Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(9), 4275-4288
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139408

Navier-Stokes方程非阻尼极限研究

刘爱博，王晓燕

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年8月18日；录用日期：2024年9月12日；发布日期：2024年9月18日

摘 要

本论文对Navier-Stokes方程非阻尼极限进行了研究，即对带有阻尼项的Navier-Stokes方程解的极限行为进行研究。证明了在相同初值条件下，带有不同阻尼项的Navier-Stokes方程的解u均收敛到Navier-Stokes方程的解v。

关键词

带有阻尼项的Navier-Stokes方程，Navier-Stokes方程，解的收敛

Study on the Undamped Limit of Navier-Stokes Equations

Aibo Liu, Xiaoyan Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 18th, 2024; accepted: Sep. 12th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

In this paper, the undamped limit of Navier-Stokes equation is studied, that is, the limit behavior of the solution of Navier-Stokes equation with damped term is studied. It is proved that the solutions of Navier-Stokes equations with different damping terms converge to the solutions of Navier-Stokes equations under the same initial value conditions.

Keywords

Navier-Stokes Equations with Damping Terms, Navier-Stokes Equations, Convergence of Solutions

文章引用: 刘爱博, 王晓燕. Navier-Stokes 方程非阻尼极限研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4275-4288.
DOI: 10.12677/aam.2024.139408

1. 引言

在物理和数学领域，经典的 Navier-Stokes 方程一直都得到了广泛关注。对此方程的研究已经有了不少的成果，包括 Ladyzhenskaya 对三维 Navier-Stokes 方程 Suitable 弱解的部分正则性进行了研究[1]，Seregn 给出了 Navier-Stokes 方程的正则性准则[2]，Robinson 在三维 Navier-Stokes 方程经典理论中证明了 Navier-Stokes 方程的 3D 弱解的整体存在性和在小初值下 3D 强解的整体存在性[3]，Tsai-Tai-Peng 证明了 Navier-Stokes 方程具有温和解[4]，Caffarelli-Kohn-Nirenberg 给出了 Navier-Stokes 的偏正则性准则[5]等。但是目前仍有许多未解难题，比如湍流的数学理论，三维整体正则性，稳态边界值问题等。

近些年，又有许多学者对带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程进行了研究并且有很多不错的结果。在 2008 年，蔡晓静和久全森研究了带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta}u$ 的 Navier-Stokes 方程，他们证明了在一定条件下弱解的整体存在性，高正则解的整体存在性以及高正则解唯一性[6]。在 2012 年周勇证明了当 $\beta\geq 3$ 时，带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta}u$ 的 Navier-Stokes 方程强解的整体存在性[7]。在 2013 年，J. Benameur 研究了带有指数阻尼项 $\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 Navier-Stokes 方程，证明了弱解的整体存在性[8]和强解整体存在性[9]。当 $\varepsilon\to 0$ 时，带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程的解是否或怎样收敛到经典的 Navier-Stokes 的解是一个有意义并且有趣的问题，此类问题的研究尚属空白，这个灵感来源于 B. Guo 和 C. Guo 证明了二维非牛顿流体解收敛的相关问题[10]。所以本论文将在此基础对下面问题进行证明，假设 u 是带有阻尼项的 NS 方程的解和 v 是经典 NS 方程的解，在一定条件下，$w=u-v$ 均满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\leq \varepsilon Cte^{\frac{c}{\eta}t}$$

此外，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有 $\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

本论文的结构如下：在第二节，将介绍本论文需要的基本符号和相关引理，在第三节，将考虑带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程解的收敛情况，在第四节，将考虑带有指数阻尼项 $\varepsilon\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 *NS* 方程解的收敛情况。

2. 符号表示和相关引理

这一章，介绍本论文所用到的基本符号和相关引理。规定 Ω 表示环面 T^n 或者表示 $\mathbb{R}^n$ 上的有界域，并且 Ω 和 $\mathbb{R}^n$ 均适用于下面符号，其中 $n=2,3$。我们定义符号如下：

当 $1\leq p\leq\infty$ 时，用 $L^p(\Omega)$ 表示通常的 Lebesgue 空间，该空间模表示为 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$。用 $C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 表示所有具有紧支集且散度为零的光滑函数构成的空间。当 $1<p<\infty$ 时，$L_\sigma^p(\Omega)$ 表示 $C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 范数下的闭包，特别的，当 $p=2$ 时，定义 $\mathbf{H}(\Omega)=L_\sigma^2(\Omega)$。当 $1\leq k\leq p\leq\infty$ 时，$W^{k,p}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间，该空间模表示为 $\|\cdot\|_{k,p}$，特别的，当 $p=2$ 时，定义 $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$。$W_{0,\sigma}^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 范数下的闭包，特别的，当 $p=2,k=1$ 时，定义 $\mathbf{V}(\Omega)=W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)=\mathbf{H}(\Omega)\cap H^1(\Omega)$。$X$ 表示是 Banach 空间，该空间模表示为 $\|\cdot\|_X$。当 $1\leq p\leq\infty$ 时，用 $L^p(0,T;X)$ 表示定义在 $(0,T)$ 上的函数 $f(t)$ 的集合在 X 范数下的值满足 $\int_0^T\|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t<\infty$，即 $L^p(0,T;X)=\int_0^T\|\cdot\|_X\,\mathrm{d}t$。

设 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 中连续三线形式如下：

$$b(u,v,w)=\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \mathrm{d}x,\ u,v,w\in H^1(\Omega)$$

并且具有以下性质：$b(u,v,w)=-b(u,w,v)$，$b(u,v,v)=0$。

在三维 Navier-Stokes 方程经典理论中，对下面 NS 方程进行了研究

$$(\mathrm{NS})\begin{cases}\partial_t v-\eta\Delta v+(v\cdot\nabla)v+\nabla\pi=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ \operatorname{div} v=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ v(0,x)=v_0(x), & x\in\mathbb{R}^3,\\ |u|\to 0, & |x|\to\infty.\end{cases}$$

其中，$v=v(t,x)=(v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t,x))$ 和 $\pi(t,x)$ 分别表示向量场和流体压力，粘度系数 $\eta>0$ 是一个常数，给定函数 $v_0=v_0(x)$ 为初速度。

定义 2.1 设 Ω 是 T^n、是 $\mathbb{R}^n$ 或是 $\mathbb{R}^n$ 中有界域，$n=2,3$。如果 v 的初值 $v_0\in H$，且满足下列条件

i) $v\in L^\infty(0,T;\mathbf{H})\cap L^2(0,T;\mathbf{V})$，$\forall T>0$，

ii) v 满足方程

$$\int_0^s -\langle v,\partial_t\varphi\rangle+\int_0^s\langle\nabla v,\nabla\varphi\rangle+\int_0^s\langle(v\cdot\nabla)v,\varphi\rangle=\langle v_0,\varphi(0)\rangle-\langle v(s),\varphi(s)\rangle,$$

则称 v 是 NS 方程在 $[0,T]$ 上的弱解，其中，$\varphi\in C_{0,\sigma}^\infty([0,T]\times\Omega)$ 且 $\operatorname{div}\varphi(\cdot,T)=0$。

定义 2.2 如果 u 是 Navier-Stokes 方程的弱解且有

$$u\in L^\infty(0,T;H^1)\cap L^2(0,T;H^2),$$

则称 u 是 Navier-Stokes 方程在 $[0,T]$ 上的强解。

引理 2.3 [3]在二维情况下，设 $\eta>0$，$v_0\in H$，则对于任意 $T>0$，存在唯一 v 满足：

$$v\in C(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;H^1)\cap L^2(0,T;H^2),$$

此外，存在一个常数 $C>0$ 满足下面不等式：

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla v\|_{L^2}^2\le C.$$

为了表达简单，在下面证明中让 C 表示一个任意正数，在不同行取值可能不同。

3. 带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程解极限的研究

在本章将证明，在不同维数空间中，当 $\varepsilon\to 0$ 时，带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 Navier-Stokes 方程的解在 L^2 范数下收敛到 Navier-Stokes 方程的解。

$$(\mathrm{NS}_1)\begin{cases}\partial_t u-\eta\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\varepsilon|u|^{\beta-1}u+\nabla p_1=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ \operatorname{div} u=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^3,\\ |u|\to 0, & |x|\to\infty.\end{cases}$$

其中，在阻尼项中 $\varepsilon>0,\beta\ge 1$ 是两个常数，给定函数 $u_0=u_0(x)$ 为初速度。

定义 3.1 如果对于 $\forall T>0$，函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 满足下列条件

i) $u\in L^\infty(0,T;\mathbf{H}(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;\mathbf{V}(\mathbb{R}^3))\cap L^{\beta+1}(0,T;L^{\beta+1}(\mathbb{R}^3))$，

ii) u 满足方程

$$-\int_0^T\langle u,\varphi_t\rangle+\eta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\nabla\varphi-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\varphi+\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{\beta-1}u\varphi=\langle u_0,\varphi(0)\rangle,$$

iii) $\operatorname{div}u(x,t)=0$ 几乎处处成立，$(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]$，

则称函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的弱解，其中，$\varphi\in C_{0,\sigma}^{\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ 且 $\operatorname{div}\varphi(\cdot,T)=0$。

定义 3.2 如果函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的弱解且满足

$$u\in L^{\infty}(0,T;\mathbf{V}(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3)),$$

则称函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的强解。

定义 3.3 如果函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的弱解且满足

$$u\in L^{\infty}(0,T;\mathbf{V}(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))\cap L^{\infty}(0,T;L^{\beta+1}(\mathbb{R}^3)),$$

则称函数对 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的高正则解。

下面给出带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程解存在性定理并对带有多项式阻尼项的 NS 方程解收敛情况进行证明。

3.1. 弱解极限行为的研究

下面在二维空间中，对带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程弱解的极限行为进行研究。

引理 3.1.1 [4] (2D 弱解的整体存在性)假设 $\beta\ge1$ 和 $u_0\in\boldsymbol{H}(\mathbb{R}^2)$，则对于 $\forall T>0$，NS_1 方程存在整体弱解 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\|u\|_{L^2}^2+2\eta\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+2\varepsilon\int_0^T\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1}\,\mathrm{d}t\le\|u_0\|_{L^2}^2.$$

此外，在 Ω 上也有上述类似引理，即带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程存在二维整体弱解 u，Robinson 证明了 NS 方程有二维整体弱解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.1.2 设 u 是 2D-NS_1 方程下的弱解和 v 是 2D-NS 方程的弱解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in\boldsymbol{H}(\Omega)$，则对于 $\frac{5}{3}\le\beta\le\frac{8}{3}$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon Cte^{\frac{c}{\eta}t},$$

并且当 $\varepsilon\to0$，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

证明：用 NS_1 方程的解与 NS 方程的解做差可得

$$w_t+(u\cdot\nabla)w+(w\cdot\nabla)v-\eta\Delta w+\nabla(p_1-\pi)+\varepsilon|u|^{\beta-1}u=0,\tag{3.1}$$

再将(3.1)与 w 做内积并且根据 $b(u,w,w)=0$ 化简整理可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,v,w)-\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\rangle,\tag{3.2}$$

先对(3.2)中右边第一项进行估计，

$$|-b(w,v,w)|=|b(w,w,v)|\le\|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|v\|_{L^4}\le C\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}\le\frac{C}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2,\tag{3.3}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式，且由引理 2.3 知 $\|\nabla v\|_{L^2}\le C$。再估计(3.2)中右边第二项，

$$\left|-\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|=\left|\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|\le \varepsilon c\|u\|_{L^{\frac{6\beta}{5}}}^{2\beta}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2$$
$$\le \varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^{2\beta-\frac{10}{3}}\|u\|_{L^2}^{\frac{10}{3}}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2$$

当$\frac{5}{3}\le\beta\le\frac{8}{3}$时，有

$$\le \varepsilon C\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2+\varepsilon C\text{，} \tag{3.4}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式。

然后将(3.3)和(3.4)代入(3.2)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon C\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon C\text{，}$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le \mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon c\mathrm{d}s\right]\le \mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon ct\right]\text{，}$$

其中最后一个不等式使用了定理 3.1.1 中结论$\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\le C$，并且由$\|w_0\|_{L^2}^2=0$，可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.1.2 易知，当$\varepsilon\to 0$时，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。下面将在三维空间中，对带有多项式阻尼项$\varepsilon|u|^{\beta-1}u$的 NS 方程弱解的极限行为进行研究。

引理 3.1.3 [4] (3D 弱解的整体存在性)假设$\beta\ge 1$和$u_0\in \boldsymbol{H}\left(\mathbb{R}^3\right)$，则对于$\forall T>0$，$NS_1$方程存在整体弱解$\left\langle u(x,t),p_1(x,t)\right\rangle$满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\|u\|_{L^2}^2+2\eta\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+2\varepsilon\int_0^T\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1}\mathrm{d}t\le\|u_0\|_{L^2}^2.$$

引理 3.1.3 给出了带有多项式阻尼项$\varepsilon|u|^{\beta-1}u$的 *NS* 方程存在三维整体弱解 u，Robinson 证明了 NS 方程存在三维整体弱解 v，下面定理给出，在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.1.4 设 u 是 3D-NS_1 方程的弱解且满足$\sup_{t\ge 0}\|u\|_{L^\infty}\le c$，$v$ 是 3D-NS 方程的弱解，并且有相同的初值$u_0=v_0\in\boldsymbol{H}\left(\mathbb{R}^3\right)$，则对于$\frac{5}{3}\le\beta\le\frac{7}{3}$，差值$w=u-v$满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\text{，}$$

并且当$\varepsilon\to 0$，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

证明：由(3.2)和$b(w,u,w)=b(w,v,w)$可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,v,w)-\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle. \tag{3.5}$$

先对(3.5)中右边第一项进行估计，

$$\left|-b(w,u,w)\right|=\left|b(w,w,u)\right|\le\|w\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\le c\|w\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2}\le\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\text{，} \tag{3.6}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式和 Young 不等式并且在第二个不等号用了$\sup_{t\ge 0}\|u\|_{L^\infty}\le c$。再估计(3.5)中右

边第二项

$$\left|-\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|=\left|\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|\le\varepsilon\left\||u|^{\beta}\right\|_{L^{\frac{6}{5}}}\|w\|_{L^6}\le\varepsilon c\|u\|_{L^{\frac{6\beta}{5}}}^{2\beta}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^{3\beta-5}\|u\|_{L^2}^{5-\beta}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2$$

当 $\frac{5}{3}\le\beta\le\frac{7}{3}$ 时，有

$$\le\varepsilon c\left(c\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\right)+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\le\varepsilon C\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2+\varepsilon C, \tag{3.7}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式。

然后将(3.6)和(3.7)代入(3.8)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon C\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon C,$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon C\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon c\mathrm{d}s\right]\le\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon Ct\right],$$

其中最后一个不等式使用了定理 3.1.3 中结论且由 $\|w_0\|_{L^2}^2=0$，可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.1.4 易知，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

3.2. 强解极限行为的研究

下面在二维空间中，对带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程强解的极限行为进行研究。

定理 3.2.1 (2D 强解整体存在性)假设 $\beta\ge1$ 和 $u_0\in\mathbf{V}\left(\mathbb{R}^2\right)$，则对于 $\forall t\ge0$，NS_1 方程存在整体强解 $\left\langle u(x,t),p_1(x,t)\right\rangle$ 满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\eta\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+2\varepsilon\int_0^T\left\|\nabla u|u|^{\frac{\beta-1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\frac{8(\beta-1)\varepsilon}{(\beta+1)^2}\int_0^T\left\|\nabla|u|^{\frac{\beta+1}{2}}\right\|_{L^2}^2\le C,$$

特别的，定理 3.2.1 在周期和非周期情况下均成立，该定理证明类似与文献[7]中强解的证明，只是维数不同。

在 Ω 上也上述类似定理成立，即带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程存在二维整体强解 u，Robinson 证明了 NS 方程有二维整体强解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.2.2 设 u 是 2D-NS_1 方程的强解和 v 是 2D-NS 方程的强解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in\mathbf{V}(\Omega)$，则对于 $\beta\ge1$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t},$$

并且当 $\varepsilon\to0$，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

证明：由方程(3.2)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,v,w)-\left\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle, \tag{3.8}$$

先估计(3.11)中右边第一项，

$$\left|-b(w,v,w)\right|=\left|b(w,w,v)\right|\le\|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|v\|_{L^4}\le c\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}\le\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2, \tag{3.9}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式且第三个不等号使用了引理 2.3 中结论 $\sup\limits_{0\le t\le T}\|\nabla v\|_{L^2}^2\le C$。再估计(3.11)中右边第二项，

$$\begin{aligned}\left|-\left\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|&=\left|\left\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|\le\varepsilon c\left\||u|^{\beta-1}\right\|\|u\|_{L^2}^2+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\\&\le\varepsilon c\|u\|_{L^{2\beta}}^{2\beta}+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^{2\beta}+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{3.10}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、2D-Sobolev 嵌入和 Young 不等式。

然后将(3.12)和(3.13)代入到(3.11)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c+\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2,$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c\mathrm{d}s\right]\le\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon ct\right],$$

又由于 $\|w_0\|_{L^2}^2=0$，所以可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.2.2 易知，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。下面在将三维空间中，对带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程强解的极限行为进行研究。

引理 3.2.3 [5] (3D 强解的整体存在性)假设 $\beta\ge3$ 和 $u_0\in\mathbf{V}\left(\mathbb{R}^3\right)$，则对于 $\forall t\ge0$，NS_1 方程存在整体强解 $\left\langle u(x,t),p_1(x,t)\right\rangle$ 满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\eta\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^T\left\|\nabla u|u|^{\frac{\beta-1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\frac{4(\beta-1)\varepsilon}{(\beta+1)^2}\int_0^T\left\|\nabla|u|^{\frac{\beta+1}{2}}\right\|_{L^2}^2\le C,$$

此外，引理 3.2.3 在 Ω 上也成立。即带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程存在三维整体强解 u，Robinson 证明了 NS 方程在小初值下也存在三维整体强解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.2.4 设 u 是 3D-NS_1 方程下的强解和 v 是 3D-NS 方程的强解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in\mathbf{V}(\Omega)$，则对于 $3\le\beta\le5$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t},$$

并且当 $\varepsilon\to0$，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

证明：由(3.5)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,u,w)-\left\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle, \tag{3.11}$$

先对(3.14)中右边第一项进行估计，

$$\left|-b(w,u,w)\right|=\left|b(w,w,u)\right|\le\|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|u\|_{L^4}\le c\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|\nabla u\|_{L^2}\le\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2, \tag{3.12}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式和 Young 不等式。再估计(3.14)中右边第二项，

$$\left|-\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|=\left|\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|\le\varepsilon\left\||u|^{\beta}\right\|_{L^{\frac{6}{5}}}\|w\|_{L^6}\le\varepsilon c\|u\|_{L^{\frac{6\beta}{5}}}^{2\beta}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^{3\beta-5}\|u\|_{L^2}^{5-\beta}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2$$

当 $\frac{5}{3}\le\beta\le5$ 时，有

$$\le\varepsilon C+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2, \tag{3.13}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式。

然后将(3.15)和(3.16)代入(3.14)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon C,$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c\mathrm{d}s\right]\le\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon ct\right],$$

又由于 $\|w_0\|_{L^2}^2=0$，所以可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.2.4 易知，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

3.3. 高正则解极限行为的研究

这章对二维空间中带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程高正则解的极限行为进行研究。

定理 3.3.1 (2D 高正则解的存在性)假设 $\beta\ge1$ 和 $u_0\in\mathbf{V}(\mathbb{R}^2)\cap L^{\beta+1}(\mathbb{R}^2)$，则 NS$_1$ 方程存在整体高强解 $\langle u(x,t),p_1(x,t)\rangle$ 满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}\right)+\int_0^T\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{\varepsilon(\beta-1)}{2}\int_0^T\left\||u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\left\||\nabla u||u|^{\frac{\beta-1}{2}}\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\le C,$$

特别的，定理 3.3.1 在周期和非周期情况下均可成立，该定理证明类似于文献[6]中强解的证明。

上述定理在 Ω 上也成立，即带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 *NS* 方程存在二维整体高正则解 u，Robinson 证明了 NS 方程有二维整体强解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.3.2 设 u 是 2D-NS$_1$ 方程下的高正则解和 v 是 2D-NS 方程的高正则解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in\mathrm{V}(\Omega)\cap L^{\beta+1}(\Omega)$，则对于 $\beta\ge1$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t},$$

并且当 $\varepsilon\to0$，$\|w\|_{L^2}^2\to0$。

证明：由方程(3.5)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,v,w)-\left\langle\varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle, \tag{3.14}$$

先估计(3.21)中右边第一项，

$$\left|-b(w,u,w)\right| = \left|b(w,w,u)\right| \le \frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\text{，} \tag{3.15}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式、和 Young 不等式。再估计(3.21)中右边第二项，

$$\left|-\left\langle \varepsilon |u|^{\beta-1} u, w\right\rangle\right| = \left|\left\langle \varepsilon |u|^{\beta-1} u, w\right\rangle\right| \le \varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^{2\beta} + \frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon C + \frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\text{，} \tag{3.16}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、2D-Sobolev 嵌入和 Young 不等式。

然后将(3.22)和(3.23)代入到(3.21)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon C + \frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\text{，}$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2 \le \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \varepsilon c\mathrm{d}s\right] \le \mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2 + \varepsilon ct\right].$$

又由于 $\|w_0\|_{L^2}^2 = 0$，所以可得

$$\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.3.2 易知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2 \to 0$。在下面定理中，将对三维空间中带有多项式阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 *NS* 方程的高正则解极限行为进行研究。

引理 3.3.3 (高正则解的存在性)假设 $\beta \ge \frac{7}{2}$ 和 $u_0 \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\beta+1}(\mathbb{R}^3)$，则 NS_1 方程存在整体高正则解 $\langle u(x,t), p_1(x,t)\rangle$ 满足：

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}\right) + \int_0^T \|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + \int_0^T \|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{\varepsilon(\beta-1)}{2}\int_0^T \left\||u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \left\||\nabla u||u|^{\frac{\beta-1}{2}}\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C.$$

同时上述定理在 Ω 上也成立。即带有阻尼项 $\varepsilon|u|^{\beta-1}u$ 的 NS 方程存在二维整体高正则解 u，Robinson 证明了 NS 方程有二维整体强解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 3.3.4 设 u 是 3D-NS$_1$ 方程下的高正则解和 v 是 3D-NS 方程的高正则解，并且有相同的初值 $u_0 = v_0 \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\beta+1}(\mathbb{R}^3)$，则对于 $\beta \ge \frac{7}{2}$，差值 $w = u - v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\text{，}$$

并且当 $\varepsilon \to 0$，$\|w\|_{L^2}^2 \to 0$。

证明：由方程(3.5)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 + \eta\|\nabla w\|_{L^2}^2 = -b(w,u,w) - \left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u, w\right\rangle. \tag{3.17}$$

先估计(3.24)中右边第一项，

$$\left|-b(w,u,w)\right| = \left|b(w,w,u)\right| \le \|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|u\|_{L^4} \le \frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|\nabla u\|_{L^2} \le \frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2\text{，} \tag{3.18}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式。再估计(3.24)中右边第二项

$$\left|-\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|=\left|\left\langle \varepsilon|u|^{\beta-1}u,w\right\rangle\right|\le\varepsilon c\|u\|_{L^{\frac{6}{5}\beta}}^{2\beta}+\frac{\eta}{2}\|w\|_{L^6}^2$$

当 $\beta\ge 5$ 时，有 $\le\varepsilon c\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{2\beta-10}{\beta+7}}\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\frac{2\beta^2+12\beta+10}{\beta+7}}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2$

$$\le\varepsilon c\|\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2+\varepsilon c\,,\tag{3.19}$$

这里使用 Hölder’s 不等式和 Young 不等式且最后一个不等式使用了定理 3.3.3 中结论 $\sup\limits_{0\le t\le T}\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1}\le C$。

然后将(3.25)和(3.26)代入到(3.24)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon c\|\Delta u\|_{L^2}^2+\varepsilon c+\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c+\varepsilon c\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\right]\le\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon ct\right].$$

其中最后一个不等式中使用了定理 3.3.2 中结论并且由 $\|w_0\|_{L^2}^2=0$，所以上式可化简为

$$\|w\|_{L^2}^2\le\varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 3.3.4 易知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

4. 三维中带有阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 NS 方程解极限的研究

在本章将给出，在三维情况下，当 $\varepsilon\to 0$ 时，带有阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 Navier-Stokes 方程的解在 L^2 范数下收敛到 Navier-Stokes 方程的解。

$$(\mathrm{NS}_2)\begin{cases}\partial_t u-\eta\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u+\nabla p_2=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ \operatorname{div}u=0, & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\ u(0,x)=u^0(x), & x\in\mathbb{R}^3,\\ |u|\to 0, & |x|\to\infty.\end{cases}$$

在阻尼项中 $\varepsilon,\beta>0$ 是两个常数。给定函数 $u_0=u_0(x)$ 为初速度。

定义 4.1 如果对于 $\forall T>0$，函数对 $\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$ 满足下列条件

i) $u\in L^\infty\left(0,T;\boldsymbol{H}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ 和 $\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\in L^1\left(0,T;L^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，

ii) $\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u=-\nabla p$ 于分布意义成立：u 满足方程

$$-\int_0^T\langle u,\varphi_t\rangle+\eta\int_0^T\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle-\int_0^T\langle(u\cdot\nabla)u,\varphi\rangle+\varepsilon\int_0^T\left\langle\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,\varphi\right\rangle=\langle u_0,\varphi(0)\rangle,$$

iii) $\operatorname{div}u(x,t)=0$，$(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]$，

则称函数对 $\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$ 是 NS_2 方程的弱解，其中，$\varphi\in C_{0,\sigma}^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^3\right)$ 且 $\operatorname{div}\varphi(\cdot,T)=0$。

定义 4.2 如果函数对 $\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$ 是 NS_1 方程的弱解且满足

$$u\in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega)\right),$$

$$\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2,\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2,\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\in L^1\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right),$$

$$\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\in L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega)\right)$$

则称函数对 $\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$ 是 NS_2 方程的强解。

下面给出带有指数阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 NS 方程解存在性定理并对带有指数阻尼项的 NS 方程解收敛情况进行证明。

4.1. 弱解极限行为的研究

将在三维空间中，对带有指数阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 NS 方程的弱解极限行为进行研究。

引理 4.1.1 [6] (3D 弱解存在性)假设 $\beta\geq 0$ 和 $u_0\in\mathbf{H}\left(\mathbb{R}^3\right)$，则 NS_2 方程存在整体弱解 $\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$ 满足

$$\|u\|_{L^2}^2+2\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+2\alpha\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\right\|_{L^1}\mathrm{d}t\leq\left\|u^0\right\|_{L^2}^2.$$

推论 4.1.2 由 $\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\in L^1\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)$ 可知 $u\in\bigcap_{4\leq p<\infty}L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)$，由下面初等不等式可知

$$\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\right\|_{L^1}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta^k}{k!}\int_0^t\|u\|_{L^{2k+2}}^{2k+2}\,\mathrm{d}t\leq c_1.$$

引理 4.1.1 给出了带有指数阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 NS 方程存在三维整体弱解 u，Robinson 证明了 NS 方程存在三维整体弱解 v，下面定理给出：在相同初值条件下两个解差的估计。

定理 4.1.3 设 u,v 分别是 3D-NS_2 方程和 3D-NS 方程的弱解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in\mathbf{H}\left(\mathbb{R}^3\right)$，则对于 $\beta\geq 0$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}^2\leq\varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t},$$

并且当 $\varepsilon\to 0$，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

证明：用 NS_2 方程的解与 NS 方程的解做差可得

$$w_t+(w\cdot\nabla)u-(v\cdot\nabla)w-\eta\cdot w+\nabla\left(p_2-\pi\right)+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u=0,\tag{4.1}$$

再将(4.1)与 w 做内积并且利用 $b(v,w,w)=0$ 整理可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,u,w)-\left\langle\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,w\right\rangle,\tag{4.2}$$

先估计(4.2)中右边第一项，

$$|-b(w,u,w)|=|b(w,w,u)|\leq\|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|u\|_{L^4}\leq c\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|u\|_{L^4}\leq\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2,\tag{4.3}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式且第三个不等号使用了推论 4.1.2 中结论。再估计(4.2)中右边第二项，

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,w\right\rangle\right|&\leq\varepsilon\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u\right\|_{L^{\frac{6}{5}}}\|w\|_{L^6}\leq\varepsilon c\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u\right\|_{L^{\frac{6}{5}}}^2+\frac{\eta}{2}\|w\|_{L^6}^2\\&\leq\varepsilon c\left(\sum_{k=2}^\infty\frac{\beta^k}{k!}\int_\Omega|u|^{2k+2}\,\mathrm{d}x+\beta\int_\Omega|u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{4.4}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式和 Young 不等式。

然后将(4.3)和(4.4)代入到(4.2)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon c\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\int_{\Omega}|u|^{2k+2}\,\mathrm{d}x+\beta\int_{\Omega}|u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}+\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2,$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2 \le \mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\int_{\Omega}|u|^{2k+2}\,\mathrm{d}x+\varepsilon c\beta\int_{\Omega}|u|^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]\le \mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon C\right],$$

其中最后一个不等式使用了推论 4.1.1 中结论。并且由$\|w_0\|_{L^2}^2=0$可得

$$\|w\|_{L^2}^2 \le \varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 4.1.3 易知，当$\varepsilon\to 0$时，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

4.2. 强解极限行为的研究

将在三维空间中，对带有指数阻尼项$\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$的 NS 方程的强解极限行为进行研究。

定理 4.2.1 (3D 强解存在性)假设$u_0\in\mathbf{V}\left(\mathbb{R}^3\right)\cap\bigcap_{4\le p<\infty}L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)$和$\varepsilon\ge 1$，$\beta\ge 0$，则对于$\forall t\ge 0$，$NS_2$方程存在整体强解$\langle u(x,t),p_2(x,t)\rangle$满足

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x\right)+\int_0^T\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t$$
$$+\alpha\beta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C.$$

证明：先用 NS_2 方程与 u_t 做内积可得

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\cdot u_t\mathrm{d}x\le c\int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_t|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.5}$$

再用 NS_2 方程$-\Delta u$做内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\eta\|\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\le\frac{c}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|(u\cdot\nabla)u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\eta}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta u|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.6}$$

然后将(4.5)和(4.6)相加整理可得

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_{L^2}^2+(1+\eta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x+\frac{3\eta}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2\\&+\varepsilon\beta\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\le c\int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\equiv J,\end{aligned}\tag{4.7}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式和 Young 不等式。再对 J 进行估计可得

$$J\equiv\int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\le C\|u\|_{L^6}^2\|\nabla u\|_{L^3}^2\le C\|u\|_{L^6}^2\|\Delta u\|_{L^2}\|u\|_{L^6}\le C\|u\|_{L^6}^3\|\Delta u\|_{L^2}\le\frac{\eta}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L^6}^6.\tag{4.8}$$

这里使用 Gagliardo-Nirenberg 不等式。此外，由初等不等式可得

$$\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\geq\frac{\beta^2|u|^6}{6}, \tag{4.9}$$

再将(4.7)、(4.8)和(4.9)结合可得

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_{L^2}^2+(1+\eta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x+\eta\|\Delta u\|_{L^2}^2+\varepsilon\beta\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\\&+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\leq C\|u\|_{L^6}^6\leq C\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

然后在 $[0,T]$ 上积分可得

$$\begin{aligned}&(1+\eta)\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\eta\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\\&+\varepsilon\beta\int_0^T\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leq\|\nabla u_0\|^2+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u_0|^2}-|u_0|^2\right)\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再使用 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\\&+\varepsilon\beta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C.\end{aligned}$$

其中 C 与 $\|u_0\|_{L^2}^2$ 和 $\bigcap_{4\leq p<\infty}L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)$ 相关。

推论 4.2.2 在定理 4.2.1 的条件下可以推导出

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\mathrm{d}x\leq C+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x \text{ 和 } \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq C,\ \beta\geq 4.$$

引理 4.2.1 介绍了带有阻尼项 $\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 NS 方程存在三维整体强解 u，Robinson 证明了 NS 方程在小初值下有三维整体强解 v，下面给出在相同的初值条件下两个解差的估计。

定理 4.2.3 设 u,v 分别是 3D-NS$_2$ 方程和 3D-NS 方程的强解，并且有相同的初值 $u_0=v_0\in V\left(\mathbb{R}^3\right)\bigcap_{4\leq p<\infty}L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)$，则对于 $\beta\geq 0$，差值 $w=u-v$ 满足下面估计：

$$\|w\|_{L^2}\leq\varepsilon C\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}$$

并且当 $\varepsilon\to 0$，$\|w\|_{L^2}\to 0$。

证明：由(4.2)知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla w\|_{L^2}^2=-b(w,u,w)-\left\langle\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,w\right\rangle, \tag{4.10}$$

先估计(4.10)中右边第一项，

$$\left|-b(w,u,w)\right|=\left|b(w,w,u)\right|\leq\|w\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|u\|_{L^4}\leq c\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|u\|_{L^4}\leq\frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2, \tag{4.11}$$

这里使用了 Hölder’s 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式且第三个不等号使用了推论 4.2.2 中结论。再估计(4.10)中右边第二项

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \varepsilon\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,w\right\rangle\right|\\&\le \varepsilon c\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon c\left\|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right\|_{L^3}^2+\varepsilon c\|u\|_{L^6}^2+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\\&\le \varepsilon c\left\|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right\|_{L^3}^2+\varepsilon c\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon c+\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{4.12}$$

这里使用 Hölder’s 不等式、Sobolev 嵌入和 Young 不等式且第五个不等号使用了推论 4.2.2。

然后将(4.11)和(4.12)代入到(4.10)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\le \frac{c}{\eta}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon c.$$

再利用 Gronwall 不等式可得

$$\|w\|_{L^2}^2\le \mathrm{e}^{\int_0^t\frac{c}{\eta}\mathrm{d}s}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\varepsilon c\mathrm{d}s\right]\le \mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}\left[\|w_0\|_{L^2}^2+\varepsilon c\right],$$

由于 $\|w_0\|_{L^2}^2=0$，所以上式可以化简为

$$\|w\|_{L^2}^2\le \varepsilon Ct\mathrm{e}^{\frac{c}{\eta}t}.$$

由定理 4.2.3 易知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|w\|_{L^2}^2\to 0$。

参考文献

[1] Ladyzhenskaya, O.A. and Seregin, G.A. (1999) On Partial Regularity of Suitable Weak Solutions to the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **1**, 356-387. https://doi.org/10.1007/s000210050015

[2] Seregin, G. (2014) Lecture Notes on Regularity Theory for the Navier-Stokes Equations. World Scientific. https://doi.org/10.1142/9314

[3] Robinson, J.C., Rodrigo, J.L. and Sadowski, W. (2016) The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations: Classical Theory. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139095143

[4] Tsai, T. (2018) Lectures on Navier-Stokes Equations. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/gsm/192

[5] Caffarelli, L., Kohn, R. and Nirenberg, L. (1982) Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **35**, 771-831. https://doi.org/10.1002/cpa.3160350604

[6] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041

[7] Zhou, Y. (2012) Regularity and Uniqueness for the 3D Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1822-1825.

[8] Benameur, J. (2022) Global Weak Solution of 3D-NSE with Exponential Damping. *Open Mathematics*, **20**, 590-607. https://doi.org/10.1515/math-2022-0050

[9] Benameur, J. and Ltifi, M. (2021) Strong Solution of 3D-NSE with Exponential Damping. arXiv: 2103.16707.

[10] Guo, B. and Guo, C. (2009) The Convergence of Non-Newtonian Fluids to Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **357**, 468-478. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.04.027