探究性的问题，学生的建模能力难以得到提升。人教版教材仅安排了 3 个“探究”栏目，重点讨论了流感传播、销售中的成本、书的封面设计等较为复杂的实际问题。在探究以上 3 个栏目时，教科书没有直接呈现适当的建模策略，而是首先进行引导，例如，通过“边空提问”让学生思考数学结论的实际意义，并通过“思考”栏目呈现拓展性、开放性问题。人教版教材通过 3 个实际问题的探讨，突出了方程在求解复杂、具体问题中的结构或关系方面的优势，突出了方程学习的价值与意义，推动了学生模型观念的深入发展。

3.2. 素材选取比较

在两版本教材中，都设计了图片素材。对比看来，苏科版教材似乎比人教版包含更多、更丰富的图片素材。特别地，在苏科版教材问题 4 的设置中，其中会出现两个男生的头像，非常卡通可爱，给人感觉像是一群学生围坐在一起讨论问题。这种图片素材的安排，既体现出探究性学习原则，又强调了合作交流这种学习方式的重要性。相比苏科版的卡通人物交流的设计，人教版在“探究”环节则是采用抛出问题的方式。笔者认为，人教版的处理没有苏科版的丰富多彩，这就需要教师在课堂上多用心设计，好调动学生的积极性。

两版本数学教材在文字素材的选取上也是各有特色，例如，人教版在每个探究活动中都用一个“云”形对话框和一个长方形“思考”文本框来突出需要学生进一步思考和检查模型的问题，从而引导学生深入理解方程模型的优越性及其实际意义。苏科版则没有在教材中对学生用文字进行引导，而是直接给出，特别是在计算结果的取舍方面。所以教师在教学过程中要注意对学生进行引导，让学生进一步思考方程的实际意义。

人教版教材的引言是从学生已有的知识经验入手，学生看到一元二次方程也可以作为数学模型来反应实际问题中存在的数量关系，一方面根据学生的认知发展水平，充分体现了学生的主体学习地位，另一方面可以让学生更快地开始学习新知识。苏科版是直接给出新知识，激发学生的探索欲。总之，两个版本的教材都注重选取贴近学生实际生活的素材，强调学生在构建数学模型过程中的自主感知和参与[5]。

3.3. 课程难度比较

在探究因素方面,人教版的问题均处于“探究”层次,而苏科版是“理解”和“探究”层次各半,从两个版本的加权平均值可以看出(表3),在“探究”因素上,人教版的难度高于苏科版;在背景因素上,人教版在“个人生活”、“公共常识”和“科学情境”三个水平的难度分布均匀,而苏科版的教材侧重于“公共常识”,从总的加权平均数来看(表3),苏教版的“背景”因素的难度要比人教版的小一些;两版教材在运算因素的总体趋势走向是一样的,66.7%的例题是一步符号运算,33.3%的例题是两步符号运算,两者加权平均值一样,说明两版教材在“用一元二次方程解决问题”的内容中对于学生的运算能力都有较高要求;两个不同版本的教科书在推理因子上有很大的差异,由加权平均数可以看到(表3),人教版的“推理”因子的难度要比苏科版本的高;两个版本的教材在“知识含量”因子上存在着明显的差别,从加权平均数(表3)来看,苏科版的“知识含量”因子比人教版的难度水平更高。

两个版本的“用一元二次方程解决问题”的内容中,三个版本的加权平均数为1.67~5,五个难度因子的差异最大的是“推理”,人教版为5,而苏科版为3.67,两者之间有1.33的差距。从教材本身的情况来看,两版教材在“运算”“推理因素”方面难度较高,“背景”“知识点”等方面则较低。

总的来说,人教版侧重于对知识的探索和推理,而苏科版侧重于知识点间的关联,两版教材都注重学生的运算能力。相比较而言,人教版课程难度较高。从培养学生的模型观念,加深学生对数学模型中数量关系的理解的角度来看,人教版的教材更加注重培养学生的探究推理能力,能够提高学生对数学问题的提取能力,并能够持续地构建和改进数学模型。

4. 启示与建议

培养学生的模型观念,可以培养和提高学生的抽象能力、运算能力和推理能力,对培养学生的应用意识和创新精神有积极作用,是提高学生核心素养的有效手段。通过建立解决问题的模型,模型概念得到形成和发展[6]。基于以上两个版本教材的对比,我们可以得到一些关于数学教学的启示。在实际教学中,教师应综合运用两种版本的教材,扬长避短,根据学情选择适当的内容,有选择地进行拓展。

4.1. 经历数学表达,初步构建模型

基于素材选取的比较,在构建一元二次方程的建模过程中,老师要重视学生运用数学思维来分析、用数学语言来表达实际问题中的数量关系的能力。在这一节教学中,要对问题中的数量关系进行准确的分析,找到能够作为列方程基础的相等关系,这是构建一元二次方程模型的最大困难。在建立并求解该模型时,仅靠苏科版教材中对学生思考的引导较为不足。教师可以通过提问、合作讨论等方式加强引导,对建立一元二次方程模型的重、难点进行研究,使学生在分析和解决问题的过程中更深刻地理解一元二次方程的使用价值。例如,人教版在问题探究的过程中,不断以“云”形对话框的形式呈现问题,引导学生深入理解数学模型中的数量关系,思考解决数学模型的实际意义。

4.2. 采用“一意性情境”,完善数学模型

基于内容设置的比较,通过设计问题情境再现有关知识,使学生将分散、无序、零碎的内容串联成一个单元,从而再现相关知识,使学生对数学内容有总体的认识与理解,并在此基础上循序渐进地提升其核心素养[1]。教师可以设计具有更高层次的“一意性情境”[7](所谓“一意性”就是同一问题情景,即问题情景的设定必须是连续的。以此为基础,以个人原有的知识经验为基础,主动、高效地构建知识),驱动学生的内程视角进行建构。教师可以将增长率问题、面积问题、销售问题、图形问题、行程问题、动点问题等情境为线索,贯穿于每一个教学阶段,并通过“情景创设→情景抽象→情景扩展→情

景迁移”四个步骤，层层推进，每一步都围绕着问题展开，激励学生进行持续的思维，从思维层次上对更为普遍的数学建模过程进行了解，从而形成模型概念。例如，人教版“探究 1”的流感传播问题，这类在现实世界中很常见的问题，例如细胞分裂、信息传播、储蓄收益等，教师可以在后续练习中给出这类题型的题目，锻炼学生的学习迁移能力，同时可以对建立的数学模型进行检验，感受一元二次方程在解决复杂的具体问题中的结构或关系时表现出的优越性，促进学生模型观念的进一步发展。

4.3. 增强数学学科的综合性和提升建模能力

基于课程难度的比较，可以得出这样的结论：增强教师在教学过程中数学学科的综合性和提升建模能力有助于提高教学效果，提高学生对现实世界情景复杂性的认识，提高学生综合运用所学知识构建数学模型的能力。例如，在人教版“探究 2”里，有两个相近但又有区别的概念，即：降低成本，降低费用，让学生体会到，在分析问题的时候，应该同时考虑到两个方面，从而对一种变化情况有一个整体的了解。在综合难度因素中，两个版本“知识含量”因子的加权平均值偏低。将各种数学知识的关联展示出来，有助于学生理解数学知识的逻辑关系。因此，在教学过程中，老师应尊重学生的认识水平，在设置例题时，可以多添加两个或更多的知识点，加强数学课程的综合性和提升建模能力。这样还能让学生更好地理解数学整体性，在潜意识里把“数学是一个密切联系的有机整体”刻在心里，并能熟练地应用。同时，也要注意不同学段、不同年级、不同单元、不同课时之间的关系。例如，苏科版“问题 5”的模型建立需要综合勾股定理，人教版“探究 2”需要综合变化率公式。

5. 结语

新课标中关于初中数学模型观念的内涵以及数学教材中建模观念的知识点为教师的教学提供了导向与启示，教师在教学中要重视学生运用数学思维来分析实际问题，用数学语言来表达数量关系的能力；教师可以设计具有更高位视野的“一意性情境”，驱动学生的内程视角进行建构；教师在提升教学中增强数学学科的综合性和提升建模能力，让学生意识到真实情景的复杂性，锻炼学生综合运用知识构建数学模型的能力。在实际教学中，教师要正确认识培养学生模型观念的重要性，并在自己的教育实践当中，根据学情选择性地拓展延伸。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准: 2022 年版[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 26.
- [2] 黄贤明. 苏科版与人教版初中数学教科书中一元一次方程内容的比较研究[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2023, 36(3): 124.
- [3] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52.
- [4] 史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016: 217.
- [5] 吴启虎. 初中数学模型观念层级体系与教学耦合研究——新课标与核心素养一致性导向与回归[J]. 数理天地(初中版), 2023(23): 62-65.
- [6] 杜育林, 顾祥芳, 刘光建. 在问题解决中促进模型观念的形成与发展——以一道二次函数题的教学研究为例[J]. 江苏教育, 2023(42): 43-46.
- [7] 孙朝仁. 初中数学复习课的思维转型路径——以“一元二次方程”复习课为例[J]. 中国数学教育(初中版), 2021(3): 2-5.