

某些曲线复形的连通性

王浩龙, 郭启龙*

中国石油大学(北京)理学院, 北京

收稿日期: 2024年8月18日; 录用日期: 2024年9月12日; 发布日期: 2024年9月18日

摘要

在这篇文章中, 我们给出了曲面和柄体上的四种单纯复形: non-equal complex, part cut system complex, non-equal disk complex, domain disk complex, 并且研究了它们的连通性。

关键词

连通性, 曲线复形, Disk复形

Connectivity of Some Curve Complexes

Haolong Wang, Qilong Guo*

College of Science, China University of Petroleum (Beijing), Beijing

Received: Aug. 18th, 2024; accepted: Sep. 12th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

In this paper, we introduce non-equal complex, part cut system complex on the surface and non-equal disk complex, domain disk complex on the handlebody and study their connectivity.

Keywords

Connectivity, Curve Complex, Disk Complex

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

*通讯作者。

文章引用: 王浩龙, 郭启龙. 某些曲线复形的连通性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4322-4332.

DOI: 10.12677/aam.2024.139412

1. 引言

Harvey 在[1]中首次给出了曲线复形的定义, 即一个单纯复形, 其顶点为表面上的曲线合痕类, 其单形为一族非相交曲线合痕类。曲线复形的连通性得到了广泛研究, [2]和[3]中使用了各种方法进行验证。这一概念导致了其他几种单纯复形的出现。

Disk 复形将表面上本质曲线替换为本质 disk 的边界。McCullough 在[4]中证明了 disk 复形的连通性。Scharlemann 复形的顶点为 S^3 中 2 维 Heegaard 分解中的 reduced 曲线, 顶点之间有一条边, 如果它们相交四次。其连通性是由 Scharlemann 在[5]中建立的。Hatcher 和 Thurston 在[6]中定义了 cut system 复形, 他们在可定向表面上证明了该复形的连通性。Masur 和 Schleimer 在[7]中证明了分离曲线复形的连通性。Harer 在[8]中表明, Arc 复形是可收缩的, 这意味着它是连通的。Wajnryb 在[9]中证明了柄体 cut system 复形的连通性。Guo 和 Liu 在[10]中证明了柄体上一系列单纯复形的连通性, 包括各种类型的复形, 如 disk 复形、非分离 disk 复形和分离 disk 复形。

Putman 在[11]中引入了基于群作用理论的方法, 由于其高效性, 本文将采用此方法。

本文涉及许多几何拓扑知识, 具体内容可参见[12]。

在现有定义的基础上, 本文将介绍略作修改的曲线复形, 并展示它们的连通性。下面便是本文的主要定理:

定理 1: Non-equal complex $C_{ne}(S)$, part cut system complex $C_{pcs}(S)$, non-equal disk complex $D_{ne}(S)$, domain disk complex $D_d(S)$ 都是连通的。

2. 预备知识

我们先给出下文必要的一些定义。

定义 1: 设 $g(S) > 2$ 。Non-equal complex $C_{ne}(S)$ 是一个单纯复形, 其顶点集 V_1 是表面上所有曲线合痕类, 这些曲线将 S 分割成两个亏格分别为 g_1, g_2 ($g_1 \neq g_2$) 的曲面, 在单纯集 S_1 包含的集合中, 任意两个元素之间的几何交叉数为零。

定义 2: 设 $g(S) > 2$ 。Part cut system complex $C_{pcs}(S)$ 是一个单纯复形, 其顶点集 V_2 包含一组不相交曲线合痕类, 沿着这些曲线 $\langle C_1, \dots, C_n \rangle$ ($n < g$) 切割表面后不会使表面分离, 在单纯集 S_2 包含的集合中, 任意两个元素之间只有一个曲线不同, 并且这两条不同曲线之间的几何交叉数为 i 。

我们将在下文中分别证明 $i=1$ 和 0 的情况。

定义 3: 假设 $g(S) > 2$ 。Non-equal disk complex $D_{ne}(S)$ 是一个单纯复形, 其顶点集 V_3 包含将表面分割成亏格为 g_1, g_2 ($g_1 \neq g_2$) 的曲面的 meridian 曲线合痕类, 在单纯集 S_3 包含的集合中, 任意两个元素之间的几何相交数为零。

定义 4: 假设 $g(S) > 2$ 。Domain disk complex $D_d(S)$ 是一个单纯复形, 其顶点集 V_4 是边界均为 meridian 曲线类的 domain 类, 在单纯集包含的集合中, 任意两个元素之间存在一个代表元素, 并且它们彼此不相交。

我们下面通过画出这几种复形的局部图来解释它们。

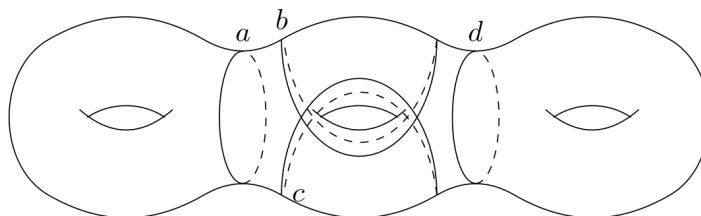


Figure 1. Non-equal complex' surface
图 1. Non-equal 复形曲面

对于第一种复形 non-equal complex, 我们以图 1 为例子, 该图为一个具有三个亏格没有边界的可定向闭曲面, 我们画出其上的四条闭曲线 a, b, c, d , 它们都将该曲面分割为两个子曲面, 分别具有亏格 1 和 2。那我们根据 non-equal complex 复形的定义, 可以发现, a 与其余三条曲线不相交, d 也满足这个条件, 而 b, c 相交于四个顶点, 那么我们可以画出它们在复形上的情况, 即如图 2 所示。

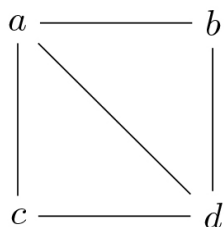


Figure 2. Non-equal complex
图 2. Non-equal 复形

我们下面看第二种复形 part cut system complex, 这种曲线复形的定义与 Hatcher 和 Thurston 在[6]中定义的 cut system 复形类似, 但我们这里考虑更复杂的情形。虽然在上文我们提到我们将在本文证明该复形的两种情况, 但我们这里仅以一种情况即 $i = 0$ 时来举例说明。

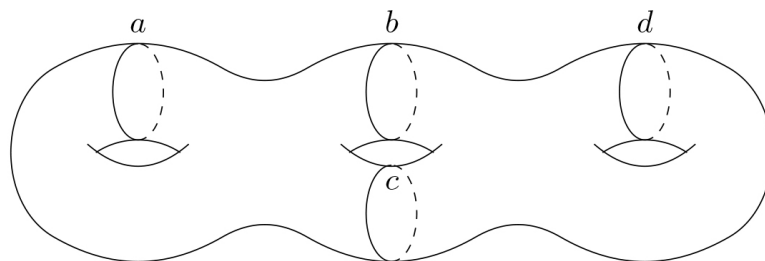


Figure 3. Part cut system complex's surface
图 3. Part cut system 复形曲面

以图 3 为例, 该图为一个具有三个亏格没有边界的可定向闭曲面, 我们画出其上的四条闭曲线 a, b, c, d , 它们都为不分离曲线, 并且我们将这四条曲线两两组合, 可以得到符合要求的 part cut system $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle$, 然后根据构造复形的要求, 我们可以得到如图 4 所示的图。

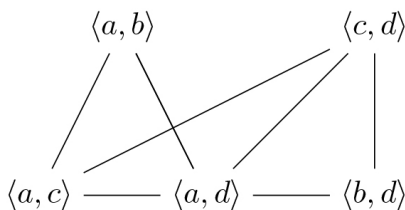


Figure 4. Part cut system complex
图 4. Part cut system 复形

下面对第三种复形 non-equal disk complex 来举例介绍。这种复形与 non-equal complex 非常相似, 不同之处在于它其中的每一条曲线都要求在曲面对应的柄体中界定一个 disk。事实上, 图 1 中的四条曲线均满足这个要求, 那么图 2 也是这四条曲线在 non-equal disk complex 中的局部图。不过我们可以再举一个类似的例子来说明, 如图 5。

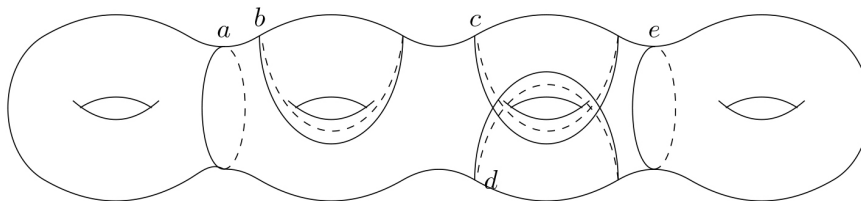


Figure 5. Non-equal disk complex's surface

图 5. Non-equal disk 复形曲面

该图为一个具有四个亏格没有边界的可定向闭曲面, 我们画出其上的五条闭曲线 a, b, c, d, e , 它们均为 meridian 曲线, 并且都将该曲面分割为两个子曲面, 分别具有亏格 1 和 3。研究它们相交关系会发现只有 d, c 相交于四个顶点, 而其余曲线与别的曲线都不相交, 依据此, 我们可以画出它们对应的复形, 如图 6。

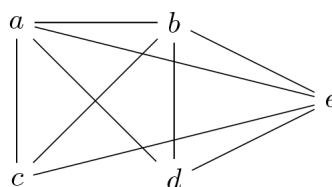


Figure 6. Non-equal disk complex

图 6. Non-equal disk 复形

最后, 我们来简要介绍第四种复形 domain disk complex。这种复形与其他复形最大的不同之处在于它的每个顶点是子曲面的合痕类, 而非闭曲线的合痕类。我们以图 7 为例说明。

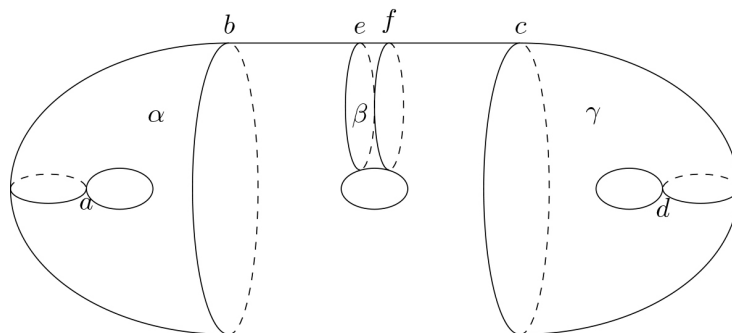


Figure 7. Domain disk complex's surface

图 7. Domain disk 复形曲面

该图为三个亏格的曲面, 我们画出了上面几条曲线 a, b, c, d, e, f , 很明显可以看出, 它们都是 meridian 曲线, 即在曲面对应的柄体种界定 disk。我们选取三个子曲面, 分别是由 a, b 界定的 pant α , e, f 界定的平环 β , c, d 界定的 pant γ 。然后根据它们之间的相交情况可以画出复形。如图 8。

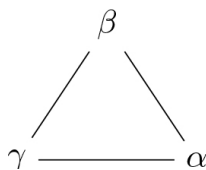


Figure 8. Domain disk complex

图 8. Domain disk 复形

下述引理是我们的主要方法, 主要定理的几乎所有部分都是通过这个引理证明的。

引理 1 (Putman [11]): 考虑群 G 在一个单纯复形 X 上的作用。固定基点 $v \in X^{(0)}$, 令 G 是 S 的生成元集合。假设它们满足以下条件:

- 1) 对于任意 $v' \in X^{(0)}$, 它的轨道 $G \cdot v$ 与 X 中 v' 的连通分支相交。
- 2) 对于任意 $s \in S^{\pm 1}$, 存在一条从 v 到 $s \cdot v$ 的路径 P_s 在 X 中。于是 X 是连通的。

证明: 考虑 $v' \in X^{(0)}$, 根据条件 1, 存在 $g \in G$ 和一条从 $g \cdot v$ 到 v' 的路径 P 。若 g 可以被写为 $S^{\pm 1}$ 中的形式 $s_1 \cdots s_k$ 。那么路径

$$P_{s_1} - s_1 P_{s_2} - \cdots - s_1 s_2 \cdots P_{s_k} - P$$

是一条从 v 到 v' 的路径。

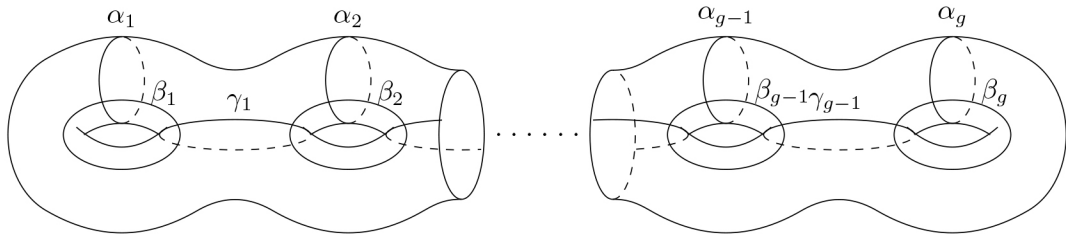


Figure 9. Generators of mapping class groups
图 9. 映射类群生成元

下面是 Lickorish 的著名定理和 Takahashi 的柄体相应版本:

定理 2 (Lickorish [13]): 设 S 是一个具有亏格 $g > 1$ 的可定向闭曲面。由图 9 中展示的 $3g - 1$ 条曲线的 Dehn twist 成的集合 T 是映射类群 $\mathcal{MCG}(S)$ 的生成集:

$$T = \{T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_g}, T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_g}, T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_{g-1}}\}$$

定理 3 (Takahashi [14]): 设 S 是一个具有亏格 $g > 1$ 的可定向闭曲面。记 $\alpha_i, \beta_i (i = 1, \dots, g)$, $\gamma_i (i = 1, \dots, g - 1)$ 是 S 上如图 9 所示的一组简单闭曲线。假设 H 是一个柄体, 使得 $S = \partial H$, 并且每个 α_i 都是 H 中的一个本质圆盘的边界。将它们的 Dehn twist 表示为 $T_{\alpha_i}, T_{\beta_i}, T_{\gamma_i}$ 。柄体 M_g 的映射类群由以下生成:

$$\Sigma = \{T_{\alpha_i}, T_{\beta_i} T_{\alpha_i}^2 T_{\beta_i}, T_{\beta_i} T_{\alpha_i} T_{\gamma_i} T_{\beta_i}, T_{\beta_{i+1}} T_{\alpha_{i+1}} T_{\gamma_i} T_{\beta_{i+1}} (i = 1, \dots, g - 1)\}$$

3. 主要定理的证明

接下来, 我们将使用上述引理来证明本文的主要定理。

3.1. $C_{ne}(S)$ 的连通性

引理 2: $\mathcal{MCG}(S) \times C_{ne}(S) \rightarrow C_{ne}(S), f \cdot [c] \mapsto [f(c)]$ 是一个 transitive 的群作用。

证明: 我们将证明对于任何 $f \in \mathcal{MCG}(S)$, 如果 $c \in V_1$, 则 $f(c)$ 也在 V_1 中, 并且对于任意点 $v_0 \in V_1$, 有 $\mathcal{MCG}(S) \cdot v_0 = V_1$ 。针对第一个断言, 我们需要证明对于任何 $f \in T$ 中的元素, $f(c) \in C_{ne}(S)$, 其中 T 为 $\mathcal{MCG}(S)$ 的生成集。考虑 f 为沿着曲线 δ 的 Dehn 扭转。当 $i([\delta], c) = 0$ 时, 我们有 $f(c) = c$ 。因此, 我们关注 $i([\delta], c) > 0$ 的情况。设 N 是 δ 的正则领域, c 和 $f(c)$ 的差别仅在 N 中出现。沿着 c 切割曲面 S , 我们观察到 N 变成多个四边形带, 每个带都粘在 N 的边界上。在沿着 δ Dehn twist 后, 曲面等价于将 N 切成这些带, 然后沿着 δ 绕了一圈, 接着重新粘在一起。因此, 最初分开的曲面在 Dehn twist 后保持分

离, 说明曲面的映射类群保持分离曲线。

接下来, 我们的目标是证明对具有亏格 g_1 的曲面 S_1 经过变换后产生的新曲面 S_2 仍具有亏格 g_1 。由于 S_2 是一个带边界的曲面, 其亏格即为通过沿每个边界附加一个盘所得到的曲面的亏格。设 $S'_2 = S_2 \# D^2$ 表示盘附加后的曲面。

于是, 我们研究 $S_1 \cup N$, 其与原来的曲面 S_1 的区别在于它在曲面上沾上数条并不改变曲面定向的丝带。那么它的亏格数等于 $S_1 \cup N \# nD^2$ 的亏格数。事实上, S_1 和 S_2 相对于 $S_1 \cup N$ 的区别恰在于 n 个拓扑球体。这意味着 $S_1 \# \sum D_{i_1}^2 = S_1 \cup N = S_2 \# \sum D_{i_2}^2$ 。所以, 在不改变定向的情况下, $S_1 \# D^2 = S_1 \cup N \# nD^2 = S_2 \# D^2$ 。

因此, 亏格根本没有改变。所以, $g(S_2) = g_1$ 。

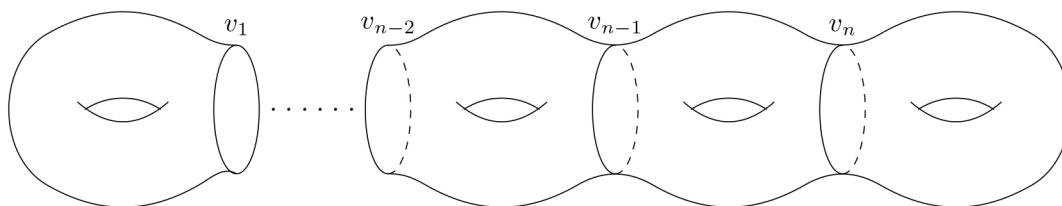


Figure 10. Separating curves
图 10. 分离曲线

接下来, 我们证明这个群作用是 transitive 的。我们任意选择 $c_1, c_2 \in C_1$, 沿着它们切割曲面, 得到四个曲面 $S_1^1, S_1^2, S_2^1, S_2^2$, 它们的亏格分别为 g_1, g_2, g_1, g_2 。根据曲面的分类定理, 我们可以构造一个映射 $f: S_1^1 \cup S_2^1 \rightarrow S_1^2 \cup S_2^2$, 它是一个同胚, 将边界映射到边界, 那么 $f \in MCG(S)$ 。这证明了它的传递性。

主要定理的证明: ($C_{ne}(S)$ 的情况) 设 T 是映射类群 $MCG(S)$ 的生成集。然后根据引理 2, 我们可以得到一个良定义的群作用:

$$MCG(S) \times C_{ne}(S) \rightarrow C_{ne}(S).$$

选择图 10 所示的曲线 $v = v_{g_1}$ 作为我们的基点。现在我们需要验证引理 1 中的两个条件。

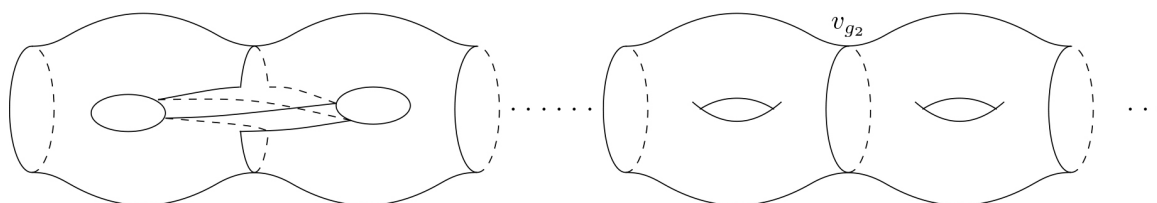


Figure 11. Curve after the Dehn twist of γ
图 11. 经过 γ 变换后的曲线

条件 1: 通过引理 2, 我们观察到群作用 $MCG(S) \times C_{ne}(S) \rightarrow C_{ne}(S)$ 是 transitive 的, 这意味着 $MCG(S) \cdot v$ 包含了 $C_{ne}(S)$ 中的所有顶点。因此, 我们只需要证明在 $C_{ne}(S)$ 中存在一个与我们任意选择的曲线 $v' \in C_{ne}(S)$ 不相交的点。在图 10 中显示的一系列曲线中, v_{g_1} 和 v_{g_2} 是 $C_{ne}(S)$ 中的点, 并且它们互不相交。通过在上一节引理证明中使用的曲面分类定理方法, 我们可以构造一个将 v' 映射到 v_{g_1} 的曲面映射 f 。通过映射类群保持交点数, 显而易见 $f(v_{g_1})$ 和 $f(v_{g_2})$ 不相交。因此, $f(v_{g_2})$ 即为所寻找的曲线。条件 1 满足。

条件 2: 考虑 $t \in T^{\pm 1}$ 。根据 Lickorish [12] 的论述, 我们列出了定理中提到的映射群生成元所代表的曲线, 并且我们看到相交情况如图 11 所示。

如果 $t = T_{\beta_{g_1}}^{\pm 1}$ 。由于 t 仅在局部改变曲面, 如图 12 所示, 并且 $g_1 \neq g_2$, 所以 $t \cdot v$ 不与 v_{g_2} 相交。那么

所需路径为 $v - v_{g_2} - t \cdot v$ 。如果 $t \neq T_{\beta_{g_1}}^{\pm 1}$, 则 $t \cdot v = v$ 。

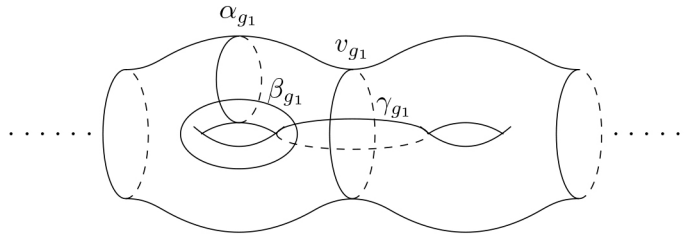


Figure 12. Local intersection situation
图 12. 局部相交情况

3.2. $C_{pcs}(S)$ 的连通性

引理 3: 对于闭曲面 S 上的任何不相交曲线族 $\langle c_1, \dots, c_n \rangle (n < g)$, 使得 $S \setminus \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ 是连通的, 我们可以找到 $g - n$ 条曲线, 使得 $\langle c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_g \rangle$ 构成一个 cut system。

证明: 沿着曲线 c_1, \dots, c_n 切割曲面, 我们得到一个亏格为 $g - n$ 的曲面。然后, 我们可以在这个新曲面上找到 $g - n$ 条曲线 c_{n+1}, \dots, c_g 使得它们不与边界相交, 也就是说, 它们不与原始的 n 条曲线相交或彼此相交。根据定义, 很明显这些 g 条曲线 c_1, \dots, c_g 构成一个 cut system。

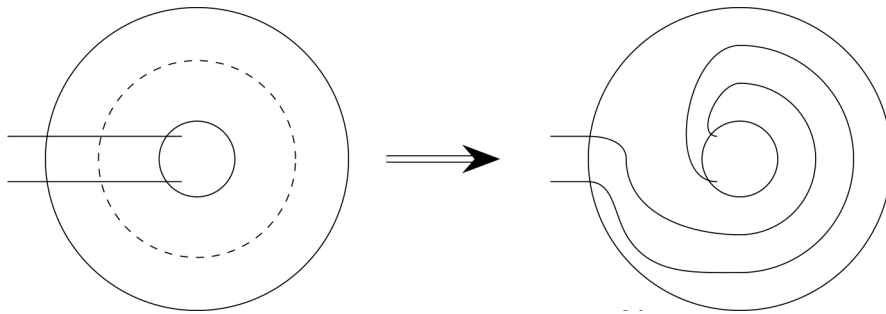


Figure 13. Dehn twist of two lines
图 13. 两条线的 dehn twist

引理 4: $MCG(S) \times C_{pcs}(S) \rightarrow C_{pcs}(S), f \cdot [c] \mapsto [f(c)]$ 是一个 transitive 的群作用。

证明: 为了证明对于任意 $f \in MCG(S)$, 若 $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \in V_2$, 则 $\langle f(c_1), \dots, f(c_n) \rangle \in V_2$ 且 $MCG(S) \cdot \langle c_1, \dots, c_n \rangle = V_2$, 我们只需考虑 $f \in T$ 的情况。

首先, 至关重要的是要证明在 Dehn twist 后不相交的曲线仍然不相交。对于 $MCG(S)$ 的生成集 T 的任意元素 h , 让 h 表示沿着曲线 δ 进行的 Dehn twist。通过在 δ 附近的正则领域 N 中观察, 如图 13, 我们可以看到这两条曲线在扭转后依然不相交。

随后, 我们需要证明曲面不会被分离, 即经过 T 中某元素 h 作用后的非分离曲线类 c , 曲面上任意两点之间存在一条道路, 该道路不与 $h(c)$ 相交。如果两点之间的道路没有经过 N , 则它不受 Dehn twist 的影响。然而, 若两点之间的道路需要穿过 N , 则我们可以将 N 中的 σ 部分替换为 $h(\sigma)$ 。根据前面提供的曲线不相交证明, 可以得出结论: $h(\sigma)$ 和 $h(c)$ 不相交, 符合我们的标准。

为了展示群作用的 transitive 性, 可以采用与前述证明类似的方法。考虑 C_2 上的任意两点 p_1, p_2 分别作为 n 条不相交曲线, 沿着它们剖开表面会得到两个分别具有 $2n$ 个边界和 $g - n$ 亏格的表面 S_1, S_2 。通过应用表面分类定理, 可以找到它们之间的同胚映射, 并且将边界映射到边界。这种映射等同于从 S 到自身的变换, 并且将 p_1 映射到 p_2 。

在证明 $C_{pcs}(S)$ 的连通性时, 分为两种情况来证明。对于第一种情况, 当 $i=0$ 时, 我们仍然使用引理 1 的方法; 对于第二种情况, $i=1$ 时, 我们使用图的变换来构建映射以证明结论。

主要定理的证明: ($C_{pcs}(S)$ 的情况)

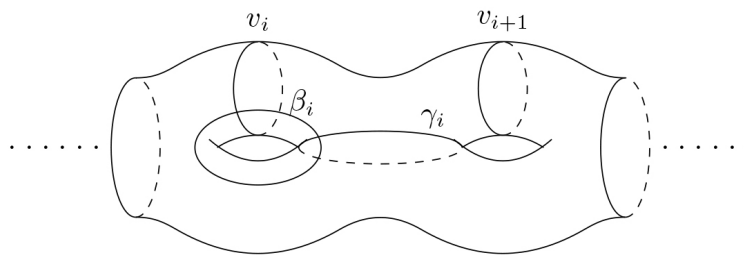


Figure 14. Intersection with generators
图 14. 与生成元的相交情况

如果 $i=0$, 设 T 成为映射类群 $MCG(S)$ 的生成集。然后, 根据引理 3, 我们可以得到一个良定义的群作用:

$$MCG(S) \times C_{pcs}(S) \rightarrow C_{pcs}(S)$$

记 $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, 因为 $MCG(S) \times C_2 \rightarrow C_2$ 是 transitive 的, 这意味着 $MCG(S) \cdot V$ 包含了所有切割后曲面不分离的非相交曲线族。因此, 我们只需证明对于任意不相交曲线族 $\langle v_1^0, \dots, v_n^0 \rangle$, 在沿着它们切割曲面 S 后仍然保持连通的情况下, 存在一个满足上述条件的与之相邻的曲线族。

显然, V 和 $\langle v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle$ 在复形中是连通的。通过沿着 V_0 和 V 切割 S , 按照曲面分类定理, 我们可以找到一个同胚变换 f , 使得 $f(v_i) = v_i^0$ 。由于映射类群不改变曲线的交点数, $\langle f(v_2), \dots, f(v_{n+1}) \rangle = \langle v_2^0, \dots, f(v_{n+1}) \rangle \in C_2$, 并且其与 $\langle v_1^0, \dots, v_n^0 \rangle$ 相关联, 条件 1 得到满足。

验证条件 2: 考虑 $t \in T^{\pm 1}$ 。根据定理 2.2.6, 我们列出定理中提到的映射群生成元所代表的曲线, 并且我们看到它们的相交情况如图 14 所示。如果 $t = T_{\beta_{gk}}^{\pm 1}, k \leq n$ 。因为 t 曲线只在局部改变, 如图 15 所示。那么所需道路为

$$V - \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle - t \cdot V.$$

如果 $t \neq T_{\beta_{gk}}^{\pm 1}, k \leq n$, 那么 $t \cdot V = V$ 。

条件 2 得到满足。

如果 $i=1$ 。

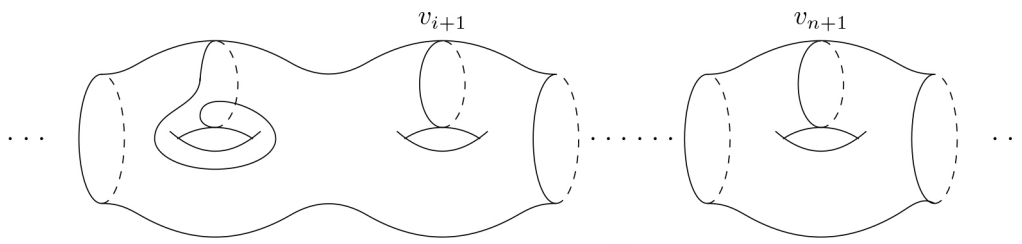


Figure 15. After Dehn twist
图 15. Dehn twist 之后

我们将使用 Hatcher 和 Thurston 的[6]提到的一个结果, 即 cut system 复形的连通性, 来证明我们的定理。设 $G(CS(S))$ 为 cut system 复形的一阶骨架, 它是一个无限的连通图, $G(C_{pcs}(S))$ 为我们研究的曲

线复形的一阶骨架。即我们需要证明 $G(C_{pcs}(S))$ 的连通性。对 $G(CS(S))$ 进行以下操作:

步骤 1: 对于任意两个顶点 $\langle c_1, \dots, c_g \rangle, \langle c'_1, \dots, c'_g \rangle$, 如果 $G(CS(S))$ 中 $c_1 = c'_1, \dots, c_n = c'_n$, 我们将这两点记为同一点。几何上, 我们将这两点粘合在一起, 任何连接它们的路径都被拉在一起。新点用 $[c_1, \dots, c_n]$ 表示。

步骤 2: 删除新图中的所有自环。如果两个顶点之间有多条边连接, 只保留一条, 删除其余所有边。新图记为 G_0 。 G_0 是连通的。

因为第一步减少了点的数量但没有减少边的数量, 这不会影响连通性。第二步只删除了一些重复路径, 不会影响整体连通性。接下来, 我们将证明 G_0 是一个包含 $G(C_{pcs}(S))$ 中所有顶点的子图。由引理 3 可知, 对于 $G(C_{pcs}(S))$ 中的任意顶点 c_1, \dots, c_n , 存在 $g-n$ 条曲线同位同形类, 使得 $c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_g$ 构成一个 cut system。换句话说, 在第一步改变之后, 新图中必定存在一个顶点 $[c_1, \dots, c_n]$ 。因此 G_0 是一个包含在 $G(C_{pcs}(S))$ 中所有顶点的图。

对于 G_0 中任意两个顶点 $[c_1, \dots, c_n], [c'_1, \dots, c'_n]$, 如果它们之间存在一条边相连, 意味着存在两个 cut system $\langle c_1, \dots, c_g \rangle, \langle c'_1, \dots, c'_g \rangle$ 在 cut system 上相连, 即它们之间存在一条不同的曲线类。根据第一步, 我们知道 c_1, \dots, c_n 和 c'_1, \dots, c'_n 之间存在一条不同的曲线类, 因此这条不同的曲线类必须在前 n 位之中。因此在图 $G(C_2(S))$ 中, 存在一条边连接 $[c_1, \dots, c_n]$ 和 $[c'_1, \dots, c'_n]$ 。如果我们将 $[c_1, \dots, c_n]$ 和 $\langle c_1, \dots, c_n \rangle, G_0$ 视为相同, 则 G_0 是一个包含 $G(C_{pcs}(S))$ 中所有顶点的子图。

而且 G_0 是连通的, 那么毫无疑问 $G(C_{pcs}(S))$ 也是连通的。

3.3. $D_{ne}(S)$ 的连通性

引理 5: $M_g \times D_{ne}(S) \rightarrow D_{ne}(S), f \cdot [c] \mapsto [f(c)]$ 是一个 transitive 的群作用。

设 H 表示一个柄体。记柄体 H 的映射类群为 $MCG(H)$, 其被定义为群 $\text{Homeo}^+(H)/\text{Homeo}_0(H)$ 。这里, $\text{Homeo}^+(H)$ 是 H 的所有保定向同胚映射的集合, 而 $\text{Homeo}_0(H)$ 是 H 的同伦于 id_H 的同胚映射的集合。如果 $S = \partial H$, 那么存在单射 $i: MCG(H) \rightarrow MCG(S)$ 。在 $MCG(S)$ 中, 单射 i 的像被表示为符号 M_g 。

证明: 设 $\phi \in M_g, a$ 是分离的 meridian 曲线类, 其将曲面分为两个具有亏格 $g_1, g_2 (g_1 \neq g_2)$ 的曲面。引理 2 证明了 $\phi(a)$ 将曲面切成亏格分别为 g_1, g_2 的两个亚曲面。

我们将证明微分同胚 $\phi \in M_g$ 当且仅当 ϕ 将边界 ∂H_g 上的一个 cut system $\langle a_1, \dots, a_g \rangle$ 映射到一个 cut system。

取不相交圆盘 D_i 的边界 a_i 。如果 $\phi \in M_g$, 那么很明显 $\phi(a_i)$ 仍然是 meridian 曲线, 并且它们是不相交的, 从而证明了命题的一半。反过来同样可以用亚历山大技巧。如果 $\langle \phi(a_1), \dots, \phi(a_g) \rangle$ 形成一个 cut system, 设被它们围成的不相交圆盘 D_i 。那么把 $\partial H - a_1 \cup \dots \cup a_g$ 映射到 $\partial H - \phi a_1 \cup \dots \cup \phi a_g$ 的同伦映射可以扩展为将 $H - D_1 \cup \dots \cup D_g$ 映射到 $H - D_1 \cup \dots \cup D_g$ 的同伦映射。

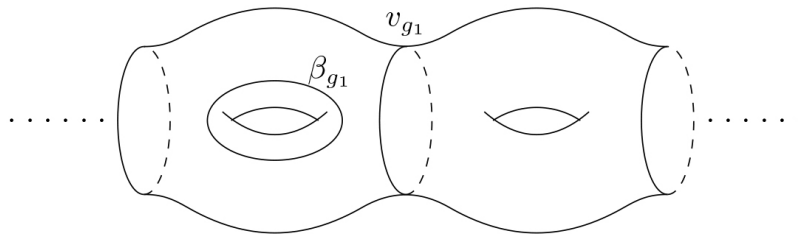


Figure 16. Base point of non-equal disk complex
图 16. Non-equal disk complex 的基点

这意味着映射是一个良定义的群作用。至于群作用的 transitive 性, 其证明过程与引理 2 中完全相同。

主要定理的证明($D_{ne}(S)$ 的情况): 设 Σ 为柄体映射类群 M_g 的生成集。我们选择图 16 中显示的曲线 v_{g_1} 作为我们的基点。然后根据引理 5, 我们可以得到一个良定义的群作用:

$$M_g \times D_{ne}(S) \rightarrow D_{ne}(S).$$

验证条件 1: 根据引理 5, 我们知道上述群作用是 transitive 的, 也就是任意一个将曲面 S 切成两个亏格分别为 g_1, g_2 的曲面的 meridian 曲线类 v_0 , $M_g \cdot v_0$ 包含所有满足上述条件的 meridian 曲线。我们分别沿着 v_0 和 v_{g_1} 切割 S 。根据曲面分类定理, 我们可以找到一个同胚映射 f , 使得 $f(v_{g_1}) = v_0$ 。然后我们会看到, 沿着 v' 切割的曲面也被分成两部分, 各自亏格为 g_1, g_2 , 那么 $f(v')$ 也满足这个性质, 并且不与 v_0 相交。

条件 2 的验证: 考虑 $t \in \Sigma^{\pm 1}$ 。若 $g_1 = v_1$, 当 $t = T_{\alpha_1}^{\pm 1}$ 或 $t = T_{\beta_1} T_{\alpha_1}^2 T_{\beta_1}^{\pm 1}$ 时, 则所需路径为

$$v_1 - v_{g-1} - t \cdot v_1$$

若 $t \neq T_{\alpha_1}^{\pm 1}$ 且 $t \neq T_{\beta_1} T_{\alpha_1}^2 T_{\beta_1}^{\pm 1}$, 则 $t \cdot v_1 = v_1$ 。

若 $1 < g_1 < g/2$, 若 $t = T_{\beta_{g_1}} T_{\alpha_{g_1}} T_{\gamma_{g_1}} T_{\beta_{g_1}}$ 或 $t = T_{\beta_{g_1+1}} T_{\alpha_{g_1+1}} T_{\gamma_{g_1}} T_{\beta_{g_1+1}}$, 则所需路径为

$$v_{g_1} - v_{g_2} - t \cdot v_{g_1}$$

若 $t \neq T_{\beta_{g_1}} T_{\alpha_{g_1}} T_{\gamma_{g_1}} T_{\beta_{g_1}}$ 且 $t \neq T_{\beta_{g_1+1}} T_{\alpha_{g_1+1}} T_{\gamma_{g_1}} T_{\beta_{g_1+1}}$, $t \cdot v_{g_1} = v_{g_1}$ 。

3.4. $D_d(S)$ 的情况

这种情况的证明仍然使用先前的方法。在 McCarthy 和 Athanase 的文章[15]中, 他们给出了与 domain 相关的复形连接性的各种证明, 然而这篇文章中, 他们仅使用各种拓扑方法, 而不是本文中使用的群作用方法, 并且该文未提到我们这里的复形 $D_d(S)$ 。

引理 6: 设 $\phi \in M_g$ 。X 为一个 domain, 其所有边界是 meridian 曲线, 则 $\phi(X)$ 仍然是一个 domain, 其边界仍然是 meridian 曲线。

证明: 引理 5 告诉我们 M_g 将 V_3 的任何元素映射到 meridian 曲线。我们现在的任务是证明映射后 domain 仍然保持为 domain。由于 M_g 是 $MCG(S)$ 的一个子群, 我们可以直接利用 $MCG(S)$ 来建立这一结果。

设 X 是一个 domain。对于任意 $f \in MCG(S)$, $f(X)$ 仍然是一个子曲面。如果 $f(X)$ 等价于 S, 则存在一个同伦映射 H 将这两个曲面联系起来。那么 $H' = H \circ f$ 表示 X 和 S 之间的同伦映射, 这与 domain 的定义相矛盾。

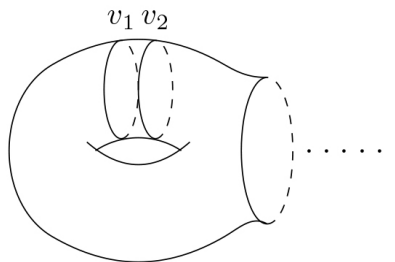


Figure 17. Base point of domain disk complex
图 17. Domain disk complex 的基点

主要定理的证明: ($D_d(S)$ 的情况)

我们以图 17 中 meridian 曲线 v_1, v_2 围成的环 P 为基点。对于任何以 Meridian 曲线为边界且与 P 不等价的 domain X , 我们可以讨论它们之间的位置关系。如果两个 domain 不相交, 则它们在 $D_d(S)$ 中通过边相连。如果它们相交, 则根据构造的 P 的性质, 我们可以知道 $P \subseteq X$ 。

条件 1: $M_g \cdot P$ 是 S 中所有两边是非分离的 Meridian 曲线的平环的集合。根据 domain 的定义, 由于 X 与 S 不同, 我们可以在 $S \setminus X$ 中找到满足两边为非分离 Meridian 曲线的平环。举例来说, 在 $S \setminus X$ 中, 由 $S \setminus X$ 的两条与 X 的边界之一同伦的 Meridian 曲线界定的平环即满足条件。

条件 2: 假设对于任意一个与 S 和 P 不同的 domain, 我们可以找到一个环 P' 。如果它们不相交, 则条件成立; 如果它们相交, 只需要将一个朝着远离另一个的方向移动一些便可以使它们不相交。

参考文献

- [1] Harvey, W.J. (1981) Boundary Structure of the Modular Group. In: Kra, I. and Maskit, B., Eds., *Riemann Surfaces and Related Topics (AM-97)*, Princeton University Press, 245-252. <https://doi.org/10.1515/9781400881550-019>
- [2] Ivanov, N. (2001) Mapping Class Groups. In: Sher, R.B. and Daverman, R.J., Eds., *Handbook of Geometric Topology*, Elsevier, 523-633. <https://doi.org/10.1016/b978-044482432-5/50013-5>
- [3] Farb, B. and Margalit, D. (2010) *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press.
- [4] McCullough, D. (1991) Virtually Geometrically Finite Mapping Class Groups of 3-Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **33**, 1-65. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214446029>
- [5] Scharlemann, M. (2003) Automorphisms of the 3-Sphere That Preserve a Genus Two Heegaard Splitting. arXiv: math/0307231.
- [6] Hatcher, A. and Thurston, W. (1980) A Presentation for the Mapping Class Group of a Closed Orientable Surface. *Topology*, **19**, 221-237. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(80\)90009-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(80)90009-9)
- [7] Masur, H. and Schleimer, S. (2006) The Pants Complex Has Only One End. In: Minsky, Y.N., Sakuma, M. and Series, C., Eds., *Spaces of Kleinian Groups*, Cambridge University Press, 209-218. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139106993.010>
- [8] Harer, J.L. (1985) Stability of the Homology of the Mapping Class Groups of Orientable Surfaces. *The Annals of Mathematics*, **121**, 215-249. <https://doi.org/10.2307/1971172>
- [9] Wajnryb, B. (1998) Mapping Class Group of a Handlebody. *Fundamenta Mathematicae*, **158**, 195-228. <https://doi.org/10.4064/fm-158-3-195-228>
- [10] Guo, Q. and Liu, Q. (2016) Connectivity of Certain Simplicial Complexes Associated to a Handlebody. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **25**, Article ID: 1650064. <https://doi.org/10.1142/s0218216516500644>
- [11] Putman, A. (2006) A Note on the Connectivity of Certain Complexes Associated to Surfaces. arXiv: math/0612762.
- [12] 雷逢春. 三维流形组合拓扑基础[M]. 北京: 科学出版社, 2021.
- [13] Lickorish, W.B.R. (1964) A Finite Set of Generators for the Homeotopy Group of a 2-Manifold. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **60**, 769-778. <https://doi.org/10.1017/s030500410003824x>
- [14] Takahashi, M. (1995) On the Generators of the Mapping Class Group of a 3-Dimensional Handlebody. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, **71**, 213-214. <https://doi.org/10.3792/pjaa.71.213>
- [15] McCarthy, J.D. and Papadopoulos, A. (2012) Simplicial Actions of Mapping Class Groups. In: Guichard, O., Ed., *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, EMS Press, 297-423. <https://doi.org/10.4171/103-1/6>