

基于“扬帆远航”模型的帆船路径动态调整策略研究

张 淇, 金淑婷, 杨长城, 高晶英*

呼和浩特民族学院数学与大数据学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2024年8月18日; 录用日期: 2024年9月12日; 发布日期: 2024年9月18日

摘 要

本文基于第五版《数学模型》第二章第九节“扬帆远航”模型, 探究帆船在航行过程中如何调整航向和帆的朝向以实现最快速度到达终点。首先分析了帆船在东北和东南两个方向上受到风力的作用, 并建立相应的数学模型描述航向、帆的朝向与帆船速度之间的关系。其次, 求解了东北和东南方向最优的航向和帆的朝向, 同时通过数值计算建立了航向和帆的朝向与帆船转东南方向夹角之间的关系。最后, 确定了该夹角的取值范围及使帆船到达终点用时最少的最优夹角。

关键词

帆船航向, 帆的朝向, 动态调整, 数值计算

Research on Dynamic Adjustment Strategy of Sailing Path Based on the Model of “Sailing Far Away”

Qi Zhang, Shuting Jin, Changcheng Yang, Jingying Gao*

School of Mathematics and Big Data, Hohhot Minzu College, Hohhot Inner Mongolia

Received: Aug. 18th, 2024; accepted: Sep. 12th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

This article is based on the “Sailing Far Away” model in Section 9 of Chapter 2 of the fifth edition of “Mathematical Models”, exploring how sailboat adjusts its heading and sail orientation during navigation to achieve the fastest speed to reach the destination. Firstly, it analyzes the effect of wind on

*通讯作者。

sailboat in the northeast and southeast directions and establishes corresponding mathematical models to describe the relationship between heading, sail orientation and boat speed. Secondly, the optimal heading and sail orientation in the northeast and southeast directions were solved, and establishes the relationship between heading, sail orientation, and the angle at which the boat turns towards the southeast direction through numerical calculations. Finally, it defines the range of the angle and identifies the optimal angle that minimizes the time for the sailboat to reach the destination.

Keywords

Sailboat Heading, Sail Orientation, Dynamic Adjustment, Numerical Calculation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

海面上东风劲吹，一艘帆船计划从 A 点驶向正东方向的 B 点，如图 1 所示。为实现该目标，帆船应先朝东北方向前进，再转东南方向行驶。文献[1]得到了帆船启航时的航向 θ 以及帆的朝向 α 。文献[2]考虑风速以及浪高满足函数关系时，建立了航行时间最少的目标函数，借助拉格朗日函数和欧拉方程确定最佳航行路线。文献[3]运用多维动态规划法研究无人帆船的路径，从而找到了一条随着路径总长度变化而航行时间最短的路径。文献[4]研究风帆攻角操纵策略对帆船回转直径的作用规律。文献[5]中“扬帆远航”模型主要讨论了帆船在起点 A 处静止状态下建立了东北方向的帆船速度模型，并对该模型进行求解得到了最优航向 θ 及帆的朝向 α 。值得注意的是该模型中当帆船启航后，终点 B 将不在位于船的正东方，此时所确定的航向及帆的朝向不再是最优的角度。因此，本文基于“扬帆远航”模型，重点讨论帆船启航后如何动态调整其航向与帆的朝向，使得帆船尽快到达终点 B 。

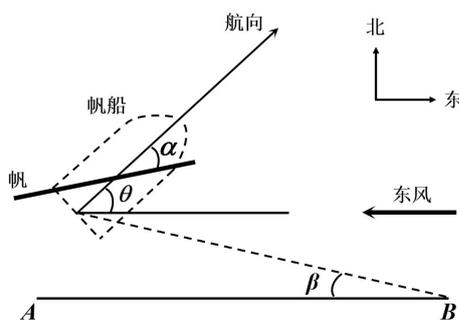


Figure 1. Sailing schematic diagram

图 1. 帆船航行示意图

如图 1 所示，令帆船与终点 B 连线和正西方向的夹角为 β 。本文构建了帆船启航以后航行速度的数学模型并对其求解，界定了夹角 β 的合理取值范围以及使帆船到达 B 点用时最短的 β 值。与“扬帆远航”模型比较，本文的创新点体现在以下三个方面：1) 研究了帆船运动过程中航向和帆的朝向的动态调整问题，在东北和东南两个方向分别建立了帆船速度模型；2) 求出了与夹角 β 相关的最优航向和帆的朝向，这表明最佳航向和帆的朝向会随着夹角 β 的变大而变化；3) 得到了航向和帆的朝向与夹角 β 之间的关系，同时求解了该夹角的最大值和最小值且在该范围内 β 取何值时帆船抵达 B 点的时间最短。

2. 问题分析

为了建立帆船速度模型，需要进行船体和帆的受力分析。帆船航行时，不仅受到风作用于帆面产生的推力，还会受到风直接吹向船体产生的阻力。本节将重点探讨帆船在东北和东南两个方向航行时所受的力，通过对推力和阻力的合理简化解，明确识别出对帆船前进方向产生影响的力。

首先，分析帆船朝东北方向行驶中的受力情况，如图 2 所示。设风通过帆产生的推力为 $w = w_1 + w_2$ ，其中 w_1 为垂直于帆的力， w_2 为平行于帆的力。 w_1 又可以分解为 $w_1 = f_1 + f_2$ ，其中 f_1 为风在航向的推力， f_2 为垂直于船体的力。设风通过船体产生的阻力为 $p = p_1 + p_2$ ，其中 p_1 为风在航向的阻力， p_2 为垂直于船体的力。帆船在前进方向上受到的净推力为 $f = f_1 - p_1$ 。帆船速度不大时，航速与净推力成正比。确定航向 θ 和帆的朝向 α 使得帆船的净推力 f 朝向终点 B 的分力达到最大。

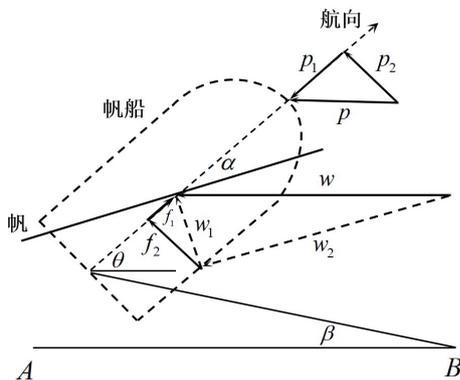


Figure 2. Stress analysis diagram in the northeast direction

图 2. 东北方向受力分析图

其次，分析帆船转东南方向以后的受力情况，如图 3 所示。此时，风通过帆产生的推力为 $w = w'_1 + w'_2$ ， w'_1 又可以分解为 $w'_1 = f'_1 + f'_2$ 。风通过船体产生的阻力为 $p = p'_1 + p'_2$ ，因此帆船在东南方向的净推力为 $f' = f'_1 - p'_1$ ，其中 f'_1, f'_2 和 p'_1, p'_2 与东北方向受力分析有相同的定义。

为了建立速度模型，本文还有如下的模型假设：

- 1) 令帆和船的迎风面积分别为 s_1 和 s_2 。风的推力 w 与 s_1 成正比，风的阻力 p 与 s_2 成正比，比例系数相同，记为 k ，且 s_1 远大于 s_2 ；
- 2) 分力 w_2 与帆面平行，可以忽略不计，分力 f_2 和 p_2 与船身垂直，不予考虑；

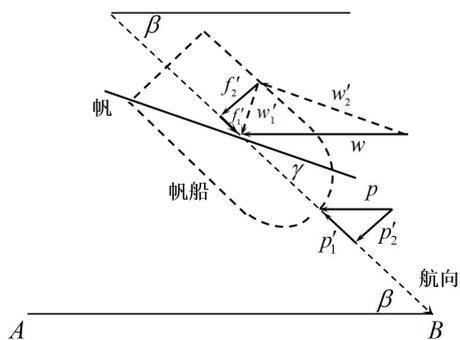


Figure 3. Stress analysis diagram in the southeast direction

图 3. 东南方向受力分析图

- 3) 航速 v 与净推力 f 同向且成正比, 比例系数为 k_1 ;
 4) 帆船在行驶中风力不变, 海面静止状态。

3. 模型建立

根据问题分析中多个力之间的关系和模型假设, 分别建立东北方向和东南方向航行速度 v 和 v' 的数学模型。首先, 由假设 1 得到风的推力与阻力分别为

$$w = ks_1, p = ks_2. \quad (1)$$

由帆船东北方向受力分析得到

$$f_1 = w_1 \sin \alpha = w \sin(\theta - \alpha) \sin \alpha, \quad (2)$$

和

$$p_1 = p \cos \theta, \quad (3)$$

再由假设 3 得到, 帆船东北方向的速度模型为

$$v = k_1 (f_1 - p_1). \quad (4)$$

帆船朝向终点 B 的速度分量记为 v_1 , 则

$$v_1 = k_1 (f_1 - p_1) \cos(\theta + \beta). \quad (5)$$

当帆船启航后, 随着 β 的变化需要不断的调整 θ 和 α 使得 v_1 最大。从(5)式可以看出, 文献[1]中“扬帆远航”模型是本文模型中 $\beta = 0^\circ$ 时的特殊情形。

其次, 帆船转东南方向后直接朝向终点 B 直线行驶, 此时帆船的速度最大。因此, 帆船东南方向的速度模型为

$$v' = k_1 (f_1' - p_1'), \quad (6)$$

其中 $f_1' = w_1' \sin \gamma = w \sin(\beta - \gamma) \sin \gamma$, $p_1' = p \cos \beta$, γ 为东南方向上帆的朝向。此时只需确定 β 和 γ 使得 v' 最大即可。

4. 模型求解

本节主要求解帆船东北方向航行速度分量模型(5)和东南方向航行速度模型(6), 同时建立夹角 β 与航向 θ 和帆的朝向 α 之间的关系。随后, 求解帆船转东南方向夹角 β 的范围, 并确定在该范围内 β 取何值时帆船达到终点 B 的时间最短。

4.1. 两个模型的求解

本文设定帆船到达任意位置时夹角 β 可以测量, 这也比较符合实际情况。在东北方向, 当 β 固定时确定 θ 和 α 使得 v_1 最大的问题是一个二元函数求极值问题。从等式(3)和(5)可知, p_1 与 α 无关, 因此只需在 θ 固定时使 f_1 最大, 解出 α , 再求 θ 使 v_1 最大。由等式(2)得到, f_1 可化为

$$f_1 = \frac{w}{2} [\cos(\theta - 2\alpha) - \cos \theta], \quad (7)$$

利用微分法可以求出 $\theta = 2\alpha$ 时 f_1 最大, 记为 $f_{\max} = \frac{w}{2}(1 - \cos \theta)$ 。

将 f_{\max} 和 p_1 代入(5)式得到

$$v_1 = k_1 [w(1 - \cos \theta)/2 - p \cos \theta] \cos(\theta + \beta) = (k_1 w/2) [1 - (1 + 2p/w) \cos \theta] \cos(\theta + \beta), \quad (8)$$

记 $k_2 = k_1 w / 2$, $k_3 = 1 + 2p/w = 1 + 2s_2/s_1$, 则(8)式变为

$$v_1 = k_2 (1 - k_3 \cos \theta) \cos(\theta + \beta). \quad (9)$$

通过 $\frac{dv_1}{d\theta} = 0$ 可以求出

$$k_3 \sin(2\theta + \beta) = \sin(\theta + \beta), \quad (10)$$

这里用到了两角和公式 $\sin(2\theta + \beta) = \sin \theta \cos(\theta + \beta) + \cos \theta \sin(\theta + \beta)$ 。(10)式表明, 只要确定 β 值, 按(10)式确定最优 θ 使得 v_1 取最大值。

在东南方向, 确定 β 和 γ 使得 v' 最大的问题仍然是一个二元函数求极值问题。同理, 先固定 β 使 f_1' 最大, 解出 γ , 再求 β 使 v' 最大。因此与(7)式相同方法得到当 $\gamma = \beta/2$ 时 f_1' 最大, 记为 $f'_{\max} = w(1 - \cos \beta)/2$ 。

将 f'_{\max} 和 p_1' 代入(6)式得到

$$\begin{aligned} v' &= k_1 [w(1 - \cos \beta)/2 - p \cos \beta] \\ &= (k_1 w / 2) [1 - (1 + 2p/w) \cos \beta] \\ &= k_2 (1 - k_3 \cos \beta). \end{aligned} \quad (11)$$

对(11)式求关于 β 的导数得到

$$\frac{dv'}{d\beta} = k_2 k_3 \sin \beta > 0, \quad (12)$$

其中 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。这说明航速 v' 是一个递增函数, β 越大速度 v' 越大。接下来, 利用(10)式求出 θ 值, 并利用数值拟合方法求出 θ 与 β 之间的关系。

4.2. 航向 θ 与夹角 β 之间的关系

当 β 固定时, 通过(10)式求出最优的航向 θ 是一个非常繁琐的过程。如果能够建立航向 θ 与夹角 β 之间

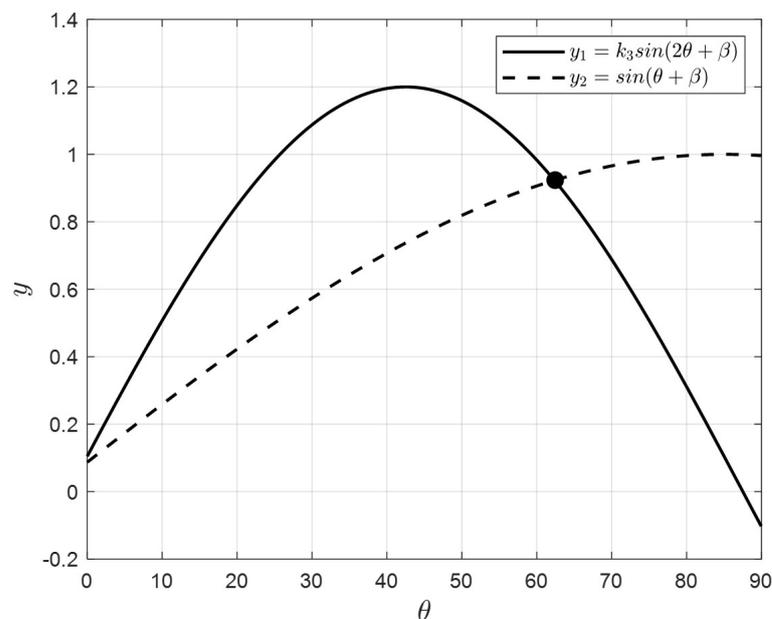


Figure 4. Schematic diagram of functions on the left and right sides of equation (10)

图 4. (10)式左侧和右侧函数示意图

的一种简单关系，在帆船调整航向时会起到事半功倍的效果。令(10)式左侧和右侧部分分别设为两个函数 $y_1 = k_3 \sin(2\theta + \beta)$ 和 $y_2 = \sin(\theta + \beta)$ ，其中 $k_3 = 1 + 2s_2/s_1$ 。由假设 1 可知 s_1 远大于 s_2 ，不妨取 $s_2/s_1 = 1/10$ ，则 $k_3 = 1.2$ 。当 β 取固定值时可以求出使两个函数值相等的 θ 。如图 4 所示，当 $\beta = 5^\circ$ 时，对应的 $\theta \approx 62^\circ$ 。当 β 取 $0^\circ, 5^\circ, \dots, 55^\circ$ 时求出使(10)式成立的 θ ，再利用 $\theta = 2\alpha$ 的关系求出对应的 α ，并把这些数据记录在表 1 中。

Table 1. Data of sail direction θ , sail orientation α and angle β

表 1. 航向 θ ，帆的朝向 α 以及夹角 β 的数据

序号 i	β_i 值	θ_i 值	α_i 值
1	0°	65°	32.5°
2	5°	62°	31°
3	10°	59°	29.5°
4	15°	56°	28°
5	20°	53°	26.5°
6	25°	50°	25°
7	30°	47°	23.5°
8	35°	44°	22°
9	40°	41°	20.5°
10	45°	38°	19°
11	50°	35°	17.5°
12	55°	32°	16°

如图 5 所示，通过表 1 数据进行线性拟合得到航向 θ 与夹角 β 之间的线性关系为

$$\theta = -\frac{3}{5}\beta + 65^\circ, \quad (13)$$

再由 $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ 确定帆的朝向与夹角 β 之间的关系。

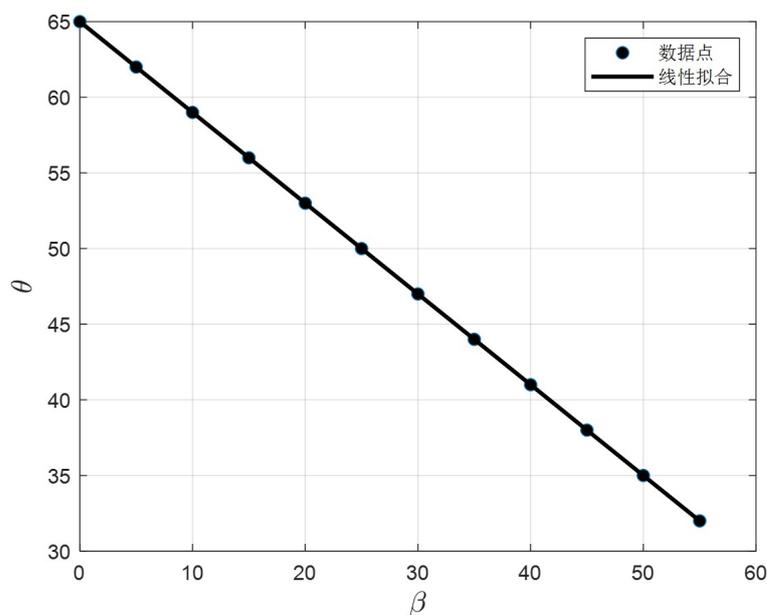


Figure 5. The relation diagram between sail direction θ and angle β

图 5. 航向 θ 与夹角 β 之间的关系图

4.3. 帆船转东南方向夹角 β 的讨论

本节首先讨论帆船转东南方向夹角 β 的最大值和最小值问题。由(10)式确定的航向 θ 以及帆的朝向 α 使帆船东北方向航速 $v = k_2(1 - k_3 \cos \theta)$ 最大。为了使航速 $v > 0$ ，必须满足 $f_{\max} > p_1$ ，即

$$\frac{w}{2}(1 - \cos \theta) > p \cos \theta, \quad (14)$$

进一步得到

$$\cos \theta < \frac{1}{\frac{2p}{w} + 1} = \frac{1}{\frac{2s_2}{s_1} + 1}. \quad (15)$$

当取 $s_2/s_1 = 1/10$ 时得到 $\cos \theta < 0.8333$ ，即 $\theta > 33^\circ$ 。由关系式(13)得到 $\beta < 53^\circ$ ，这表明当夹角 β 接近 53° 时帆船必须转东南方向。同理，使东南方向航速 $v' > 0$ ，必须满足

$$\cos \beta < \frac{1}{\frac{2s_2}{s_1} + 1}, \quad (16)$$

当取 $s_2/s_1 = 1/10$ 时确定 $\beta > 33^\circ$ ，这说明夹角 β 至少大于 33° 时帆船才可以转东南方向。由(13)、(15)和(16)式可知，只需知道帆和船的迎风面积比例，即可确定夹角 β 的范围。

接下来确定帆船何时转东南方向使其到达终点 B 的航行时间最短。如图 6 所示， A_i 表示 β 取某个值时帆船的位置，帆船东北方向的每段航行距离记为 Δy_i ，用实线表示，帆船位置到终点 B 的距离记为 Δx_i ，用虚线表示。根据表 1 的数据可知，当 β 取 $0^\circ, 5^\circ, \dots, 55^\circ$ ， $\Delta x_1 = 10$ ， $\Delta y_1 = 0$ 时，利用正弦定理求出三角形 A_1BA_2 中其它两个边的长度，即 $\Delta x_2 = 9.6447$ ， $\Delta y_2 = 0.9277$ 。再利用 Δx_2 求出三角形 A_2BA_3 的其它两个边的长度 Δx_3 和 Δy_3 。以此类推，求出所有的 Δx_i 和 Δy_i ， $i = 1, 2, \dots, 12$ ，这些数据记录在表 2 中。

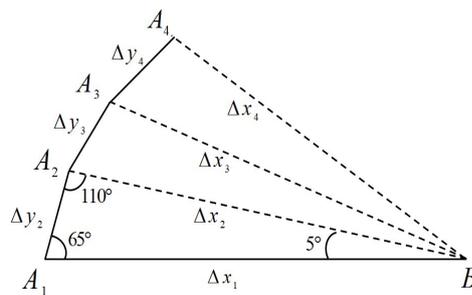


Figure 6. Schematic diagram of sailing distance
图 6. 航行距离示意图

为了计算帆船的航行时间，需要求出当 β 取 $0^\circ, 5^\circ, \dots, 55^\circ$ 时帆船东北和东南方向的最大速度。帆船在东北方向每段航行最大速度记为 v_i ，东南方向最大速度记为 v'_i 。两个速度分别由(10)和(11)式求出，这里不妨取 $k_2 = 3$ ，求出的速度记录在表 2 中，负值表示帆船无法前进。帆船在东北方向每段航行距离所用时间记为 $t_i = \Delta y_{i+1}/v_i$ ， $i = 1, 2, \dots, 11$ ，东南方向每个航线所用时间记为 $t'_i = \Delta x_i/v'_i$ ， $i = 1, 2, \dots, 12$ ，所有结果仍记录在表 2 中，横线表示负速度对应的时间，可以忽略。

在 β 的取值范围 $33^\circ < \beta < 53^\circ$ 内，由表 2 最后两列时间数据分别计算出帆船在 $\beta = 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$ 时转东南方向到达终点 B 所用时间。当 $\beta = 35^\circ$ 时，帆船在 A_8 的位置转东南方向到达 B 点的时间为 $t = t'_8 = 163.2762$ ；当 $\beta = 40^\circ$ 时，帆船在 A_9 的位置再转东南方向所用时间为 $t = t_8 + t'_9 = 35.7448$ ；当

Table 2. Path length, velocity and time in the northeast and southeast directions
表 2. 东北和东南方向路径长度、速度和时间

序号 i	帆船位置	β_i	Δx_i	Δy_i	v_i	v'_i	t_i	t'_i
1	A_1	0°	10	0	1.4786	-0.6000	0.6273	—
2	A_2	5°	9.6447	0.9277	1.3099	-0.5863	0.6747	—
3	A_3	10°	9.3349	0.8838	1.1459	-0.5453	0.7386	—
4	A_4	15°	9.0661	0.8464	0.9869	-0.4773	0.8252	—
5	A_5	20°	8.8346	0.8144	0.8335	-0.3829	0.9445	—
6	A_6	25°	8.6373	0.7872	0.6860	-0.2627	1.1143	—
7	A_7	30°	8.4717	0.7644	0.5448	-0.1177	1.3686	—
8	A_8	35°	8.3357	0.7456	0.4104	0.0511	1.7801	163.2762
9	A_9	40°	8.2276	0.7305	0.2830	0.2422	2.5396	33.9647
10	A_{10}	45°	8.1462	0.7188	0.1632	0.4544	4.3541	17.9267
11	A_{11}	50°	8.0904	0.7104	0.0511	0.6860	13.8117	11.7941
12	A_{12}	55°	8.0596	0.7051	-0.0530	0.9351	—	8.6187

$\beta = 45^\circ$ 时, 帆船先后到达 A_9 和 A_{10} 的位置再转东南方向, 所用时间为 $t = t_8 + t_9 + t'_{10} = 22.2464$; 当 $\beta = 50^\circ$ 时, 帆船先后到达 A_9, A_{10} 和 A_{11} 的位置再转东南方向, 所用时间为 $t = t_8 + t_9 + t_{10} + t'_{11} = 20.4679$ 。从这些时间可以看出, 夹角 β 越大帆船到达 B 点所用的时间越短。结合前面得到的结论, 帆船在夹角 β 取值范围内越晚转东南方向, 到达终点 B 的时间越短。图 7 画出了帆船在 $\beta = 50^\circ$ 转东南方向时的最佳航行路线, 其中箭头表示航行距离及方向。

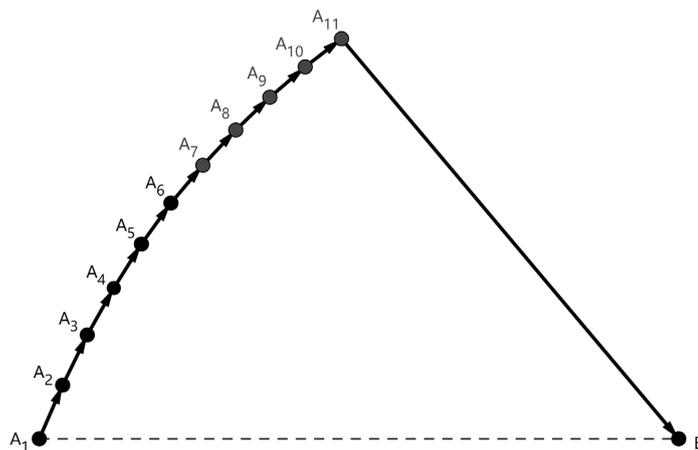


Figure 7. The best sailing route for sailboat
图 7. 帆船最佳航行路线

5. 结论

本文主要改进了“扬帆远航”模型, 讨论了帆船启航以后如何调整航向及帆的朝向使其到达终点的时间最短。首先在东北和东南方向建立了帆船的最大速度模型, 并对其进行了求解, 得到当帆的朝向是航向的一半时帆船的速度最大, 同时确定了使航行速度最大的航向 θ 。其次得到了航向 θ 与夹角 β 的线

性关系, 通过该关系可以调整帆船任何位置上的航向及帆的朝向。最后解决了帆船转东南方向夹角 β 的范围以及帆船何时转东南方向使其到达终点 B 的整个航行时间最短问题, 得到帆船在夹角 β 所确定的范围内越晚转东南方向到达终点 B 所用的时间越短。

致 谢

感谢所有评审专家提出的宝贵意见和建议。

基金项目

内蒙古自治区高等教育学会重点课题(NMGJXH-2022XF002); 呼和浩特民族学院基本科研业务费专项资金(ZSQNTS202413); 呼和浩特民族学院教改项目(JY23021)。

参考文献

- [1] 谭永基, 蔡志杰, 俞文. 数学模型[M]. 第3版. 上海: 复旦大学出版社, 2019.
- [2] 鲍敬艳, 任洁, 林道荣. 帆船航行最佳路径选取[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(5): 107-113.
- [3] 杜明树. 无人帆船路径规划研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2017.
- [4] 刘如磊, 黄朝明, 安云圣, 等. 帆船最小回转直径下风帆攻角研究[J]. 计算机应用与软件, 2022, 39(8): 76-81.
- [5] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 50-52.