Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(9), 4253-4265**
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139406

一类格上Lotka-Volterra合作系统受迫行波解的存在性

吴振宇

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2024年8月14日；录用日期：2024年9月7日；发布日期：2024年9月18日

摘　要

为了描述移动环境轻度恶化对两个弱合作物种的持久性产生的影响，本文考虑一类带有与时空均相关的恒正内禀增长函数的格上Lotka-Volterra合作系统。通过构造合适的上下解并结合单调迭代的方法证明了系统存在两组受迫行波解。

关键词

Lotka-Volterra合作系统，移动环境，受迫行波

Existence of Forced Traveling Waves for a Class of the Lattice Lotka-Volterra Cooperative System

Zhenuyu Wu

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Aug. 14th, 2024; accepted: Sep. 7th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

In order to characterize the effect of mild deterioration of the shifting environment on the two weakly cooperative species persistence, we consider a class of the lattice Lotka-Volterra cooperative systems with a constant positive intrinsic growth function that is spatio-temporally correlated. By constructing suitable upper and slower solutions combined with the method of monotone iteration, we prove that there exist two sets of forced traveling wave solutions for the system.

文章引用: 吴振宇. 一类格上 Lotka-Volterra 合作系统受迫行波解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4253-4265.
DOI: 10.12677/aam.2024.139406

Keywords

Lotka-Volterra Cooperative System, Shifting Environment, Forced Travelling Wave

1. 引言

近几十年来，由于全球变暖引起的气候持续恶化，使得地球生态圈受到了严重影响[1]。反应扩散方程作为研究空间生态学的一种重要工具，通过研究其行波解，可以用来刻画各种生物、物理现象，有着较强的实际意义[2] [3]。特别地，Berestycki 通过建立如下模型探究了气候变化对单个物种的扩散影响[4]：

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+f(x-ct,u),\quad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中 $u(t,x)$ 表示物种 u 在 t 时刻位置 x 处的种群密度， $d>0$ 表示扩散系数， $f(x-ct,u)$ 表示物种的生长和种群密度 u 以及环境移动速度 c 有关。文[4]证明了当环境迁移速度很快时，物种将会灭绝。在此之后，许多学者通过考虑方程(1.1)及其推广形式探究了不同情形下单个物种的动力学行为[5]-[14]。在自然界生态系统中，物种间普遍存在着合作、竞争、捕食等关系，一个自然的问题是，受种间关系影响时，物种能否在栖息地中持久生存？最近，Yang 和 Wu 等人通过建立如下 Lotka-Volterra 合作系统研究了当环境严重恶化时两个合作物种的动力学行为[15]：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d_1\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)\left[r_1(x-ct)-u(t,x)+a_1 v\right],\\[2ex] \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=d_2\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}+v(t,x)\left[r_2(x-ct)-v(t,x)+a_2 u\right],\end{cases}\quad t\ge 0, x\in\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

其中 $u(t,x),v(t,x)$ 分别表示物种 u,v 在 t 时刻位置 x 处的种群密度； $d_1>0,d_2>0$ 为扩散系数；种群的内禀增长速率 $r_i(t,x):=r_i(x-ct),i=1,2$，反映了栖息地以一个恒正的速度向右移动； a_1,a_2 代表两物种的合作强度。并且有如下假设：

(*A*) $0<a,a,<1$；

(*R*) $r_i(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续非减的有界函数，并且满足 $r_i(-\infty)<0<r_i(+\infty),i=1,2$。

其中条件(*A*)表示两物种为弱合作关系，条件(*R*)包含对 $r_i(\cdot)$ 的两个主要要求：单调性和符号变化。具体来说， $r_i(\cdot)$ 非减表示随着时间的推移，栖息地环境呈恶化趋势。而 $r_i(-\infty)<0<r_i(+\infty),i=1,2$ 表示恶化的程度十分严重。通过构造合适的上下解并结合单调迭代，文[15]证明了对于任意给定的栖息地边缘正速度，系统(1.2)都存在一个非减受迫波，并指出无论栖息地移动的有多慢，由于弱合作关系的存在，两个物种仍将灭绝，此受迫波代表一类波速与栖息地移动速度保持相同的行波。关于系统(1.2)的更多结果可以参考[16] [17] [18]。

注意到系统(1.2)是在连续环境下讨论的，而某些物种的生存环境是由无限多个斑块所组成，例如生活在分散树洞中的松鼠、池塘里的青蛙等。为了更好地描述此情形下物种的扩散过程，需要将系统离散化，即研究格上 Lotka-Volterra 系统。例如，Wang 和 Pan 等人通过建立如下格上 Lotka-Volterra 竞争系统研究了两个竞争物种在移动环境下的传播问题[19]：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d_1\mathrm{N}_2[u](t,x)+u(t,x)\left[r_1(x-ct)-u(t,x)-b_1v\right],\\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=d_2\mathrm{N}_2[v](t,x)+v(t,x)\left[r_2(x-ct)-v(t,x)-b_2u\right],\end{cases}\quad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R},\tag{1.3}$$

其中 $\mathrm{N}_2[W](t,x)=W(x+1,t)-2W(x,t)+W(x-1,t), W=u,v$ 。b_1,b_2 表示两物种间的竞争强度，且 $r_i(\cdot)$ 满足如下假设：

(*R*1) $r_1(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续非增的有界函数且 $r_1(+\infty)<0<r_1(-\infty)$；$r_2(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续非减的有界函数且 $r_2(-\infty)<0<r_2(+\infty)$ 。

这表明两个相互竞争的物种的周围环境的变化是不同的。在此条件下，Wang 和 Pan 通过构造上下解结合单调迭代的方法探究了系统(1.3)的受迫波的存在性以及其间隙形成。随后，Qiao 等人进一步地考虑了此受迫波的渐近行为[20]。对于系统(1.3)在条件*(R)*下的受迫波的研究可以参考[21]-[24]。

值得注意的是，自然界中的某些物种不仅能在优质区域内生存(相对快)，也能在劣质区域内生存(相当慢)，这导致 $r_i(\cdot)$ 还存在下面这种无符号变化的情形：

(*R*+) $r_i(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续非减的有界函数，且 $r_i(+\infty)\ge r_i(-\infty)>0, i=1,2$ 。

这意味着虽然栖息地环境呈恶化趋势，但恶化的程度较低。在此情形下，两个弱合作物种是否能在栖息地内持久生存是一个值得研究的问题。受上述内容启发，本文考虑如下格上 Lotka-Volterra 合作系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d_1\mathrm{N}_2[u](t,x)+u(t,x)\left[r_1(x-ct)-u(t,x)+a_1v\right],\\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=d_2\mathrm{N}_2[v](t,x)+v(t,x)\left[r_2(x-ct)-v(t,x)+a_2u\right],\end{cases}\quad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R},\tag{1.4}$$

且假设条件*(A)*和条件*(R+)*成立。

记系统(1.4)的受迫波为 $(U(\xi),V(\xi)), \xi=x-ct$ ，代入到系统(1.4)中可得

$$\begin{cases}d_1\mathrm{N}_2[U](\xi)+cU'(\xi)+U(\xi)\left[r_1(\xi)-U(\xi)+a_1V(\xi)\right]=0,\\ d_2\mathrm{N}_2[V](\xi)+cV'(\xi)+V(\xi)\left[r_2(\xi)-V(\xi)+a_2U(\xi)\right]=0,\end{cases}\quad \xi\in\mathbb{R},\tag{1.5}$$

其中 $\mathrm{N}_2[W](t,x)=W(\xi+1)-2W(\xi)+W(\xi-1), W=U,V$ 。显然，系统(1.5)的解即为系统(1.4)的受迫波。根据*(A)*和*(R+)*可知，系统(1.5)的极限系统存在两个正平衡点 (k_1,k_2) 和 (l_1,l_2) ，其中

$$k_1=\frac{r_1(+\infty)+a_1r_2(+\infty)}{1-a_1a_2},\quad k_2=\frac{r_2(+\infty)+a_2r_1(+\infty)}{1-a_1a_2},$$
$$l_1=\frac{r_1(-\infty)+a_1r_2(-\infty)}{1-a_1a_2},\quad l_2=\frac{r_2(-\infty)+a_2r_1(-\infty)}{1-a_1a_2}.$$

因此，自然地考虑到系统(1.4)是否存在连接这两个正平衡点的受迫波。具体来说，通过上下解并结合单调迭代的方法可以证明系统(1.4)存在一组非减受迫波，且该受迫波连接这两个正平衡点。进一步地，作如下假设：

(*R**) 存在一个正常数 ς ，使得当 $\xi\to+\infty$ 时，$r_i(+\infty)-r_i(\xi)=o\left(\mathrm{e}^{-\varsigma\xi}\right), i=1,2$ 。

在此附加条件下，通过构造另一组合适的上下解并结合单调迭代可以证明系统(1.4)还存在一组连接 (l_1,l_2) 到 $(0,0)$ 的受迫波。

本文其余部分安排如下：在第二节中给出相关的预备知识，首先根据有序上下解的定义构造先验集并定义一个恰当的积分算子，然后证明该积分算子在先验集上的单调性以及先验集在此积分算子下的不

变性。在第 3 节构造两组合适的有序上下解以及先验集，结合单调迭代和相关分析技巧得到系统(1.4)的两个受迫波的存在性。在第 4 节总结本文，结果表明种群栖息地环境轻微恶化时(即 $r_i(\cdot)>0, i=1,2$)，对于任意给定的栖息地位置，经过足够长时间，该位置上所研究的两弱合作物种都不会灭绝。

2. 预备知识

记 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上全体连续函数所构成的空间，$BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上全体连续有界函数所构成的空间，且被赋以极值范数：

$$\|U\|=\sup_{\xi\in R}|U(\xi)|,$$

同时，定义 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上的正锥 $C^+=\{U\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,U(\xi)\ge 0,\forall\xi\in\mathbb{R}\}$。对于任意的 $U_1,U_2\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，若 $U_1-U_2\in C^+$，我们记为 $U_1\ge U_2$ 或者 $U_2\le U_1$。进一步地，对于任意的 $U=(U_1,U_2),V=(V_1,V_2)\in C\times C$，若 $U_1\ge V_1$ 且 $U_2\ge V_2$，则记 $U\ge V$ 或者 $V\le U$。

下面给出系统(1.5)的有序上下解的定义。

定义 1 设 $(U(\xi),V(\xi))\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\{\xi_j\}_{j=1}^N$ 为一列有限递增点列。若对于任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_j\}$，$(U(\xi),V(\xi))$ 分别满足如下不等式组：

$$\begin{cases}-cU'(\xi)\ge(\le)d_1\left[U(\xi+1)-2U(\xi)+U(\xi-1)\right]+U(\xi)\left[r_1(\xi)-U(\xi)+a_1V(\xi)\right],\\ -cV'(\xi)\ge(\le)d_2\left[V(\xi+1)-2V(\xi)+V(\xi-1)\right]+V(\xi)\left[r_2(\xi)-V(\xi)+a_2U(\xi)\right],\end{cases}$$

则称 $(U(\xi),V(\xi))$ 为系统(1.5)的上(下)解。进一步地，若上解 $(\bar{U}(\xi),\bar{V}(\xi))$ 和下解 $(\underline{U}(\xi),\underline{V}(\xi))$ 满足 $(\bar{U}(\xi),\bar{V}(\xi))\ge(\underline{U}(\xi),\underline{V}(\xi))$，则称 $(\bar{U}(\xi),\bar{V}(\xi))$ 和 $(\underline{U}(\xi),\underline{V}(\xi))$ 为系统(1.5)的一对有序上下解。

根据此定义构造如下非空集合：

$$\Omega:=\left\{(U,V)\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\times BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,(\underline{U},\underline{V})\le(U,V)\le(\bar{U},\bar{V})\right\}. \tag{2.1}$$

再取参数

$$\mu_1=\max\left\{2d_1+2\max_{\xi\in\mathbb{R}}\bar{U}(\xi),c\rho+1\right\},\quad \mu_2=\max\left\{2d_2+2\max_{\xi\in\mathbb{R}}\bar{V}(\xi),c\rho+1\right\},$$

以及定义算子

$$H_1(U,V)(\xi)=\mu_1U(\xi)+d_1\left[U(\xi+1)-2U(\xi)+U(\xi-1)\right]+U(\xi)\left[r_1(\xi)-U(\xi)+a_1V(\xi)\right],$$

$$H_2(U,V)(\xi)=\mu_2V(\xi)+d_2\left[V(\xi+1)-2V(\xi)+V(\xi-1)\right]+V(\xi)\left[r_2(\xi)-V(\xi)+a_2U(\xi)\right].$$

容易验证如下方程组的解即为系统(1.5)的解。

$$\begin{cases}U(\xi)=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}H_1(U,V)(s)\,ds,\\ V(\xi)=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_2}{c}(s-\xi)}H_2(U,V)(s)\,ds.\end{cases} \tag{2.2}$$

进一步地，定义算子 $F(U,V)(\xi)=(F_1(U,V)(\xi),F_2(U,V)(\xi))$，其中

$$F_i(U,V)(\xi)=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_i}{c}(s-\xi)}H_i(U,V)(s)\,ds,\quad i=1,2. \tag{2.3}$$

显然，算子 F 在 Ω 中的不动点即为系统(1.5)的解。

为了运用单调迭代，我们首先通过如下引理说明算子 F 的一些性质。

引理 1 下列结论成立：

(i) 当 $(U,V)\in\Omega$ 时，F 是一个非减算子；

(ii) 若 $(U(\xi),V(\xi))\in\Omega$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 非减，则 $F(U,V)(\xi)$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 也非减；

(iii) $F(\Omega)\subseteq\Omega$。

证明. (i)令 $(\tilde{U},\tilde{V}),(\hat{U},\hat{V})\in\Omega$ 并且满足 $(\tilde{U},\tilde{V})\geq(\hat{U},\hat{V})$，则对于任意的 $\xi\in\mathbb{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
&H_1(\tilde{U},\tilde{V})(\xi)-H_1(\hat{U},\hat{V})(\xi)\\
&=\mu_1\left[\tilde{U}(\xi)-\hat{U}(\xi)\right]+d_1\left\{\left[\tilde{U}(\xi+1)-2\tilde{U}(\xi)+\tilde{U}(\xi-1)\right]-\left[\hat{U}(\xi+1)-2\hat{U}(\xi)+\hat{U}(\xi-1)\right]\right\}\\
&\quad+\tilde{U}(\xi)\left[r_1(\xi)-\tilde{U}(\xi)+a_1\tilde{V}(\xi)\right]-\hat{U}(\xi)\left[r_1(\xi)-\hat{U}(\xi)+a_1\hat{V}(\xi)\right]\\
&=\left[\mu_1-2d_1-\tilde{U}(\xi)-\hat{U}(\xi)+r_1(\xi)\right]\left[\tilde{U}(\xi)-\hat{U}(\xi)\right]\\
&\quad+d_1\left\{\left[\tilde{U}(\xi+1)-\hat{U}(\xi+1)\right]+\left[\tilde{U}(\xi-1)-\hat{U}(\xi-1)\right]\right\}+a_1\left[\tilde{U}(\xi)\tilde{V}(\xi)-\hat{U}(\xi)\hat{V}(\xi)\right]\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

以及 $H_2(\tilde{U},\tilde{V})(\xi)-H_2(\hat{U},\hat{V})(\xi)\geq 0$，再根据 F_1 和 F_2 的定义可知

$$
F_i(\tilde{U},\tilde{V})(\xi)-F_i(\hat{U},\hat{V})(\xi)=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_i}{c}(s-\xi)}\left[H_i(\tilde{U},\tilde{V})(s)-H_i(\hat{U},\hat{V})(s)\right]ds\geq 0,\ i=1,2.
$$

因此 F 是一个非减算子。

(ii) 假设 $(U(\xi),V(\xi))\in\Omega$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 非减，那么对于任意的 $\varepsilon>0$ 以及任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，有

$$
\begin{aligned}
&H_1(U,V)(\xi+\varepsilon)-H_1(U,V)(\xi)\\
&=\mu_1\left[U(\xi+\varepsilon)-U(\xi)\right]+U(\xi+\varepsilon)\left[r_1(\xi)-U(\xi+\varepsilon)+a_1V(\xi+\varepsilon)\right]-U(\xi)\left[r_1(\xi)-U(\xi)+a_1V(\xi)\right]\\
&\quad+d_1\left\{\left[U(\xi+\varepsilon+1)-2U(\xi+\varepsilon)+U(\xi+\varepsilon-1)\right]-\left[U(\xi+1)-2U(\xi)+U(\xi-1)\right]\right\}\\
&=\left[\mu_1-2d_1-U(\xi+\varepsilon)-U(\xi)\right]\left[U(\xi+\varepsilon)-U(\xi)\right]\\
&\quad+d_1\left\{\left[U(\xi+\varepsilon+1)-U(\xi+1)\right]+\left[U(\xi+\varepsilon-1)-U(\xi-1)\right]\right\}\\
&\quad+U(\xi+\varepsilon)r_1(\xi+\varepsilon)-U(\xi)r_1(\xi)\\
&\quad+a_1\left[U(\xi+\varepsilon)V(\xi+\varepsilon)-U(\xi)V(\xi)\right]\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

以及 $H_2(U,V)(\xi+\varepsilon)-H_2(U,V)(\xi)\geq 0$，进而得到

$$
\begin{aligned}
F_i(U,V)(\xi+\varepsilon)&=\frac{1}{c}\int_{\xi+\varepsilon}^\infty e^{-\frac{\mu_i}{c}(s-\xi-\varepsilon)}H_i(U,V)(s)ds\\
&=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_i}{c}(s-\xi)}H_i(U,V)(s+\varepsilon)ds\\
&\geq\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_i}{c}(s-\xi)}H_i(U,V)(s)ds=F_i(U,V)(\xi),\quad i=1,2,
\end{aligned}
$$

则 $F(U,V)(\xi)$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 非减。

(iii) 记 $(\bar{U}(\xi),\bar{V}(\xi))$ 和 $(\underline{U}(\xi),\underline{V}(\xi))$ 为系统(1.5)的一对有序上下解，那么由上解及 F 的定义可知

$$
\begin{aligned}
F_1(\bar{U},\bar{V})(\xi) &= \frac{1}{c}\int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)} H_1(\bar{U},\bar{V})(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{c}\left(\int_{\xi}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \cdots + \int_{\xi_N}^{\infty}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)} H_1(\bar{U},\bar{V})(s)\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{c}\left(\int_{\xi}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \cdots + \int_{\xi_N}^{\infty}\right) \left[-c\bar{U}'(s) + \mu_1\bar{U}(s)\right] \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}\mathrm{d}s \\
&= \bar{U}(\xi)
\end{aligned}
$$

以及 $F_2(\bar{U},\bar{V})(\xi) = \frac{1}{c}\int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mu_2}{c}(s-\xi)} H_2(\bar{U},\bar{V})(s)\mathrm{d}s \le \bar{V}(\xi)$，这表示 $F(\bar{U},\bar{V}) \le (\bar{U},\bar{V})$。类似地，由下解以及 F 的定义可知

$$
\begin{aligned}
F_1(\underline{U},\underline{V})(\xi) &= \frac{1}{c}\int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)} H_1(\underline{U},\underline{V})(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{c}\left(\int_{\xi}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \cdots + \int_{\xi_N}^{\infty}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)} H_1(\underline{U},\underline{V})(s)\mathrm{d}s \\
&\ge \frac{1}{c}\left(\int_{\xi}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \cdots + \int_{\xi_N}^{\infty}\right) \left[-c\underline{U}'(s) + \mu_1\underline{U}(s)\right] \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}\mathrm{d}s \\
&= \underline{U}(\xi)
\end{aligned}
$$

以及 $F_2(\underline{U},\underline{V})(\xi) \ge \underline{V}(\xi)$，这表示 $(\underline{U},\underline{V}) \le F(\underline{U},\underline{V})$。注意到 $F(U,V)$ 是一个非减函数，因此对于任意的 $(U,V) \in \Omega$ 都有

$$
(\underline{U},\underline{V}) \le F(\underline{U},\underline{V}) \le F(U,V) \le F(\bar{U},\bar{V}) \le (\bar{U},\bar{V}), \tag{2.4}
$$

从而可知 $F(\Omega) \subseteq \Omega$。证毕。

3. 主要结果

3.1. 上下解的构造

由于上述引理的结论是在先验集 Ω 的前提下得到的，且系统(1.4)的受迫波的边界条件也依赖于此先验集。所以下面构造系统(1.5)的两对有序上下解以便定义两个合适的先验集。

经过直接计算可得如下引理：

引理 2 令 $(\bar{U}_1(\xi),\bar{V}_1(\xi)) = (k_1,k_2)$，$(\underline{U}_1(\xi),\underline{V}_1(\xi)) = (l_1,l_2)$，则 $(\bar{U}_1(\xi),\bar{V}_1(\xi))$ 和 $(\underline{U}_1(\xi),\underline{V}_1(\xi))$ 是系统(1.5)的一对有序上下解。

接下来构造另外一对有序上下解。

引理 3 定义函数 $\theta_i(c,\lambda) = d_i\left(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2\right) + r_i(+\infty) - c\lambda, i = 1,2$。令

$c_i^*(\infty) := \min\limits_{\lambda>0} \dfrac{d_i\left(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2\right) + r_i(+\infty)}{\lambda},\ \ i = 1,2$；

$\hat{c}^*(\infty) := \max\left\{c_1^*(\infty), c_2^*(\infty)\right\}$；

$\bar{c}^*(\infty) := \min\left\{c_1^*(\infty), c_2^*(\infty)\right\}$.

根据函数的凸性，容易推出如下情形成立：

(i) 当 $c = c_i^*(\infty), i = 1,2$ 时，$\theta_i(c,\lambda) = 0$ 存在正根 $\lambda_i^*(\infty), i = 1,2$；

(ii) 当 $c > \hat{c}^*(\infty)$ 时，$\theta_1(c,\lambda)$ 和 $\theta_2(c,\lambda)$ 分别有两个不同正根 λ_1,λ_3 和 λ_2,λ_4，且满足

$$\theta_1(c,\lambda)=\begin{cases}<0, & \lambda\in(\lambda_1,\lambda_3)\\ >0, & \lambda\in[0,\lambda_1)\cup(\lambda_3,+\infty)\end{cases},\quad \theta_2(c,\lambda)=\begin{cases}<0, & \lambda\in(\lambda_2,\lambda_4)\\ >0, & \lambda\in[0,\lambda_2)\cup(\lambda_4,+\infty)\end{cases};$$

(iii) 当 $c<\overline{c}^*(\infty)$ 时，$\theta_i(c,\lambda)=0, i=1,2$ 无实数根。

假设 $\Lambda:=(\lambda_1,\lambda_3)\cap(\lambda_2,\lambda_4)$ 非空，则存在 $\gamma\in\Lambda$ 并且满足 $\lambda_1+\lambda_2>\gamma$。那么，对任意的 $c>c_i^*(\infty)$，有 $\theta_i(c,\lambda)<0, i=1,2$。需要注意的是，集合 Λ 非空在许多情形下都会成立，我们在此说明当 c 比较大的时候假设成立。不妨设 $\lambda_2>\lambda_1$，根据 $\theta_1(c,\lambda_1)=0$ 可知

$$\begin{aligned}\theta_1(c,\lambda_2)&=d_1\left(\mathrm{e}^{\lambda_2}+\mathrm{e}^{-\lambda_2}-2\right)+r_1(+\infty)-c\lambda_2\\&=d_1\left(\mathrm{e}^{\lambda_2}+\mathrm{e}^{-\lambda_2}-2\right)-d_1\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\lambda_1}-2\right)-c(\lambda_2-\lambda_1)\end{aligned}$$

这表示当 c 充分大时，$\theta_1(c,\lambda_2)<0$，根据引理 3 可知集合 Λ 非空。此外，由于 $\lambda_1+\lambda_2>\gamma$ 以及 $\theta_i(c,\lambda)<0, i=1,2$，所以存在充分大的正数 ξ_1,ξ_2 分别满足

$$\begin{aligned}&k_1\theta_1(c,\gamma)+a_1k_1\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi_1}+a_1\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1-\gamma)\xi_1}=0,\\&k_2\theta_2(c,\gamma)+a_2k_2\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi_2}+a_2\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1-\gamma)\xi_2}=0.\end{aligned}$$

由此定义两个连续函数：

$$\bar{U}_2(\xi):=\min\left\{k_1,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right\},\ \bar{V}_2(\xi):=\min\left\{k_2,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}+qk_2\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right\}.$$

其中 $q>1$ 充分大使得 $k_i\le\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi_i}+qk_i\mathrm{e}^{-\gamma\xi_i}, i=1,2$。

根据引理 3 和条件(*R**)可知，存在充分大的常数 L 以及常数 $\eta\in\left(0,\lambda_i^*(\infty)-\lambda_i\right), i=1,2$，使得当 $\xi\ge L$ 时，

$$r_i(+\infty)-r_i(\xi)\le\mathrm{e}^{-\zeta\xi}\le\mathrm{e}^{-\eta\xi},\ i=1,2,$$

并且当 $c>\hat{c}^*(\infty)$ 时，

$$\theta_i(c,\lambda)<0,\ i=1,2.$$

记 $M_i=-\dfrac{2}{\theta_i(c,\lambda_i+\eta)}, i=1,2$，定义两个连续有界函数：

$$\underline{U}_2(\xi)=\begin{cases}\kappa_1, & \xi\le\xi_3\\ \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right), & \xi>\xi_3\end{cases},\quad \underline{V}_2(\xi)=\begin{cases}\kappa_2, & \xi\le\xi_4\\ \mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right), & \xi>\xi_4\end{cases}.$$

其中 $\xi_{i+2}=-\dfrac{\ln r_i(+\infty)}{\lambda_i}$，$\kappa_i:=\mathrm{e}^{-\lambda_i\xi_{i+2}}\left(1-M_i\mathrm{e}^{-\eta\xi_{i+2}}\right)$ 且 ξ_{i+2} 充分大使得 $0<\kappa_i<r_i(-\infty), i=1,2$。

引理 4 假设(*R+*)、(*R**)成立且 $c>\hat{c}^*(\infty)$ 使得 $\Lambda:=(\lambda_1,\lambda_3)\cap(\lambda_2,\lambda_4)$ 非空，则 $\left(\bar{U}_2(\xi),\bar{V}_2(\xi)\right)$ 和 $\left(\underline{U}_2(\xi),\underline{V}_2(\xi)\right)$ 是系统(1.5)的一对有序上下解。

证明. 首先说明 $\bar{U}_2(\xi)$ 在 $R\setminus\xi_1$ 上满足

$$\begin{aligned}-c\bar{U}_2'(\xi)\ge{}&d_1\left[\bar{U}_2(\xi+1)-2\bar{U}_2(\xi)+\bar{U}_2(\xi-1)\right]\\&+\bar{U}_2(\xi)\left[r_1(\xi)-\bar{U}_2(\xi)+a_1\bar{V}_2(\xi)\right],\end{aligned}$$

当 $\bar{U}_2(\xi)=k_1$ 时，不等式显然成立。若 $\bar{U}_2(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}$，意味着 $\xi\ge\xi_1$。根据 $\theta_1(c,\lambda_1)=0$ 以及 $\theta_1(c,\gamma)<0$ 可知

$$
\begin{aligned}
& c\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)'+d_1\left[\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi+1)}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma(\xi+1)}-2\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)+\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi-1)}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma(\xi-1)}\right]\\
& +\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)\left[r_1(\xi)-\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)+a_1\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)\right]\\
& \le c\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)'+d_1\left[\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi+1)}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma(\xi+1)}-2\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)+\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi-1)}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma(\xi-1)}\right]\\
& \quad +\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)\left[r_1(+\infty)-\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)+a_1\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\right)\right]\\
& \le qk_1\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\theta_1(c,\gamma)+a_1\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1)\xi}+a_1qk_1\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\gamma)\xi}\\
& \le \mathrm{e}^{-\gamma\xi}\left[qk_1\theta_1(c,\gamma)+qa_1\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1-\gamma)\xi}+a_1qk_1\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}\right]\\
& = q\mathrm{e}^{-\gamma\xi}\left[k_1\theta_1(c,\gamma)+a_1\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_1-\gamma)\xi}+a_1k_1\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}\right]\\
& = 0,
\end{aligned}
$$

因此$\bar{U}_2(\xi)$在$\mathbb{R}\setminus\xi_1$上满足上解的定义。类似地可推出

$$
-c\bar{V}_2'(\xi)\ge d_1\left[\bar{V}_2(\xi+1)-2\bar{V}_2(\xi)+\bar{V}_2(\xi-1)\right]+\bar{V}_2(\xi)\left[r_2(\xi)-\bar{V}_2(\xi)+a_2\bar{U}_2(\xi)\right]
$$

在$\mathbb{R}\setminus\xi_2$上成立。从而$\left(\bar{U}_2(\xi),\bar{V}_2(\xi)\right)$是系统(1.5)的一组上解。

接下来验证$\underline{U}_2$在$\xi\ne\xi_3$时满足下解的定义。当$\xi>\xi_3$时，由条件*(R*)*结合$\theta_1(c,\lambda_1)=0$可知

$$
\begin{aligned}
& d_1\left[\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi+1)}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta(\xi+1)}\right)-2\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)+\mathrm{e}^{-\lambda_1(\xi-1)}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta(\xi-1)}\right)\right]\\
& +\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)\left[r_1(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)+a_1\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_2\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)\right]\\
& -c\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+cM_1(\lambda_1+\eta)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\eta)\xi}\\
& \ge -M_1\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\eta)\xi}\left[\theta_1(c,\lambda_1+\eta)+r_1(\xi)-r_1(+\infty)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)\right]\\
& \quad +\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[r_1(\xi)-r_1(+\infty)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right)\right]\\
& \ge \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\theta_1(c,\lambda_1+\eta)-\mathrm{e}^{-\eta\xi}-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\right]\\
& \ge \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[-M_1\mathrm{e}^{-\eta\xi}\theta_1(c,\lambda_1+\eta)-2\mathrm{e}^{-\eta\xi}\right]\\
& = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\eta)\xi}\left[-M_1\theta_1(c,\lambda_1+\eta)-2\right]\\
& = 0.
\end{aligned}
$$

当$\xi<\xi_3$时，容易验证$\underline{U}_2(\xi)=\kappa_1$满足下解的定义。类似地可以证明

$$
-c\underline{V}_2'(\xi)\ge d_2\left[\underline{V}_2(\xi+1)-2\underline{V}_2(\xi)+\underline{V}_2(\xi-1)\right]+\underline{V}_2(\xi)\left[r_2(\xi)-\underline{V}_2(\xi)+a_2\underline{U}_2(\xi)\right]
$$

在$\mathbb{R}\setminus\xi_4$上成立。因此$\left(\underline{U}_2(\xi),\underline{V}_2(\xi)\right)$是系统(1.5)的一组下解。

另外通过下解的构造可知$\underline{U}_2\le\min\left\{r_1(+\infty),\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\right\}$和$\underline{V}_2\le\min\left\{r_2(+\infty),\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}\right\}$，从而$\left(\bar{U}_2(\xi),\bar{V}_2(\xi)\right)\ge\left(\underline{U}_2(\xi),\underline{V}_2(\xi)\right)$，所以$\left(\bar{U}_2(\xi),\bar{V}_2(\xi)\right)$和$\left(\underline{U}_2(\xi),\underline{V}_2(\xi)\right)$为系统(1.5)的一对有序上下解。证毕。

最后，根据所构造的上下解定义如下非空集合：

$$
\Omega_1=\left\{(U,V)\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\times BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\middle|\left(\underline{U}_1,\underline{V}_1\right)\le(U,V)\le\left(\bar{U}_1,\bar{V}_1\right)\right\},
$$

$$
\Omega_2=\left\{(U,V)\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\times BC(\mathbb{R},\mathbb{R})\middle|\left(\underline{U}_2,\underline{V}_2\right)\le(U,V)\le\left(\bar{U}_2,\bar{V}_2\right)\right\}.
$$

需要指出的是，将引理 1 中的 Ω 换成$\Omega_i, i=1,2$，引理的结论仍然成立

3.2. 受迫波的存在性

在本节，我们证明系统(1.4)存在两个受迫波。

定理 1 假设(*A*)和(*R*+)成立，则对于任意的$c>0$，系统(1.4)存在一组非减受迫波$\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)$，且满足如下边界条件：

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)=\left(l_1,l_2\right),\ \lim_{\xi\to+\infty}\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)=\left(k_1,k_2\right).$$

证明. 首先根据算子$F(\Omega_1)\subseteq\Omega_1$构造如下迭代：

$$\left(U_1^1,V_1^1\right)=F\left(\bar{U}_1,\bar{V}_1\right),\ \left(U_1^{n+1},V_1^{n+1}\right)=F\left(U_1^n,V_1^n\right),\ n\geq 1,$$

根据引理 1，F 是将Ω_1映射到Ω_1的非减算子，那么有

$$\left(\underline{U}_1,\underline{V}_1\right)\leq\left(U_1^{n+1},V_1^{n+1}\right)\leq\left(U_1^n,V_1^n\right)\leq\left(\bar{U}_1,\bar{V}_1\right),\ n\geq 1,$$

又因为$\bar{U}_1$和$\bar{V}_1$是非减的，结合引理 1 可知，对每个给定的 n，$U_1^n(\xi)$和$V_1^n(\xi)$也是非减的函数。令

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_1^n,V_1^n\right)=\left(U_1,V_1\right),$$

显然(U_1,V_1)是一个非减函数且

$$\left(\underline{U}_1,\underline{V}_1\right)\leq\left(U_1,V_1\right)\leq\left(\bar{U}_1,\bar{V}_1\right).$$

下面我们证明(U_1,V_1)是算子 F 在Ω_1中的不动点。由于$\left(U_1^n,V_1^n\right)$逐点收敛于(U_1,V_1)，根据H_1和H_2的定义可知，$H_1\left(U_1^n,V_1^n\right)$和$H_2\left(U_1^n,V_1^n\right)$分别逐点收敛到$H_1(U_1,V_1)$和$H_2(U_1,V_1)$。此外，对任意的$n\geq 1$都有

$$\left|H_1\left(U_1^n,V_1^n\right)(\xi)\right|\leq k_1\left(\mu+4d_1+r_1(+\infty)+k_1+a_1k_2\right)$$

以及

$$\left|H_2\left(U_1^n,V_1^n\right)(\xi)\right|\leq k_2\left(\mu_2+4d_2+r_2(+\infty)+k_2+a_2k_1\right),$$

根据勒贝格控制收敛定理可知

$$\begin{aligned}U_1(\xi)&=\lim_{n\to+\infty}U_1^n(\xi)=\lim_{n\to+\infty}F_1\left(U_1^n(\xi),V_1^n(\xi)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}H_1\left(U_1^{n-1},V_1^{n-1}\right)(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}H(U_1,V_1)(s)\mathrm{d}s=F_1(U_1,V_1)(\xi),\end{aligned}$$

类似地，$V_1(\xi)=F_2(U_1,V_1)(\xi)$。因此$\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)$是算子 F 在Ω_1中的不动点，即为系统(1.5)的解。

下面证明$\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)$满足相应的边界条件。因为$U_1(\xi)$和$V_1(\xi)$是$\mathbb{R}$上的单调有界函数，所以存在常数$A_1,A_2,B_1,B_2$满足

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)=\left(A_1,A_2\right),\ \lim_{\xi\to+\infty}\left(U_1(\xi),V_1(\xi)\right)=\left(B_1,B_2\right),$$

运用 L'Hôpital 法则进行简单计算可知

$$\begin{aligned}A_1&=\lim_{\xi\to-\infty}U_1(\xi)=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)}H_1(U_1,V_1)(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{c}\lim_{\xi\to-\infty}\frac{cH_1(U_1,V_1)(\xi)}{\mu_1}=A_1+\frac{A_1\left[r_1(-\infty)-A_1+a_1A_2\right]}{\mu_1},\end{aligned}$$

以及

$$A_2 = A_2 + \frac{A_2\left[r_2(-\infty) - A_2 + a_2 A_1\right]}{\mu_2},$$

又 $\left(U_1(\xi), V_1(\xi)\right) \in \Omega_1$，所以 $0 < l_1 \le A_1 \le k_1$，$0 < l_2 \le A_2 \le k_2$，因此 $\begin{cases} A_1 = l_1 \\ A_2 = l_2 \end{cases}$。

类似地可得

$$B_1 = \lim_{\xi\to+\infty} V_1(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{1}{c}\int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mu_1}{c}(s-\xi)} H_1(U_1,V_1)(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\lim_{\xi\to+\infty} \frac{cH_1(U_1,V_1)(\xi)}{\mu_1} = B_1 + \frac{B_1\left[r_1(+\infty) - B_1 + a_1 B_2\right]}{\mu_1},$$

以及 $B_2 = B_2 + \dfrac{B_2\left[r_2(+\infty) - B_2 + a_2 B_1\right]}{\mu_2}$。又 $\left(U_1(\xi), V_1(\xi)\right) \in \Omega_1$，所以 $0 < B_1 \le k_1$，$0 < B_2 \le k_2$。故 $\begin{cases} B_1 = k_1 \\ B_2 = k_2 \end{cases}$。

证毕。

定理 2 假设(A)、(R+)、(R*)成立，并且 $c > \hat{c}^*(\infty)$ 使得 $\Lambda := (\lambda_1, \lambda_3) \cap (\lambda_2, \lambda_4)$ 非空，则系统(1.4)存在一个非负受迫波，且满足如下边界条件，

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) = (l_1, l_2), \quad \lim_{\xi\to+\infty}\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) = (0,0).$$

证明. 类似于定理 1 的证明过程并结合引理 4，容易得到存在 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) \in \Omega_2$ 使得

$$F(U_2, V_2)(\xi) = \left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right),$$

即 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right)$ 为系统(1.4)的解。此外，由 $\left(\underline{U}_2(\xi), \underline{V}_2(\xi)\right) \ge (0,0)$ 可知 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right)$ 是非负的。

接着我们证明 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right)$ 的相应边界条件。首先根据 $\left(\bar{U}_2(\xi), \bar{V}_2(\xi)\right)$ 和 $\left(\underline{U}_2(\xi), \underline{V}_2(\xi)\right)$ 的定义可知：

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left(\underline{U}_2(\xi), \underline{V}_2(\xi)\right) = (0,0), \quad \lim_{\xi\to+\infty}\left(\bar{U}_2(\xi), \bar{V}_2(\xi)\right) = (0,0),$$

又 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) \in \Omega_2$，因此

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) = (0,0).$$

最后我们验证 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) = (l_1, l_2)$。令

$$C_1 = \lim_{\xi\to-\infty}\sup U_2(\xi),\ D_1 = \lim_{\xi\to-\infty}\sup V_2(\xi),\ C_2 = \lim_{\xi\to-\infty}\inf U_2(\xi),\ D_2 = \lim_{\xi\to-\infty}\inf V_2(\xi).$$

根据 $\left(U_2(\xi), V_2(\xi)\right) \in \Omega_2$ 可知，$\min\{r_1(-\infty), r_2(-\infty)\} < C_i, D_i \le \max\{k_1, k_2\}, i = 1,2$。从而根据波动引理[25]，存在一列满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = -\infty$ 的序列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_n = -\infty$ 的序列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} U_2(\sigma_n) = C_1,\ \lim_{n\to+\infty} V_2(\sigma_n) = D_1,\ \lim_{n\to+\infty} U_2(\tau_n) = C_2,\ \lim_{n\to+\infty} V_2(\tau_n) = D_2,$$

以及

$$\lim_{n\to+\infty} U_2'(\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} U_2'(\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} V_2'(\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} V_2'(\tau_n) = 0.$$

根据系统(1.5)可得

$$\begin{cases} -cU_2'(\sigma_n) = d_1\left[U_2(\sigma_n+1) - 2U_2(\sigma_n) + U_2(\sigma_n-1)\right] + U_2(\sigma_n)\left[r_1(\xi) - U_2(\sigma_n) + a_1 V_2(\sigma_n)\right], \\ -cV_2'(\sigma_n) = d_2\left[V_2(\sigma_n+1) - 2V_2(\sigma_n) + V_2(\sigma_n-1)\right] + V_2(\sigma_n)\left[r_2(\xi) - V_2(\sigma_n) + a_2 U_2(\sigma_n)\right], \end{cases}$$

和

$$\begin{cases}-cU_2'(\tau_n)=d_1\left[U_2(\tau_n+1)-2U_2(\tau_n)+U_2(\tau_n-1)\right]+U_2(\tau_n)\left[r_1(\xi)-U_2(\tau_n)+a_1V_2(\tau_n)\right],\\-cV_2'(\tau_n)=d_2\left[V_2(\tau_n+1)-2V_2(\tau_n)+V_2(\tau_n-1)\right]+V_2(\tau_n)\left[r_2(\xi)-V_2(\tau_n)+a_2U_2(\tau_n)\right],\end{cases}$$

令上述的每个等式中的 $n\to+\infty$，并且对第一个等式组中的两个等式的两边同时取上极限以及对第二个等式组中的两个等式的两边同时取下极限可得

$$\begin{cases}0\le C_1\left[r_1(-\infty)-C_1+a_1D_1\right]\\0\le D_1\left[r_2(-\infty)-D_1+a_2C_1\right]\end{cases}\text{和}\begin{cases}0\ge C_2\left[r_1(-\infty)-C_2+a_1D_2\right]\\0\ge D_2\left[r_2(-\infty)-D_2+a_2C_2\right]\end{cases}.$$

又因为 $C_i,D_i>\min\{r_1(-\infty),r_2(-\infty)\}>0, i=1,2$，且 $C_1\ge C_2, D_1\ge D_2$，

所以

$$\begin{cases}r_1(-\infty)-C_2+a_1D_2\le r_1(-\infty)-C_1+a_1D_1,\\r_2(-\infty)-D_2+a_2C_2\le r_2(-\infty)-D_1+a_2C_1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}C_1-C_2\le a_1(D_1-D_2),\\D_1-D_2\le a_2(C_1-C_2),\end{cases}$$

不难发现，该不等式组仅存在以下两种情况：

(i) $C_1=C_2$ 且 $D_1=D_2$。此时，不等式组显然成立，并且有

$$\begin{cases}r_1(-\infty)-C_1+a_1D_1=0\\r_2(-\infty)-D_1+a_2C_1=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}r_1(-\infty)-C_2+a_1D_2=0\\r_2(-\infty)-D_2+a_2C_2=0\end{cases}.$$

计算可知

$$\begin{cases}C_1=C_2=l_1,\\D_1=D_2=l_2.\end{cases}$$

(ii) $C_1\ne C_2$ 且 $D_1\ne D_2$，即 $C_1>C_2, D_1>D_2$。通过计算可得

$$\begin{cases}\dfrac{C_1-C_2}{D_1-D_2}\le a_1,\\[2ex]\dfrac{D_1-D_2}{C_1-C_2}\le a_2,\end{cases}$$

从而可知 $a_1a_2\ge1$，与条件(A)矛盾。

因此 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}(U_2(\xi),V_2(\xi))=(l_1,l_2)$。证毕。

4. 总结

本文探究了一类格上 Lotka-Volterra 合作系统受迫行波解的存在性。通过构造合适的上下解并结合单调迭代的方法证明了系统(1.4)存在两组非负的受迫波，并且根据 $r_i(\cdot)>0, i=1,2$ 以及这两组受迫波在 $-\infty$ 处都趋于 (l_1,l_2) 可知，当栖息地环境轻度恶化时，对于任意给定的栖息地位置，即使经过足够长时间，在该位置上所考虑的两弱合作物种都不会灭绝。此外，本文仅研究了系统(1.4)受迫波的存在性，还可以进

一步考虑其唯一性、稳定性、渐近行为等，以及如何去掉定理 2 中的技术性条件(R^*)，将是后续研究工作的主题。

参考文献

[1] Parmesan, C. (2006) Ecological and Evolutionary Responses to Recent Climate Change. *Annual Review of Ecology*, *Evolution*, *and Systematics*, **37**, 637-669. https://doi.org/10.1146/annurev.ecolsys.37.091305.110100

[2] 楼元. 空间生态学中的一些反应扩散方程模型[J]. 中国科学: 数学, 2015(10): 1619-1634.

[3] Fang, J., Lou, Y. and Wu, J. (2016) Can Pathogen Spread Keep Pace with Its Host Invasion? *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **76**, 1633-1657. https://doi.org/10.1137/15m1029564

[4] Li, B., Bewick, S., Shang, J. and Fagan, W.F. (2014) Persistence and Spread of a Species with a Shifting Habitat Edge. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **74**, 1397-1417. https://doi.org/10.1137/130938463

[5] Hu, C. and Li, B. (2015) Spatial Dynamics for Lattice Differential Equations with a Shifting Habitat. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1967-1989. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.025

[6] Hu, H. and Zou, X. (2017) Existence of an Extinction Wave in the Fisher Equation with a Shifting Habitat. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 4763-4771. https://doi.org/10.1090/proc/13687

[7] Berestycki, H. and Fang, J. (2018) Forced Waves of the Fisher-KPP Equation in a Shifting Environment. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2157-2183. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.016

[8] Hu, H., Yi, T. and Zou, X. (2019) On Spatial-Temporal Dynamics of a Fisher-KPP Equation with a Shifting Environment. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 213-221. https://doi.org/10.1090/proc/14659

[9] Qiao, S., Li, W. and Wang, J. (2022) Multi-type Forced Waves in Nonlocal Dispersal KPP Equations with Shifting Habitats. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **505**, Article ID: 125504. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125504

[10] Guo, J., Poh, A.A.L. and Wu, C. (2023) Forced Waves of Saturation Type for Fisher-KPP Equation in a Shifting Environment. *Applied Mathematics Letters*, **140**, Article ID: 108573. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108573

[11] Guo, J., Guo, K. and Shimojo, M. (2024) Uniqueness and Stability of Forced Waves for the Fisher-KPP Equation in a Shifting Environment. *Nonlinear Analysis*, **247**, Article ID: 113607. https://doi.org/10.1016/j.na.2024.113607

[12] Meng, Y., Yu, Z. and Zhang, L. (2024) Existence, Uniqueness and Stability of Forced Waves for Asymptotical KPP Equations with the Nonlocal Dispersal in a Shifting Habitat. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **29**, 2382-2398. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2023182

[13] Hu, H., Yi, T. and Zou, X. (2019) On Spatial-Temporal Dynamics of a Fisher-KPP Equation with a Shifting Environment. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 213-221. https://doi.org/10.1090/proc/14659

[14] Yi, T., Chen, Y. and Wu, J. (2020) Asymptotic Propagations of Asymptotical Monostable Type Equations with Shifting Habitats. *Journal of Differential Equations*, **269**, 5900-5930. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.04.025

[15] Yang, Y., Wu, C. and Li, Z. (2019) Forced Waves and Their Asymptotics in a Lotka-Volterra Cooperative Model under Climate Change. *Applied Mathematics and Computation*, **353**, 254-264. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.01.058

[16] Yuan, Y., Wang, Y. and Zou, X. (2019) Spatial Dynamics of a Lotka-Volterra Model with a Shifting Habitat. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **24**, 5633-5671.

[17] Wu, C. and Xu, Z. (2021) Propagation Dynamics in a Heterogeneous Reaction-Diffusion System under a Shifting Environment. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **35**, 493-521. https://doi.org/10.1007/s10884-021-10018-0

[18] Wang, H., Pan, C. and Ou, C. (2021) Existence, Uniqueness and Stability of Forced Waves to the Lotka-Volterra Competition System in a Shifting Environment. *Studies in Applied Mathematics*, **148**, 186-218. https://doi.org/10.1111/sapm.12438

[19] Wang, H., Pan, C. and Ou, C. (2020) Existence of Forced Waves and Gap Formations for the Lattice Lotka-Volterra Competition System in a Shifting Environment. *Applied Mathematics Letters*, **106**, Article ID: 106349. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106349

[20] Qiao, S., Zhu, J. and Wang, J. (2021) Asymptotic Behaviors of Forced Waves for the Lattice Lotka-Volterra Competition System with Shifting Habitats. *Applied Mathematics Letters*, **118**, Article ID: 107168. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107168

[21] Meng, Y., Yu, Z. and Zhang, S. (2021) Spatial Dynamics of the Lattice Lotka-Volterra Competition System in a Shifting Habitat. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **60**, Article ID: 103287. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103287

[22] Zhu, J., Wang, J. and Dong, F. (2022) Spatial Propagation for the Lattice Competition System in Moving Habitats. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 92. https://doi.org/10.1007/s00033-022-01735-7

[23] Guo, J., Guo, K. and Shimojo, M. (2023) Forced Waves for Diffusive Competition Systems in Shifting Environments. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **73**, Article ID: 103880. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103880

[24] Huang, B. and Dai, B. (2024) Spatial Dynamics of a Lattice Lotka-Volterra Competition Model with a Shifting Habitat. *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*, **6**, 161-183.

[25] Wu, J. and Zou, X. (2001) Traveling Wave Fronts of Reaction-Diffusion Systems with Delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **13**, 651-687. https://doi.org/10.1023/a:1016690424892