Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(9), 4289-4296
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139409

Hans汉斯

MPCC问题的M稳定性的序列最优性条件研究

王子平，宁　晶，纪宏佳

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2024年8月18日；录用日期：2024年9月12日；发布日期：2024年9月18日

摘　要

带有互补约束的数学规划(MPCC)问题是一类难于求解的优化问题，其在许多领域都有着重要的应用。针对互补约束的特殊结构，人们提出了多种方法求解MPCC问题。近年来，非线性优化问题的序列最优性条件受到了广泛的关注。基于序列最优性条件，算法的收敛性结果得到了显著改进。但是，非线性优化问题的序列最优性条件不能直接用于研究MPCC问题。因此，本文基于非线性优化问题(NLP)的CAKKT条件，提出了MPCC问题关于M稳定性的序列最优性条件，即MPCC-CAKKT条件。MPCC-CAKKT条件是比现有的MPCC-AKKT条件更强的序列最优性条件。此外，还给出了与之相关的保证M稳定性的较弱的约束规范，即MPCC-CAKKT正则性。

关键词

带有互补约束的数学规划问题，序列最优性条件，约束规范

The Sequential Optimality Condition for M-Stationarity for MPCC

Ziping Wang, Jing Ning, Hongjia Ji

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 18th, 2024; accepted: Sep. 12th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

Mathematical program with complementarity constraints (MPCC) is a difficult class of optimization problems, which plays an important role in many fields. Due to the special structure of the complementarity constraints, several methods have been suggested in order to deal with the MPCC. Recently, the sequential optimality conditions for nonlinear optimization problems (NLP) have been drawn concerns widely. Convergence analysis of these methods for NLP has been dramatically improved by using the sequential optimality conditions. However, the established sequential optimality

文章引用: 王子平, 宁晶, 纪宏佳. MPCC 问题的 M 稳定性的序列最优性条件研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4289-4296. DOI: 10.12677/aam.2024.139409

conditions for NLP are not suitable for MPCC. In this paper, based on the CAKKT condition for NLP, we present a sequential optimality condition for MPCC, namely MPCC-CAKKT condition, which is stronger than the MPCC-AKKT condition. Furthermore, we present a weaker constraint qualification for M stationarity which is closely related to MPCC-CAKKT.

Keywords

Mathematical Program with Complementarity Constraints, Sequential Optimality Condition, Constraint Qualification

1. 引言

本文主要研究带有互补约束的数学规划(Mathematical program with complementarity constraints，简称MPCC)问题，其优化模型如下

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.t.}\ & g(x)\le 0, \\ & h(x)=0, \\ & 0\le H(x)\perp G(x)\ge 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$f:R^n\to R, g:R^n\to R^p, h:R^n\to R^q, H,G:R^n\to R^m$ 是连续可微的，$0\le u\perp v\ge 0$ 表示 $u\ge 0, v\ge 0$，$u^{\mathrm{T}}v=0$。

MPCC 问题在工程设计、机器学习和交通科学等许多领域都有着广泛的应用，因此研究 MPCC 问题具有重要的理论价值和实际意义。由于互补约束的特殊结构，NLP 问题的许多约束规范并不适用于 MPCC 问题，因此 KKT 条件在局部最优解处往往不成立。近年来，为了更好的研究 MPCC 问题，提出了 MPCC 的几种稳定性概念，如 S 稳定性，M 稳定性，C 稳定性和 W 稳定性。

由于序列最优性条件与算法的停止准则密切相关，并且可以改进算法的收敛性结果。因此，非线性优化问题的序列最优性条件受到了人们的广泛关注，如 AKKT 条件，AGP 条件，DCAKKT 条件和 WCAKKT 条件等。DCAKKT 条件是一个比 AGP 条件更强的序列最优性条件，WCAKKT 条件强于 AKKT 条件，这些序列最优性条件被广泛应用于改进算法的收敛性结果[1] [2]。但是，非线性优化问题的序列最优性条件不能直接用于研究 MPCC 问题[3]。因此，Andreani [4]等人基于 MPCC 的 W-，C，M-稳定性，提出了 MPCC 问题的 AW-，AC，AM-稳定性，并提出了与之相关的约束规范，讨论了与现有约束规范之间的强弱关系。2021 年，Ramos [5]基于 NLP 问题中的 AKKT 条件，提出了 MPCC-AKKT 及其相关的约束规范 MPCC-CCP，并讨论了其与 MPCC 常用的约束规范之间的关系，如 MPCC-RCPLD，MPCC-quasinormality 和 MPCC-pseudonormality 等。

本文在 MPCC-AKKT 条件的基础上，建立了比 MPCC-AKKT 条件更强的序列最优性条件，即 MPCC-CAKKT 条件。然后，提出了与之相关的约束规范，即 MPCC-CAKKT 正则性条件。证明了 MPCC 问题的局部最优解在 MPCC-CAKKT 条件下是 M 稳定点，这说明了 MPCC-CAKKT 正则性是一个能够保证 M 稳定性的约束规范。

本文结构如下：第二节介绍了需要的基本知识。第三节提出了 MPCC 问题新的序列最优性条件，即 MPCC-CAKKT 条件，并证明 MPCC-CAKKT 条件是一个合理的序列最优性条件。第四节提出了 MPCC 问题的一个新的约束规范，即 MPCC-CAKKT 正则性，并证明了 MPCC-CAKKT 正则性是能够保证 M 稳定性的约束规范。第五节给出总结。

2. 基础知识

本节给出文章中需要用到的一些基本概念。

定义 2.1 [6] (外极限)设 $S:R^n \rightrightarrows R^m$ 是一集值映射，S 在 x^* 处的外极限为

$$\limsup_{x\to x^*} S(x)=\left\{u \mid \exists x^k\to x^*,\exists u^k\in S\left(x^k\right),u^k\to u\right\}.$$

定义 2.2 [6] (外半连续)称集值映射 $S:R^n \rightrightarrows R^m$ 在点 x^* 点处是外半连续的，如果

$$\limsup_{x\to x^*} S(x)\subset S\left(x^*\right).$$

定义 2.3 [6] (极锥)对于任意一个锥 $\mathcal{K}\in R^s$，它的极锥为 $\mathcal{K}^\circ:=\left\{v\in R^s \mid \langle v,k\rangle\le 0,\text{对于任意的 } k\in\mathcal{K}\right\}$。

定义 2.4 [6] (法锥与正则法锥)设 $S\subset X$，X 为有限维 Hilbert 空间，$x\in S, v\in X$ 称为 S 在点 x 处的正则法向量，如果 $\langle v,x'-x\rangle\le o(\|x'-x\|), x'\in S$。所有正则法向量的集合记为 $\hat{N}_s(x)$ 称为正则法锥，即

$$\hat{N}_s(x)=\left\{v\in X \mid \langle v,x'-x\rangle\le \circ(\|x'-x\|),x'\in S\right\}.$$

向量 $v\in X$ 称为 S 在点 x 处的法向量，如果存在序列 $x^k\to x$，存在 $v^k\in\hat{N}_s\left(x^k\right)$ 满足 $v^k\to v$，所有法向量的集合称为法锥，记为 $N_s(x)$，即

$$N_s(x)=\left\{v\in X \mid \exists x^k\to x,v^k\in\hat{N}_s\left(x^k\right)\text{s.t. } v^k\to v\right\}.$$

设

$$\mathcal{C}:=\left\{(c_1,c_2)\in R^2:0\le -c_1\perp -c_2\ge 0\right\}.$$

显然，$\left(\left(-H_1(x),-G_1(x)\right),\cdots,\left(-H_m(x),-G_m(x)\right)\right)\in\mathcal{C}^m$ 等价于互补约束 $0\le H(x)\perp G(x)\ge 0$。

命题 2.1 [4] (1) 令 $(c_1,c_2)\in\mathcal{C}$，则在 (c_1,c_2) 处的切锥为

$$T_C\left((c_1,c_2)\right)=\left\{d=(d_1,d_2):\begin{array}{ll} d_1=0,d_2\in R & \text{if } c_1=0,c_2<0\\ d_1\in R,d_2=0 & \text{if } c_1<0,c_2=0\\ (d_1,d_2)\in C & \text{if } c_1=0,c_2=0\end{array}\right\};$$

(2) 令 $(c_1,c_2)\in\mathcal{C}$，则在 (c_1,c_2) 处的正则法锥为

$$\hat{N}_C\left((c_1,c_2)\right)=\left\{d=(d_1,d_2):\begin{array}{ll} d_1\in R,d_2=0 & \text{if } c_1=0,c_2<0\\ d_1=0,d_2\in R & \text{if } c_1<0,c_2=0\\ d_1\ge 0,d_2\ge 0 & \text{if } c_1=0,c_2=0\end{array}\right\};$$

(3) 令 $(c_1,c_2)\in\mathcal{C}$，则在 (c_1,c_2) 处的极限法锥为

$$N_C\left((c_1,c_2)\right)=\left\{d=(d_1,d_2):\begin{array}{ll} d_1\in R,d_2=0 & \text{if } c_1=0,c_2<0\\ d_1=0,d_2\in R & \text{if } c_1<0,c_2=0\\ \text{either } d_1\ge 0,d_2\ge 0 & \text{if } c_1=0,c_2=0\\ \text{or } d_1>0,d_2>0 & \end{array}\right\}.$$

MPCC 问题等价于以下带有几何约束形式的问题：

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&\text{s.t. } F(x)\in\Lambda\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中，

$$F(x)=\left(g(x),h(x),\Psi(x)\right),\quad \Lambda:=R_-^p\times\{0\}^q\times\mathcal{C}^m,$$
$$\Psi(x):=\left(\left(-H_1(x),-G_1(x)\right),\cdots,\left(-H_m(x),-G_m(x)\right)\right).$$

定义 $\Omega=\left\{x\in R^n \mid F(x)\in\Lambda\right\}$ 是 MPCC 问题(2.1)的可行域。为了简便表述，对于某些 $p,q,m\in N$ 考虑集合 $\Lambda=R_-^p\times\{0\}^q\times\mathcal{C}^m$。对于集合 $\Lambda=R_-^p\times\{0\}^q\times\mathcal{C}^m$ 中任意一点 $z:=\left(a,b,-(c_{11},c_{21}),\cdots,-(c_{1m},c_{2m})\right)$，做如下定义：

$$\begin{aligned}&I(z,\Lambda):=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:c_{1i}=0,c_{2i}>0\right\},\\&J(z,\Lambda):=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:c_{1i}=0,c_{2i}=0\right\},\\&K(z,\Lambda):=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:c_{1i}>0,c_{2i}=0\right\}.\end{aligned}$$

由于 Λ 在文章中并不容易混淆，因此我们用 $I(z),J(z),K(z)$ 来代替 $I(z,\Lambda),J(z,\Lambda),K(z,\Lambda)$。

对于 $x^*\in\Omega$ 定义如下指标集：

$$\begin{aligned}&A\left(x^*,\Omega\right):=\left\{j\in\{1,\cdots,p\}:g_j\left(x^*\right)=0\right\},\\&I\left(x^*,\Omega\right):=I\left(F\left(x^*\right),\Lambda\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:H_i\left(x^*\right)=0,G_i\left(x^*\right)>0\right\},\\&J\left(x^*,\Omega\right):=J\left(F\left(x^*\right),\Lambda\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:H_i\left(x^*\right)=0,G_i\left(x^*\right)=0\right\},\\&K\left(x^*,\Omega\right):=K\left(F\left(x^*\right),\Lambda\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}:H_i\left(x^*\right)>0,G_i\left(x^*\right)=0\right\}.\end{aligned}$$

由于 Ω 在上下文中有明确的定义，故我们用 $A\left(x^*\right),I\left(x^*\right),J\left(x^*\right),K\left(x^*\right)$ 来代替 $A\left(x^*,\Omega\right),I\left(x^*,\Omega\right),J\left(x^*,\Omega\right),K\left(x^*,\Omega\right)$。

定义 2.5 [5] (M 稳定点)称可行点 x^* 是 MPCC 问题的 M 稳定点，若存在 λ，其中，$\lambda=\left(\lambda^g,\lambda^h,\lambda^G,\lambda^H\right)\in R_+^p\times R^{q+2m}$，使得 x^* 满足

$$\begin{aligned}&\nabla_x L(x,\lambda)=0,\\&\lambda^g_{\{1,\cdots,p\}\setminus A\left(x^*\right)}=0,\lambda^G_{I\left(x^*\right)}=0,\lambda^H_{K\left(x^*\right)}=0,\\&\lambda_i^G\lambda_i^H=0\text{ or }\lambda_i^G>0,\lambda_i^H>0,\forall i\in J\left(x^*\right).\end{aligned}$$

命题 2.2 [5]令 x^* 是 MPEC 问题的可行点，则有 x^* 为 M 稳定点当且仅当

$$0\in\nabla f\left(x^*\right)+\nabla F\left(x^*\right)^{\mathrm{T}}N_\Lambda\left(F\left(x^*\right)\right).$$

引理 2.1 [5]令 $\Lambda:=R_-^p\times\{0\}^q\times\mathcal{C}^m$，任意一点 $z:=\left(a,b,\left(c_1^1,c_2^1\right),\cdots,\left(c_1^m,c_2^m\right)\right)\in\Lambda$。那么有

$$N_\Lambda(z)=\prod_{j=1}^{p}N_{R_-}\left(a_j\right)\times\prod_{j=1}^{q}N_{\{0\}}\left(b_j\right)\times\prod_{i=1}^{m}N_{\mathcal{C}}\left(\left(c_1^i,c_2^i\right)\right).$$

3. 关于 M 稳定性的新序列最优性条件

本节给出了关于 MPCC 问题 M 稳定性的 CAKKT 条件的定义，并证明了 MPCC-CAKKT 条件是一

个合理的序列最优性条件。显然，由于 MPCC-CAKKT 条件与 MPCC 算法的停止准则相关，故有利于算法的数值实现。

定义 3.1 (MPCC-CAKKT 条件) MPCC 问题的可行点 x^* 是 MPCC-CAKKT 点，如果存在序列 $\{x^k\}$，$\{z^k\}$ 和 $\{\lambda^k\}$ 使得

$$x^k \to x^*,\ \ z^k \to F\left(x^*\right),\ \ z^k \in \Lambda .$$

$$\nabla f\left(x^k\right)+\nabla F\left(x^k\right)^{\mathrm{T}} \lambda^k \to 0.$$

其中 $\lambda^k \in N_\Lambda\left(z^k\right)$，且满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{h,k}h_i\left(x^k\right)=0$, $i=1,\cdots,q$ 。

若 $\lambda^k=\left(\lambda^{g,k},\lambda^{h,k},\lambda^{G,k},\lambda^{H,k}\right)\in R_+^p\times R^q\times R^m\times R^m$ ，对于足够大的 k，有

$$\left\{\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{g,k}\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i^{h,k}\nabla h_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)\right\}\to 0.$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{p}\left|\lambda_i^{g,k}g_i\left(x^k\right)\right|+\sum_{i=1}^{q}\left|\lambda_i^{h,k}h_i\left(x^k\right)\right|+\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda_i^{G,k}G_i\left(x^k\right)\right|+\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda_i^{H,k}H_i\left(x^k\right)\right|\right\}\to 0.$$

其中，$\lambda_i^{G,k}\lambda_i^{H,k}=0$ 或 $\lambda_i^{G,k}>0$ ，$\lambda_i^{H,k}>0$ ，对于每个 $i\in J\left(z^k\right)$ 。

定理 3.2 假设 x^* 是 MPCC 问题的局部最优解，则 x^* 满足 MPCC-CAKKT 条件。

证明：假设 x^* 是 MPCC 问题的局部最优解，取 $\delta>0$，使得 $f\left(x^*\right)\le f\left(x\right)$。对于每个 $x\in B\left(x^*,\delta\right)\cap\Omega$ 和任意序列 $\{\rho_k\}\subseteq R_+$ ，使得 $\rho_k\to\infty$ 。则对于每个 $k\in N$ ，考虑问题

$$\begin{aligned}&\min\ f\left(x\right)+\frac{1}{2}\left\|\left(x-x^*,z-F\left(x^*\right)\right)\right\|^2+\frac{1}{2}\rho_k\left\|F\left(x\right)-z\right\|^2\\&\text{s.t.}\ \ \left(x,z\right)\in U,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中，$U:=\left\{\left(x,z\right)\in R^n\times\Lambda:\left\|\left(x,z\right)-\left(x^*,F\left(x^*\right)\right)\right\|\le\delta\right\}.$

由于 U 的紧致性和函数的连续性可知，问题(3.1)的全局最优解存在。令 $\left(x^k,z^k\right)$ 为问题(3.1)的全局最优解。下证 $\left\{\left(x^k,z^k\right)\right\}$ 收敛于 $\left(x^*,F\left(x^*\right)\right)$。由于 $\left(x^*,F\left(x^*\right)\right)$ 的定义，我们可以得到

$$f\left(x^k\right)+\frac{1}{2}\left\|\left(x^k-x^*,z^k-F\left(x^*\right)\right)\right\|^2+\frac{1}{2}\rho_k\left\|F\left(x^k\right)-z^k\right\|^2\le f\left(x^*\right).\tag{3.2}$$

再根据外部罚函数的收敛性理论，不失一般性，假设 $(\hat{x},\hat{z})$ 为 $\left\{\left(x^k,z^k\right)\right\}$ 的极限。下证 $(\hat{x},\hat{z})=\left(x^*,F\left(x^*\right)\right)$。由(3.2)可知，$\left\|F\left(x^k\right)-z^k\right\|\to 0$。因此，对于足够大的 k，取极限得：$F\left(\hat{x}\right)=\hat{z}$。另外，根据式(3.2)，不等号两边同时取极限，我们还可以得到

$$\left\|\left(\hat{x}-x^*,\hat{z}-F\left(x^*\right)\right)\right\|^2\le 2\left(f\left(x^*\right)-f\left(\hat{x}\right)\right).$$

由于 $f\left(x^*\right)\le f\left(\hat{x}\right)$，因此

$$0\le\left\|\left(\hat{x}-x^*,\hat{z}-F\left(x^*\right)\right)\right\|^2\le 0 .$$

故可得 $\hat{x}=x^*$ 和 $F\left(\hat{x}\right)=F\left(x^*\right)$。因此，对于足够大的 k，有

$$\left\|\left(x^k,z^k\right)-\left(x^*,F\left(x^*\right)\right)\right\|<\delta .$$

由于 $\left(x^k,z^k\right)$ 的定义，由(3.2)可得

$$0=y^k+\nabla f\left(x^k\right)+\nabla F\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}\lambda^k,\ \lambda^k\in N_\Lambda\left(z^k\right). \tag{3.3}$$

其中，$y^k:=-\nabla F\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}\left(F\left(x^*\right)-z^k\right)+\left(x^k-x^*\right)$，$\lambda^k:=\rho_k\left(F\left(x^k\right)-z^k\right)+\left(F\left(x^*\right)-z^k\right)$。

由于 $y^k\to 0$。故从(3.3)式可得出结论，x^* 满足

$$\nabla f\left(x^k\right)+\nabla F\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}\lambda^k\to 0,\ \lambda^k\in N_\Lambda\left(z^k\right). \tag{3.4}$$

下证，$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{h,k}h_i\left(x^k\right)=0, i=1,\cdots,q$。由(3.2)式可知

$$\frac{1}{2}\rho_k\left\|F\left(x^k\right)-z^k\right\|^2\to 0. \tag{3.5}$$

对(3.5)式展开有

$$\frac{1}{2}\rho_k\left(\sum_{i=1}^{p}\left(g_i\left(x^k\right)-z_i^{g,k}\right)^2+\sum_{i=1}^{q}\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(G_i\left(x^k\right)-z_i^{G,k}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(H_i\left(x^k\right)-z_i^{H,k}\right)^2\right)\to 0. \tag{3.6}$$

由(3.4)式可知

$$\frac{1}{2}\rho_k\left(g_i\left(x^k\right)-z_i^{g,k}\right)^2\to 0,\ \ i=1,\cdots,p,\ \ \frac{1}{2}\rho_k\left(G_i\left(x^k\right)-z_i^{G,k}\right)^2\to 0,\ \ i=1,\cdots,m,$$

$$\frac{1}{2}\rho_k\left(H_i\left(x^k\right)-z_i^{H,k}\right)^2\to 0,\ \ i=1,\cdots,m.$$

故有

$$\frac{1}{2}\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)^2\to 0,\ \ i=1,\cdots,q. \tag{3.7}$$

(3.7)式两端对 x 求梯度得：$\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)\nabla h_i\left(x^k\right)\to 0,\ \ i=1,\cdots,q.$

定义，

$$\lambda_i^{h,k}=\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right),\ \ i=1,\cdots,q. \tag{3.8}$$

则有

$$\begin{aligned}\lambda_i^{h,k}h_i\left(x^k\right)&=\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)\cdot h_i\left(x^k\right)\\&=\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)\cdot\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}+z_i^{h,k}\right)\\&=\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)^2+\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)\cdot z_i^{h,k}\\&=\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)^2+\lambda_i^{h,k}z_i^{h,k}\end{aligned} \tag{3.9}$$

由于 $z_i^{h,k}\in\Lambda$，故 $z_i^{h,k}=0$。又由(3.8)式知 $\rho_k\left(h_i\left(x^k\right)-z_i^{h,k}\right)^2\to 0, i=1,\cdots,q$，故当 k 足够大时，式(3.9)趋于 0，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{h,k}h_i\left(x^k\right)=0, i=1,\cdots,q$ 得证。综上可得结论，即 x^* 为 MPEC-CAKKT 点。□

4. 保证 M 稳定性的新的约束规范

本节中首先提出了与 MPCC-CAKKT 相关的约束规范，即 MPCC-CAKKT 正则性，然后证明了 MPCC-CAKKT 正则性是能保证 M 稳定性的约束规范。

定义 4.1 对于所有 $x\in R^n$，$z\in\Lambda$ 和 $r\in R_+$，我们定义 $\mathcal{K}\left(\left(x,z\right),r\right)$ 为

$$\mathcal{K}((x,z),r) := \left\{ \lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) : \sum_{i=1}^{q} \left| \lambda_i^h h_i(x) \right| \le r, \lambda \in N_\Lambda(z) \right\}.$$

定义 4.2 (MPCC-CAKKT 正则性)称 MPCC 问题在可行点 x^* 处满足 MPCC-CAKKT 正则性，如果集值映射 $R^n \times \Lambda \times R_+ \ni ((x^k, z^k), r^k) \rightrightarrows \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^k, z^k), r^k)$ 在点 $((x^*, F(x^*)), 0)$ 处外半连续，即

$$\limsup_{((x^k,z^k),r^k)\to((x^*,F(x^*)),0)} \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^k,z^k),r^k) \subset \nabla F(x^*)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^*,F(x^*)),0).$$

定理 4.3 假设 x^* 是 MPCC 问题的一个 MPCC-CAKKT 点，若 MPCC-CAKKT 正则性在 x^* 处成立，那么 x^* 是 M 稳定点。

证明：对于任意连续可微的目标函数 f，若 x^* 满足 MPCC-CAKKT 条件，则存在序列 $\{x^k\} \to x^*$，$z^k \to F(x^*)$，$r^k \searrow$，$\{\lambda^k\} \in \mathcal{K}((x^k, z^k), r^k)$，使得

$$y^k = \nabla f(x^k) + \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \lambda^k \to 0.$$

令 $\omega^k = \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \lambda^k$，则有 $\omega^k \in \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^k, z^k), r^k)$，$\omega^k = y^k - \nabla f(x^k)$。由定义 2.1 和 $\omega^k \to \omega^*$，可得

$$\omega^* \in \limsup_{((x^k,z^k),r^k)\to((x^*,F(x^*)),0)} \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^k,z^k),r^k).$$

由于 $\nabla f(x)$ 连续性，MPCC-CAKKT 正则性和 $y^k \to 0$ 可以得到

$$\begin{aligned} -\nabla f(x^*) = \lim_k \omega^k = \omega^* &\in \limsup_{((x^k,z^k),r^k)\to((x^*,F(x^*)),0)} \nabla F(x^k)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^k,z^k),r^k) \\ &\subset \nabla F(x^*)^{\mathrm{T}} \mathcal{K}((x^*,F(x^*)),0) \subset \nabla F(x^*)^{\mathrm{T}} N_\Lambda(F(x^*)). \end{aligned}$$

故 x^* 为 M 稳定点。□

推论 4.4 假设 x^* 是 MPCC 问题的一个局部最优解，若 MPCC-CAKKT 正则性在 x^* 处成立，则 x^* 是 M 稳定点。

由定理 3.2 和定理 4.3 可知：若 x^* 是 MPCC 问题的一个局部最优解，且 x^* 满足 MPCC-CAKKT 正则性条件，那么 x^* 是 M 稳定点。该结果意味着 MPCC-CAKKT 正则性是关于 M 稳定性的约束规范。

5. 总结

本文主要研究了 MPCC 问题的序列最优性条件，介绍了与 MPCC 问题 M 稳定性相关的序列最优性条件(MPCC-CAKKT 条件)，证明了 MPCC-CAKKT 条件是 MPCC 问题的一个合理的序列最优性条件。同时，提出了 MPCC-CAKKT 正则性，并证明了在 MPCC-CAKKT 正则性的条件下，MPCC 问题的局部最优解是 M 稳定点。因此，MPCC-CAKKT 正则性是 MPCC 问题的约束规范。

基金项目

辽宁师范大学教师指导本科生科研训练项目(项目编号：CX202302012)。

参考文献

[1] Prado, R.W., Santos, S.A. and Simões, L.E.A. (2023) On the Fulfillment of the Complementary Approximate Karush-

Kuhn-Tucker Conditions and Algorithmic Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **197**, 705-736. https://doi.org/10.1007/s10957-023-02189-1

[2] Prado, R.W., Santos, S.A. and Simões, L.E.A. (2023) A Novel Sequential Optimality Condition for Smooth Constrained Optimization and Algorithmic Consequences. *Optimization*, **73**, 1447-1476. https://doi.org/10.1080/02331934.2023.2168481

[3] Andreani, R. and Martínez, J.M. (2001) On the Solution of Mathematical Programming Problems with Equilibrium Constraints. *Mathematical Methods of Operations Research*, **54**, 345-358. https://doi.org/10.1007/s001860100158

[4] Andreani, R., Haeser, G., Secchin, L.D. and Silva, P.J.S. (2019) New Sequential Optimality Conditions for Mathematical Programs with Complementarity Constraints and Algorithmic Consequences. *SIAM Journal on Optimization*, **29**, 3201-3230. https://doi.org/10.1137/18m121040x

[5] Ramos, A. (2019) Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: A Sequential Optimality Condition, New Constraint Qualifications and Algorithmic Consequences. *Optimization Methods and Software*, **36**, 45-81. https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1702661

[6] Rockafellar, R.T. and Wets, J.B. (2009) Variational Analysis. Springer-Verlag.