Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(4), 908-913
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.94150

MATLAB融入线性代数教学的实践与思考

鞠桂玲，胡红娟

陆军装甲兵学院基础部数学教研室，北京
Email: guilingju@163.com

收稿日期：2021年7月5日；录用日期：2021年8月6日；发布日期：2021年8月13日

摘　要

文章结合线性代数的特点及存在的问题，探讨了把MATLAB软件融入线性代数教学的必要性和优势，结合具体内容介绍了软件的应用，为MATLAB软件更好地应用于线性代数教学提供了参考。

关键词

线性代数，MATLAB，仿真实现

Practice and Thinking of Integrating MATLAB into Linear Algebra Teaching

Guiling Ju, Hongjuan Hu

Maths Staff Room, Basic Education Department, Army Academy of Armored Forces, Beijing
Email: guilingju@163.com

Received: Jul. 5th, 2021; accepted: Aug. 6th, 2021; published: Aug. 13th, 2021

Abstract

Combined with the characteristics and existing problems of linear algebra, this paper discusses the necessity and advantages of integrating MATLAB software into linear algebra teaching, and introduces the application of the software combined with the specific content, which provides a reference for the better application of MATLAB software in linear algebra teaching.

Keywords

Linear Algebra, MATLAB, Simulation Implementation

文章引用: 鞠桂玲, 胡红娟. MATLAB 融入线性代数教学的实践与思考[J]. 创新教育研究, 2021, 9(4): 908-913.
DOI: 10.12677/ces.2021.94150

1. 引言

线性代数是高等院校理工科专业的一门重要基础课程，是后续专业课程的数学基础。对于学生逻辑推理能力、抽象思维能力和基本运算能力，以及用数学方法解决实际问题的能力的培养有着重要意义。然而，现在使用的线性代数教材，理论性比较强，学生在学习过程中，普遍感觉这门课程比较抽象，有些问题难于理解，学习的主观意愿比较低，同时，实际问题涉及的变量往往很多、数字繁琐，庞大的数据处理和复杂的运算步骤使得计算既费时又容易出错，学生不容易动手计算完成，这就使得这门课程的教学方法、教学手段等的改革势在必行。随着计算机技术的发展，尤其是数据处理软件的日渐成熟，使复杂繁琐的计算可以快速地完成，利用 MATLAB 仿真软件来处理线性代数问题，可以达到事半功倍的效果。

2. MATLAB 的特点及在线性代数教学中的意义

MATLAB 是 matrix 与 laboratory 的缩写，是由 Cleve Moler 在 Linpack 和 Eispack 软件实验室中开发的，多年来 MATLAB 经历了一系列的扩展和改版，逐渐地发展成通用科学计算、图示交互系统和程序设计语言，在线性代数中有着非常广泛的应用。除了它自带的工具箱外，还可以根据需要，建立相应的 M-文件，解决更加复杂的问题，使人们从繁重的手工计算和高级语言程序调试中彻底解脱出来[1]。

将 MATLAB 应用于线性代数课程教学，一方面，可以借助 MATLAB 讲解有关定义和定理，使理论知识具体化、形象化，进一步加深学生对基本概念和定理的理解，激发学生的学习兴趣。同时，由于低维问题具有形象的几何意义，通过图形能强化学生的感性认识，因此，在教学中，教师可以以低维问题为基础，借助 MATLAB 数学软件，帮助学生理解一些抽象的概念，实现由具体到抽象的思维过程。另一方面，能有效扩大线性代数应用实例的范围，有助于学生完成与实际有关的大型问题的数学建模，让学生感觉到学有所用的同时，强化自己的应用意识，培养运用所学内容解决实际问题的应用能力。

3. MATLAB 在线性代数教学中的应用

下面举例说明 MATLAB 在线性代数教学中的应用。

3.1. 借助 MATLAB 软件理解定理，激发学生学习兴趣

线性方程组的解有以下定理[2]：

对于 n 元线性方程组 $Ax=b$；

1) 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$；

2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$；

3) 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$。

学习过程中，很多学生不理解线性方程组的不同情况解的意义，感觉定理内容比较抽象，不好理解。由于二元、三元线性方程分别表示直线和平面，可以借助 Matlab 绘图帮助学生理解线性方程组解的含义。例如，求包含两个变量的两个线性方程组成的方程组的解，等价于求两条直线的交点问题。

针对以下方程组

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$，b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$，c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

根据解的判定定理，三个方程组解的情况，分别是有唯一解，无解，无穷多解。

三个方程组对应的图形见图 1，通过图形可以直观的看到方程组的解的几何含义，方程组有唯一解、无解、无穷多解分别对应于两直线相交、平行、共线。借助 Matlab 数学软件，对低维问题有了直观的几何形象感知之后，可以把这个结论推广到高维的情形，实现由具体到抽象的思维的培养。

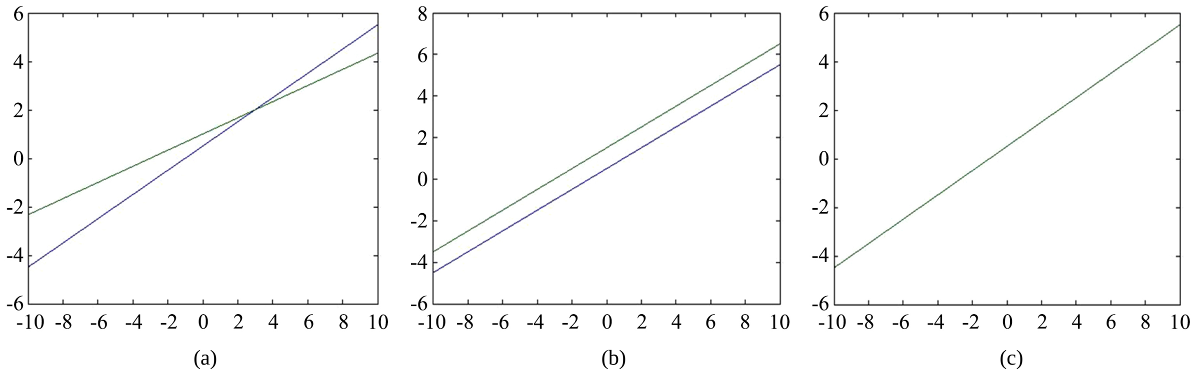


Figure 1. Geometry of equations
图 1. 方程组的几何图形

3.2. 借助 MATLAB 软件化抽象为具体，增加问题的直观性

关于二次型有下面的定理[3]

定理 1. 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$，总有正交变换 $x = Py$，使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值。

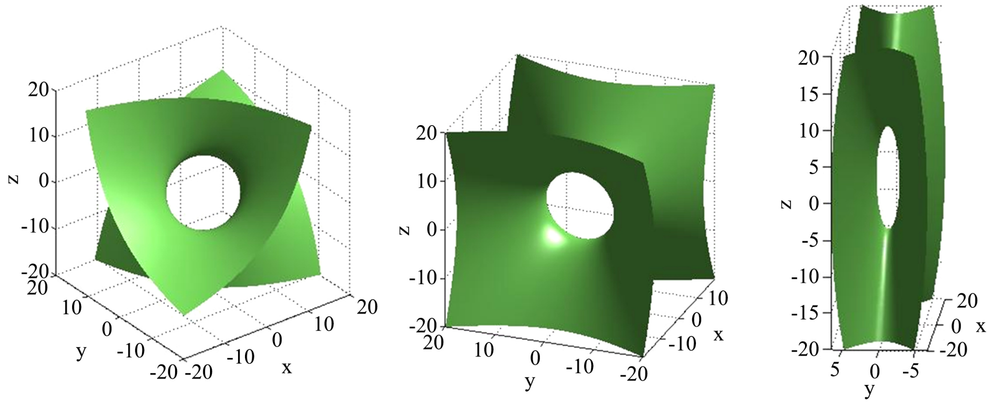
定理 2. 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$，总有可逆变换 $x = Py$，使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 不一定是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值。

在学习时，有些学生不清楚将一个二次型化为标准形的意义，不清楚利用正交变换和可逆变换的区别在哪里，可以结合具体的例子：化 $f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形。在给出具体的解题过程后，利用 MATLAB 编写程序，分别画出方程 $-2xy + 2xz + 2yz = 50$、正交变换下得到的方程 $-2x^2 + y^2 + z^2 = 50$、可逆变换下得到的方程 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 50$ 的图形，见图 2。

通过借助 MATLAB 画图，学生可以直观感受到，通过正交变换，图形的形状没有发生变化，但是图形在坐标系中的位置发生了变化，它的方程可以用只含平方项的方程来表示，是学生熟悉的单叶双曲面的方程。当采用的是可逆变换时，该变换不会改变图形所属的类，但是会改变图形的形状，可以看到图形沿着 y 轴方向进行了压缩。在课堂演示时，还可以直接运行 MATLAB 软件，转动图形，引导学生从 360 度观察图形的形状，借助图形，增加可视性，易于学生理解，吸引学生注意，从直观上加深学生对这一部分内容的理解[4]。



$-2xy+2xz+2yz=50$　　$-2x^2+y^2+z^2=50$　　$x^2+2y^2+z^2=50$

Figure 2. Geometry of quadratic form
图 2. 二次型的几何图形

3.3. 借助 MATLAB 软件解决实际问题，增强了内容的实用性

很多实际应用问题的数学模型，都可以转化为线性问题来求解。然而，庞大的数据处理和复杂的计算步骤，使得这门课程的应用受到很大的限制。比如，下图给出了某城市单行街道的交通流量(每小时通过的车辆数)，见图 3。

假定上述问题满足下列两个基本假设：

1) 全部流入网络的流量等于全部流出网络的流量；

2) 全部流入一个节点的流量等于流出此节点的流量。

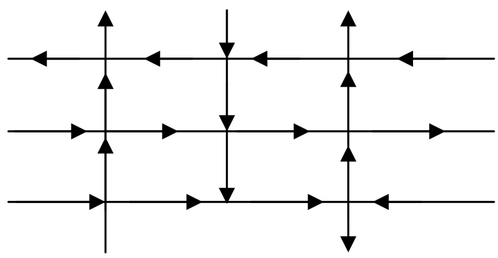


Figure 3. Traffic flow diagram
图 3. 交通流量图

根据上图及上述两个基本流量假设，可知所给问题满足如下线性方程组：

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 300 \\ x_4 + x_5 = 500 \\ -x_6 + x_7 = 200 \\ x_1 + x_2 = 800 \\ x_1 + x_5 = 800 \\ x_7 + x_8 = 1000 \\ x_9 = 400 \\ -x_9 + x_{10} = 200 \\ x_{10} = 600 \\ x_3 + x_6 + x_8 = 1000 \end{cases}$$

解线性方程组的问题，都要用到初等变换的方法，将增广矩阵化为行最简形矩阵，这个过程只涉及到换行、倍乘和倍乘相加三种简单的运算，依次利用主对角线上的元素将所在列的其他元素化为 0，即使对于一些变量较少的实际问题，虽然手算可以得到结果，但是既费时间又容易出错，枯燥的计算过程使学生产生厌倦情绪。

若将上述矩阵方程记为 $AX = b$，则问题就转化为求 $AX = b$ 的全部解。

下面利用 MATLAB 软件对上述方程进行求解，步骤如下

1) 输入系数矩阵 A，并求 A 的秩，判断方程组解的情况

$$\begin{aligned}A = [&0,1,-1,1,0,0,0,0,0,0;0,0,0,1,1,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0;\\&1,1,0,0,0,0,0,0,0,0;1,0,0,0,1,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,0,1,1,0,0;\\&0,0,0,0,0,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,0,0,0,-1,1;0,0,0,0,0,0,0,0,0,1;\\&0,0,1,0,0,1,0,1,0,0];\end{aligned}$$

%线性方程组的系数矩阵

rank (A)；%求 A 的秩

2) 求增广矩阵的秩

$$b = [300,500,200,800,800,1000,400,200,600,1000];$$

%常数 b

rank ([A, b])%增广矩阵的秩。

由上可知系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，都为 8，并且小于未知量的个数 10，所以方程有无穷多个解。

3) 求非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个特解

取 x_1 和 x_6 为自由未知数，值分别为 700 和 0，可得原方程组的一个特解为

$$\xi^* = (700,100,200,400,100,0,200,800,400,600)。$$

4) 用 null 命令求出齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系。

```
x0 = null(A,'r');
x0 =
  −1     0
 1     0
  0     0
−1     0
 1     0
 0    −1
0    −1
0     1
0     0
0     0
```

由此得到所求齐次线性方程组的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

综上所述，得到非齐次线性方程组 $AX = b$ 的通解为

$$x = \overline{\eta} + \xi^* = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \xi^* = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 700 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 100 \\ 0 \\ 200 \\ 800 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix},$$

c_1、c_2 为任意常数。

在解的表示式中 x 的每一个分量即为交通网络中未知部分的具体流量，该问题有无穷多个解。Matlab 的引入为用线性代数解决实际问题提供了有力的工具，学生在利用 Matlab 修改、分析数学模型的过程中，能加深对所学知识的理解，在探索的过程中体验到发现的愉悦。

4. 结束语

MATLAB 自带的线性代数计算函数和命令，不仅使学生摆脱了线性代数问题求解中大量繁琐的计算过程，有更多的时间培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，而且通过软件画图，在很大程度上减弱了线性代数的抽象性，使学生更容易直观理解各种概念并记忆深刻，增加了学生学习这门课程的兴趣，锻炼了学生的数学思维，为后续课程的学习及进一步研究打下了坚实的基础。如何将 MATLAB 更好的融入线性代数教学，还有很多值得进一步探讨的问题，也是我们以后教学过程中关注的重点问题。

参考文献

[1] 陈怀琛, 龚杰民. 线性代数实践及 MATLAB 入门[M]. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2009.

[2] David C. Lay (美). 线性代数及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[3] 同济大学数学系. 工程数学——线性代数[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[4] 王正盛. 中外线性代数教材的比较与探讨[J]. 大学数学, 2009, 25(1): 200-203.