

一类管状富勒烯图的完美匹配数

杨 瑞*, 苗然然

河南理工大学数学与信息科学学院, 河南 焦作

收稿日期: 2024年8月14日; 录用日期: 2024年9月7日; 发布日期: 2024年9月18日

摘要

富勒烯图是3-连通3-正则平面图, 并且恰好具有12个五边形面, 其余的面都是六边形面。本文研究的富勒烯图是由六个同心的六边形层组成, 两端都由一个六边形以及与这个六边形相邻的六个五边形面构成的顶盖封口。我们把该类富勒烯图称为管状富勒烯图。完美匹配计数在量子化学领域以及统计物理领域中具有广泛的应用, 并且已被证实完美匹配计数问题是一个NP-难的问题。本文主要通过划分、求和以及嵌套递推的方式求出管状富勒烯图的完美匹配数。

关键词

富勒烯图, 管状富勒烯图, 完美匹配, 完美匹配数, 线性递推式

The Number of Perfect Matching of Tubular Fullerene Graphs

Rui Yang*, Ranran Miao

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan

Received: Aug. 14th, 2024; accepted: Sep. 7th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

A fullerene graph is 3-connected cubic planar graph, and has exactly 12 pentagonal faces, the rest of which are hexagonal faces. The fullerene graph studied in this paper is composed of six concentric layers of hexagons, capped on each end by a cap formed by a hexagon and six pentagonal faces adjacent to the hexagon. This kind of fullerene graphs is called tubular fullerene graphs. The problem of counting the number of perfect matching is widely used in the field of quantum chemistry and statistical physics, and it has been proved that the problem of counting the number of perfect matching is NP-hard. In this paper, the number of perfect matching of tubular fullerene graphs is obtained

*通讯作者。

by means of partition, summation and nested recursion.

Keywords

Fullerene Graph, Tubular Fullerene Graph, Perfect Matching, The Number of Perfect Matching, Linear Recursive Formula

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的完美匹配计数问题是一个具有很强应用背景的问题, 主要涉及到量子化学和统计物理领域。在量子化学领域, 完美匹配被称为 Kekulé 结构, 而 Kekulé 结构是描述分子稳定性的一个重要指标; 在统计物理领域, 完美匹配则被称为 Dimer 构型, 而 Dimer 构型是描述在格点模型中粒子分布的一种方式[1] [2]。因此, 研究完美匹配的计数问题不仅有助于理解这些领域的复杂现象, 还可能为实际问题提供理论依据和计算方法。同时, 对图的完美匹配计数问题的研究不仅在实践中具有重要意义, 而且在图论的其它领域也有广泛的应用, 如匹配算法、网络流等领域[3] [4]。

然而, Valiant 证明了即使是二部图的完美匹配计数问题也是 NP-难的[5]。科学家 Kasteleyn 首次提出运用图的 Pfaffian 定向来研究图的完美匹配计数问题[6]。并指出如果图 G 有一个 Pfaffian 定向, 那么其完美匹配数就能在多项式时间内算出。Kasteleyn 的一个经典定理就是证明了所有的平面图都是 Pfaffian 的[7]。利用 Pfaffian 定向的方法, Kasteleyn 得到了平面四角格子和环面格子图完美匹配数的精确表达式[6]。Little 推广了 Kasteleyn 的结果并且证明如果一个图 G 不包含 $K_{3,3}$ 的细分, 则 G 有一个 Pfaffian 定向[8]。尽管有许多等价条件证明图 Pfaffian 定向的存在性[8] [9], 但没有多项式时间算法来检查图 G 的一个给定定向是否为 Pfaffian 定向。Lu 和 Wu 构造了能嵌入到莫比乌斯带, Klein 瓶上的四方形网格的一个 Pfaffian 定向, 并给出了这些图的完美匹配数的显式表达式[10]。运用 Pfaffian 方法还可以简化某些图类的完美匹配数的计算[11]-[13]。Yan 和 Zhang 利用圈 C_4 , 路 P_4 与树的乘积图的 Pfaffian 性得到了一些图的完美匹配数的显式表达式[14]。Propp 介绍了许多关于图的完美匹配计数问题的应用背景及其研究进展[15]。更多相关的内容可以参考文献[16]-[18]。

除了利用 Pfaffian 定向来计算图的完美匹配数外, 还可以利用图自身的特殊结构求其匹配数。比如在 1985 年, 张福基等人研究了树状多六边形(简称为 TPH)的完美匹配数, 得出 TPH 图的完美匹配计数相当于树状苯型蒾位稠合多环芳香体系的 Kekulé 结构计数[19]。在 1997 年, 张和平等人研究四角系统完美匹配数, 证明非基本四角系统的完美匹配数等于一些基本子四角系统完美匹配数的乘积[20]。在 2005 年, 林泓等人研究了若干四角系统的完美匹配计数, 利用组合递推法给出了几类四角系统的完美匹配数的显式表达式[21]。在 2014 年, 唐保祥等人利用划分、求和, 再嵌套递推的方法给出了几类特殊图完美匹配数的显式表达式[22]。马京成等人研究了 3-正则 Halin 图的完美匹配计数问题, 给出了 3-正则 Halin 图的完美匹配数的一个递推公式, 同时, 他们还给出了两类特殊的 Halin 图的完美匹配数下界的计算公式[23]。2023 年, 叶银珠等人利用 Dong 等人给出的偶数条边树的线图完美匹配数的表达式, 得到一类繁星树线图的完美匹配数的最大值和最小值[24] [25]。更多关于完美匹配数的计算问题, 请参考文献[26]-[28]。

富勒烯是一种完全由碳组成的中空分子, 形状有球形, 椭球形, 柱形和管状。而管状富勒烯图就是

两端有封口的单壁碳纳米管或巴基管[29]。富勒烯由于其特殊的机械、物理、化学性能在工程材料、催化、吸附分离、储能器件电极材料等诸多领域得到了广泛应用[30]。在1998年, Došlić研究了富勒烯图的完美匹配数的下界, 证明 n 个顶点的富勒烯图至少有 $n/2+1$ 个完美匹配[31]。在2001年, 张和平等人改进了Došlić等人的结果, 得出 n 个顶点的富勒烯图的完美匹配数的下界为 $\lceil 3(n+2)/4 \rceil$ [32]。在2009年, Kardoš等人利用四色定理得到在一般情况下的具有 n 个顶点且不包含非平凡5-边割的富勒烯图至少有 $2^{(n-380)/61}$ 个完美匹配[33]。在2012年, 鞠阳研究了富勒烯邻接矩阵积和式的界估计结果及其与富勒烯完美匹配数之间的定量关系, 得出富勒烯完美匹配数的一个新的下界估计: $2^{n/14.46-11/6}$ [34]。在2016年, 王芳研究了富勒烯图完美匹配数和共振型个数的比较, 得出对所有的富勒烯图, 富勒烯图中共振型个数严格小于完美匹配个数[35]。后来在2020年, 钱进研究了富勒烯的完美匹配数的下界及其稳定性, 得出比之前更优的富勒烯的完美匹配数的下界估计[36]。Lovász和Plummer曾经提出一个关于图的完美匹配计数问题的一个猜想: 任意2-边连通3-正则图都有指数多个完美匹配[37]。Esperet等人在2011年证明了 n 个顶点的2-边连通3-正则图至少有 $2^{n/3656}$ 个完美匹配[38], 从而解决了Lovász和Plummer提出的猜想。

本文研究的管状富勒烯图是由六个同心的六边形层组成, 两端都由一个六边形以及与这个六边形相邻的六个五边形面构成的顶盖封口, 记作 F 。本文证明了以下结果, 验证了Lovász和Plummer猜想的正确性。

定理 1 对于管状富勒烯图 F , F 的完美匹配数为 $\left[2 + (2 + \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}} + (2 - \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}}\right] \left(2^{\frac{s+12}{12}} + 1\right)$ (其中 s 为

F 的顶点数)。

本文的结构安排如下: 第一部分, 介绍了完美匹配计数问题的研究背景, 研究进展, 富勒烯的完美匹配数的研究进展, 以及本文的主要结论。第二部分为准备工作, 给出本文需要用的一些符号和概念。第三部分, 利用图的结构和递推公式证明本文主要结论。

2. 准备工作

设 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是图 G 的**顶点集**和**边集**, 分别用 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 表示图 G 的顶点集和边集的个数。设 $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$, 如果 $e \in E(G)$, 通过从 G 中删除 e 而保持顶点和其余边不变来获得一个 $m-1$ 条边的图, 得到的图用 $G \setminus e$ 表示。类似地, 如果 $v \in V(G)$, 通过从 G 中删除顶点 v 以及所有与 v 关联的边来得到一个 $n-1$ 个顶点的图, 得到的图用 $G - v$ 表示。对 $H \subseteq V(G) \cup E(G)$, 设 $G - H$ 是通过从 G 中删除在 H 中的元素而获得的**子图**。

图 G 的**途径**是指一个点边交替序列 $W = v_0 e_1 v_1 \cdots e_i v_i \cdots e_{k-1} v_{k-1} e_k v_k$, 其中 $e_i = v_{i-1} v_i$ 是图的一条边($1 \leq i \leq k$), 称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条**途径**, 或一条 (v_0, v_k) **途径**。顶点 v_0, v_k 分别称为 W 的**起点**和**终点**, 而 $v_1, \dots, v_i, \dots, v_{k-1}$ 称为 W 的**内部顶点**, W 中的边数 k 称为 W 的**长度**。若 $v_0 = v_k$, 则 W 称为**闭途径**。若途径 W 中, $e_1, \dots, e_i, \dots, e_k$ 互不相同, 则 W 称为**迹**。若 $v_0 = v_k$, 则 W 称为**闭迹**。若在迹 W 中, $v_0, \dots, v_i, \dots, v_k$ 互不相同, 则 W 称为一条**路**。 $v_0 = v_k$ 的路称为一个**圈**, 记为 $C = v_0 v_1 \cdots v_i \cdots v_{k-1} v_k$ 。长度为奇数的圈称为**奇圈**, 长度为偶数的圈称为**偶圈**。

对于一个图 G , 如果能将图 G 边不相交(除端点处相交)的画在平面上, 则称图 G 是**可平面图**, 这个画出的无边相交的图称作图 G 的**平面嵌入图**。 G 的平面嵌入图将平面划分为若干连通的闭区域。这些闭区域称为 G 的**面**。有限的区域称为**有限面**或**内部面**, 无限的区域称为**无限面**或**外部面**, 包围面的边称为该面的**边界**。如果两个面有一条共同的边, 则这两个面**相邻**。一个面与其边界上的顶点和边是**关联的**, 如果 G 是2-连通可平面图, 则 G 的每个面的边界都是圈, 为方便起见, 我们经常用面的边界来代替面。

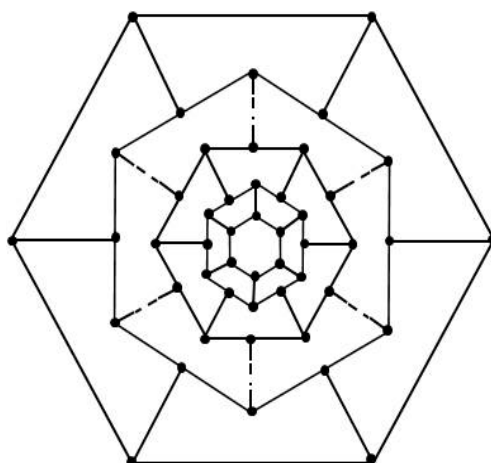


Figure 1. Tubular fullerene graphs F
图 1. 一类管状富勒烯图 F

特别地, 富勒烯图中的五边形面和六边形面分别称为 **5 长圈**和 **6 长圈**。

图 G 的匹配是一组两两不交的边构成的集合。如果 M 是一个匹配, 则称 M 的每条边的两个端点在 M 下**匹配**, 并且与 M 的一条边关联的每个顶点称被 M **覆盖**。一个**完美匹配**是覆盖图的所有顶点的匹配。如果图 G 有两个完美匹配 M_1 和 M_2 , M_1 和 M_2 如果有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是图 G 的**两个不同的完美匹配**。图 G 的完美匹配数就是图 G 的所有不同的完美匹配的数目, 记为 $f(G)$ 。

3. 主要结果及其证明

管状富勒烯图 F 是由同心的六边形层, 两端分别加一个帽子构成, 每个帽子又由一个六边形面以及六个五边形邻面构成, 除了两端的帽子, 其余的每个同心六边形层都由六个相邻的六边形构成(如图 1 所示为该管状富勒烯图的平面嵌入图)。我们对 F 做一些记号, 记 H_0, H_1, \dots, H_n 为 F 的所有同心层, 这里 H_0 和 H_n 是 F 的最里层和最外层, 都由一个六边形面构成。而 H_1 是和 H_0 相邻的由六个五边形面构成的一层, 即 $H_0 \cup H_1$ 构成一端的帽子, $H_{n-1} \cup H_n$ 构成另一端的帽子, 对于 $2 \leq k \leq n-2$, 六边形层 H_k 与 H_{k-1} 与 H_{k+1} 均相邻, 对 $1 \leq k \leq n$, 我们设 $C_k = H_{k-1} \cap H_k$ 。对 C_k 上的顶点顺时针进行标号 v_i^k ($k=1, 2, \dots, n$), 则 C_1 和 C_n 是 6 长圈, C_2, C_3, \dots, C_{n-1} 是 12 长圈, 且 $C_k = v_1^k v_2^k \cdots v_6^k v_1^k$ ($k=1, n$), $C_k = v_1^k v_2^k \cdots v_{12}^k v_1^k$ ($k=2, 3, \dots, n-1$),

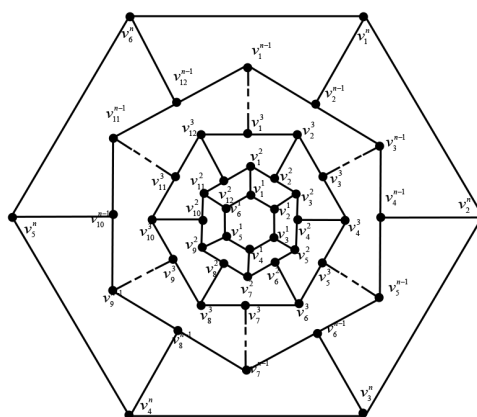


Figure 2. The label of tubular fullerene graphs $F_{12(n-1)}$
图 2. 标号的管状富勒烯图 $F_{12(n-1)}$

如图 2 所示。连接 C_k 和 C_{k+1} 的边称为横跨边(比如 $v_1^1 v_1^2$ 是 C_1 和 C_2 之间的一条横跨边), C_k 和 C_{k+1} 之间的所有横跨边构成集合, 记作 E_k 。

本文中我们都沿用如图 2 所示的对管状富勒烯图 F 的标号, 由于 F 由 $n+1$ 层同心层构成, 故 F 有 $12(n-1)$ 个顶点, 12 个五边形面, $2(3n-8)$ 个六边形面。记该类管状富勒烯图为 $F_{12(n-1)} (n \geq 3)$ 。

定理 1 的证明思路: 设 \mathcal{M} 表示管状富勒烯图 $F_{12(n-1)}$ 的所有完美匹配构成的集合, $|\mathcal{M}|$ 表示所有完美匹配的个数, C_1 和 C_2 之间的横跨边集 $E_1 = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2, v_3^1 v_5^2, v_4^1 v_7^2, v_5^1 v_9^2, v_6^1 v_{11}^2\}$, 因为圈 C_1 上有偶数个点, 所以对于任意一个完美匹配 $M' \in \mathcal{M}$, $|E_1 \cap M'|$ 不可能为奇数, 即 $|E_1 \cap M'|$ 可能取值为 $0, 2, 4, 6$ 。下面我们分别求出在每一种情况下的 $F_{12(n-1)}$ 的完美匹配数, 进而求和得到 $|\mathcal{M}|$ 的大小。

引理 2 设 $\mathcal{M}_1 = \{M' | M' \in \mathcal{M}, |E_1 \cap M'| = 0\}$, 则 $|\mathcal{M}_1| = 2^n$ 。

证明: 对任意的 $M' \in \mathcal{M}$, 当 $|E_1 \cap M'| = 0$ 时, 6 长圈 $C_1 = v_1^1 v_2^1 \cdots v_6^1 v_1^1$ 上的点只能与 C_1 上的点匹配, 则圈 C_1 上的完美匹配要么是 $\{v_1^1 v_2^1, v_3^1 v_4^1, v_5^1 v_6^1\}$, 要么是 $\{v_2^1 v_3^1, v_4^1 v_5^1, v_6^1 v_1^1\}$, 即圈 C_1 上有两种完美匹配。记 $G_{n-1} = F_{12(n-1)} - V(C_1)$ 是从图 $F_{12(n-1)}$ 中删除圈 C_1 上的顶点后获得的子图, 如图 3 所示。

观察图 G_{n-1} , 从 12 长圈 $C_2 = v_1^2 v_2^2 \cdots v_{12}^2 v_1^2$ 上的顶点中选一个 2 度点, 比如 v_1^2 , 则 v_1^2 要么与 v_2^2 匹配, 要么与 v_{12}^2 匹配。当 v_1^2 与 v_2^2 匹配时, C_2 上的完美匹配为 $\{v_1^2 v_2^2, v_3^2 v_4^2, v_5^2 v_6^2, v_7^2 v_8^2, v_9^2 v_{10}^2, v_{11}^2 v_{12}^2\}$; 当 v_1^2 与 v_{12}^2 匹配时, C_2 上的完美匹配为 $\{v_1^2 v_{12}^2, v_2^2 v_{11}^2, v_3^2 v_{10}^2, v_4^2 v_9^2, v_5^2 v_8^2, v_6^2 v_7^2\}$, 则圈 C_2 上也有两种完美匹配。再把从图 G_{n-1} 中删除 C_2 上的点得到的子图, 记作 G_{n-2} 。

对 G_{n-2} 进行类似对 G_{n-1} 的分析, 依此类推, 每个圈 C_k 上都有两种完美匹配, 最后剩一个 6 长圈 $C_n = v_1^n v_2^n \cdots v_6^n v_1^n$, C_n 也有两种完美匹配。则

$$|\mathcal{M}_1| = 2 \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n-1 \text{ 个}} = 2^n \tag{1}$$

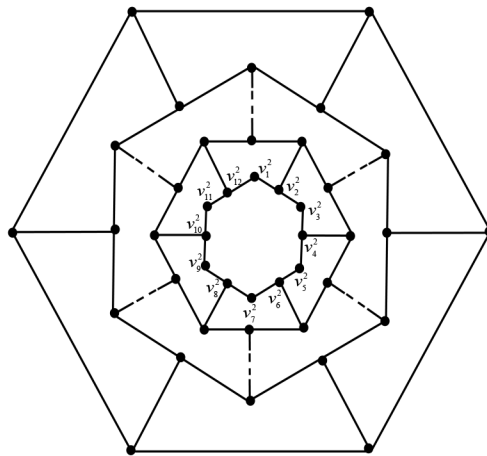


Figure 3. Graphs G_{n-1}

图 3. 图 G_{n-1}

引理 3 记 $\mathcal{M}_2 = \{M' | M' \in \mathcal{M}, |E_1 \cap M'| = 2\}$, 则 $|\mathcal{M}_2| = 1 + 2^n (2 + \sqrt{3})^{n-2} + 2^n (2 - \sqrt{3})^{n-2}$ 。

证明: 对任意的 $M' \in \mathcal{M}_2$, 当 $|E_1 \cap M'| = 2$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2\}$ 或 $\{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2\}$ 或 $\{v_i^1 v_j^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, 当 $l > 6$ 时, $v_l^1 = v_{l-6}^1$; 当 $l > 12$ 时, $v_l^2 = v_{l-12}^2$)。对上述 i, j , 设 $\mathcal{M}_{21} = \{M' \in \mathcal{M}$

$E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2\}$; $\mathcal{M}_{22} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2\}\}$; $\mathcal{M}_{23} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}\}$; 则 $\mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \emptyset (i, j = 1, 2, 3 \text{ 且 } i \neq j)$, $\mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23} = \mathcal{M}_2$ 。故

$$|\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}| + |\mathcal{M}_{23}| \tag{2}$$

设

$$S_2 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^2, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_6^1\},$$

$$S_3 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^1, v_5^2, v_4^1, v_5^1, v_6^1\},$$

$$S_4 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_7^2, v_5^1, v_6^1\},$$

$$K_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_2,$$

$$Q_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_3,$$

$$M_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_4.$$

见图 4, 图 5 所示图 K_{n-1} , Q_{n-1} , M_{n-1} , 记 $f(K_{n-1})$ 为子图 K_{n-1} 的完美匹配的数目, 对 Q_{n-1} , M_{n-1} , 类似。

Claim 3.1 $|\mathcal{M}_{22}| = 0$ 。

证明: 因为 $\mathcal{M}_{22} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2\}\} (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \text{ 当 } t > 6 \text{ 时, } v_i^1 = v_{i-6}^1; \text{ 当 } t > 12 \text{ 时, } v_i^2 = v_{i-12}^2)$ 。所以圈 C_1 上的点 v_{i+1}^1 不可能被 M' 覆盖 ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), 这与 M' 是完美匹配矛盾。比如当 $i = 1, j = 1$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_1^1 v_1^2, v_3^1 v_5^2\}$, 则圈 C_1 上的点 v_2^1 只能与圈 C_2 上的点 v_3^2 匹配, 但是边 $v_2^1 v_3^2 \notin E_1 \cap M'$, 所以圈 C_1 上的点 v_2^1 不可能被 M' 覆盖, 则当 $|E_1 \cap M'| = 2$ 且 $\mathcal{M}_{22} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2\}\}$ 时, $|\mathcal{M}_{22}| = 0$ 。

Claim 3.2 $|\mathcal{M}_{21}| = 6f(K_{n-1})$ 。

证明: 因为 $\mathcal{M}_{21} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2\}\} (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \text{ 当 } t > 6 \text{ 时, } v_i^1 = v_{i-6}^1; \text{ 当 } t > 12 \text{ 时, } v_i^2 = v_{i-12}^2)$ 。当 $i = 1, j = 1$ 时, 即 $E_1 \cap M' = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2\}$, C_1 上剩余四个点 $v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_6^1$ 被 M' 覆盖的方式只有一种, 即 $\{v_3^1 v_4^1, v_5^1 v_6^1\} \subseteq M'$ 。因为 $S_2 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^2, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_6^1\}$, $K_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_2$, 所以此时 $f(F_{12(n-1)}) = f(K_{n-1})$ (如图 4 所示)。

当 $i = 2, j = 3$ 时, 即 $E_1 \cap M' = \{v_2^1 v_3^2, v_3^1 v_5^2\}$, C_1 上剩余四个点 $v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_1^1$ 被 M' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_4^1 v_5^1, v_6^1 v_1^1 \in M'$, 并且从 $F_{12(n-1)}$ 中删除 C_1 上的点及 v_3^2, v_5^2 后获得的子图与 K_{n-1} 同构。因而, 此时 $f(F_{12(n-1)}) = f(K_{n-1})$ 。类似地, 当 $i = 3, 4, 5, 6$ 时, $f(F_{12(n-1)}) = f(K_{n-1})$ 。

综上, 当 $|E_1 \cap M'| = 2$ 且 $\mathcal{M}_{21} = \{M' \in \mathcal{M} | E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2\}\}$ 时, $|\mathcal{M}_{21}| = 6f(K_{n-1})$ 。

Claim 3.3 $f(K_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + 2f(Q_{n-2}) + f(M_{n-2})$ 。

证明: 观察图 K_{n-1} (图 4), 边集 $E_2 = \{v_2^2 v_3^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$, $\mathcal{M}(K_{n-1})$ 为图 K_{n-1} 所有完美匹配构成的集合。对边集 E_2 中是完美匹配边的数目 $|E_2 \cap M''|$ 进行分类, 其中 $M'' \in \mathcal{M}(K_{n-1})$ 。因为圈 C_2 在图 K_{n-1} 上剩余偶数个点, 所以对于任意一个完美匹配 $M'' \in \mathcal{M}(K_{n-1})$, $|E_2 \cap M''|$ 可能取值为 $0, 2, 4, 6$ 。又因 K_{n-1} 有一个悬挂点 v_2^2 (即度为 1 的点), 因而点 v_2^2 必须与点 v_3^3 匹配, 即 $v_2^2 v_3^3 \in E_2 \cap M''$ 。因而 $|E_2 \cap M''| \neq 0$ 。当 $|E_2 \cap M''| = 4$ 或 6 时, 因 $v_2^2 v_3^3 \in E_2 \cap M''$, 所以 E_2 中除 $v_2^2 v_3^3$ 以外剩余的五条边 $v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3$ 中至少有三条边属于 M'' 。当 $v_i^2 v_i^3, v_{i+2}^2 v_{i+2}^3 (i = 4, 6, 8, 10)$ 属于 M'' 时, C_2 上剩余点 v_{i+1}^2 不会被 M'' 覆盖, 与 M''

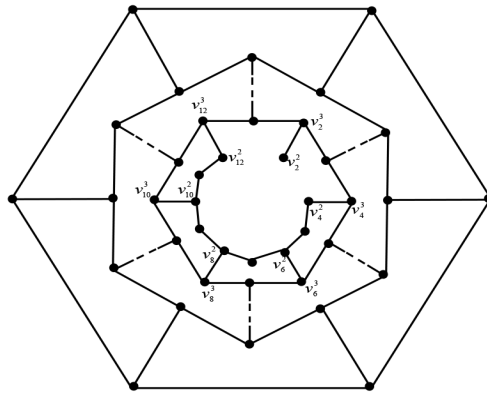


Figure 4. Graphs K_{n-1}
图 4. 图 K_{n-1}

是 K_{n-1} 的完美匹配矛盾。当 $v_4^2v_4^3, v_8^2v_8^3, v_{12}^2v_{12}^3$ 属于 M'' 时, C_2 上剩余点 v_5^2, v_6^2, v_7^2 不会被 M'' 覆盖。同样与 M'' 是 K_{n-1} 的完美匹配矛盾。由此矛盾可知 $|E_2 \cap M''| \neq 4$ 且 $|E_2 \cap M''| \neq 6$ 。

当 $|E_2 \cap M''| = 2$ 时, 由于 $v_2^2v_2^3 \in E_2 \cap M''$, 故 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_6^2v_6^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_{10}^2v_{10}^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_8^2v_8^3\}$ 。

当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_5^2, v_6^2, v_7^2, v_8^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_5^2v_6^2, v_7^2v_8^2, v_9^2v_{10}^2, v_{11}^2v_{12}^2 \in M''$ 。从 K_{n-1} 中删除 C_2 上的点及点 v_2^3, v_4^3 后剩下的图同构于 K_{n-2} 。因而此时 K_{n-1} 的完美匹配数等于 K_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(K_{n-1}) = f(K_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$ 时, $f(K_{n-1}) = f(K_{n-2})$ 。

当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_6^2v_6^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_4^2, v_5^2, v_7^2, v_8^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_4^2v_5^2, v_7^2v_8^2, v_9^2v_{10}^2, v_{11}^2v_{12}^2 \in M''$ 。从 K_{n-1} 中删除 C_2 上的点及点 v_2^3, v_6^3 后剩下的图同构于 Q_{n-2} 。因而此时 K_{n-1} 的完美匹配数等于 Q_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(K_{n-1}) = f(Q_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_{10}^2v_{10}^3\}$ 时, $f(K_{n-1}) = f(Q_{n-2})$ 。

当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_8^2v_8^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_4^2, v_5^2, v_6^2, v_7^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_4^2v_5^2, v_6^2v_7^2, v_9^2v_{10}^2, v_{11}^2v_{12}^2 \in M''$ 。从 K_{n-1} 中删除 C_2 上的点及点 v_2^3, v_8^3 后剩下的图同构于 M_{n-2} 。因而此时 K_{n-1} 的完美匹配数等于 M_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(K_{n-1}) = f(M_{n-2})$ 。

综上,

$$f(K_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + 2f(Q_{n-2}) + f(M_{n-2}) \tag{3}$$

Claim 3.4 $|\mathcal{M}_{23}| = 3f(M_{n-1})$ 。

证明: 因为 $\mathcal{M}_{23} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1v_j^2, v_{i+3}^1v_{j+6}^2\}\} (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \text{当 } l > 6 \text{ 时, } v_l^1 = v_{l-6}^1; \text{当 } t > 12 \text{ 时, } v_t^2 = v_{t-12}^2)$ 。当 $i = 1, j = 1$ 时, 即 $E_1 \cap M' = \{v_1^1v_1^2, v_4^1v_4^2\}$ 时, C_1 上剩余四个点 $v_2^1, v_3^1, v_5^1, v_6^1$ 被 M' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_2^1v_3^1, v_5^1v_6^1 \in M'$ 。从 $F_{12(n-1)}$ 中删除 C_1 上的点及 v_1^2, v_7^2 后剩下的子图为 M_{n-1} 。故此时 $f(F_{12(n-1)}) = f(M_{n-1})$ 。由对称性, 当 $i = 2, j = 3$ 或 $i = 3, j = 5$ 时, $f(F_{12(n-1)}) = f(M_{n-1})$ 。当 i 的取值分别为 4, 5 或 6 时, 与 i 的取值分别为 1, 2 或 3 时的情况重复。

所以当 $|E_2 \cap M'| = 2$ 且 $\mathcal{M}_{23} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1v_j^2, v_{i+3}^1v_{j+6}^2\}\}$ 时, $F_{12(n-1)}$ 有 $|\mathcal{M}_{23}| = 3f(M_{n-1})$ 种完美

匹配。

Claim 3.5 $f(M_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + 4f(Q_{n-2}) + 3f(M_{n-2})$ 。

证明: 观察图 M_{n-1} (图 5), 边集 $E_2 = \{v_2^2 v_2^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$, 设 $\mathcal{M}(M_{n-1})$ 为图 M_{n-1} 所有完美匹配构成的集合。对边集 E_2 中是完美匹配边的数目 $|E_2 \cap M''|$ 进行分类, 其中 $M'' \in \mathcal{M}(M_{n-1})$ 。因为圈 C_2 在图 M_{n-1} 上剩余偶数个点, 所以对于任意一个完美匹配 $M'' \in \mathcal{M}(M_{n-1})$, $|E_2 \cap M''|$ 不可能为奇数, $|E_2 \cap M''|$ 可能取值为 0, 2, 4, 6。因为在图 M_{n-1} 中, 由点 $v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2, v_6^2, v_8^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 诱导的子图是两个四长路: $v_2^2 v_3^2 v_4^2 v_5^2$ 和 $v_6^2 v_8^2 v_{10}^2 v_{12}^2$, 分别记作 P_1 和 P_2 。所以对任意的 $M'' \in \mathcal{M}(M_{n-1})$, $|E_2 \cap M''| \neq 0$ 。另一方面, 若横跨边 $v_2^2 v_2^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3$ 中有两条相继的边 $v_i^2 v_i^3, v_{i+2}^2 v_{i+2}^3$ ($i = 2, 4$) 属于 $E_2 \cap M''$, 则路 P_1 上剩余一点 v_{i+1}^2 不会被 M'' 覆盖, 矛盾。该矛盾说明 $v_2^2 v_2^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3$ 中不能有两边相继的边属于 $E_2 \cap M''$, 同理, $v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3$ 中也不能有两边相继的边属于 $E_2 \cap M''$ 。这意味着 $|E_2 \cap M''| \neq 6$ 。

记 $E_{21} = \{v_2^2 v_2^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3\}$, $E_{22} = \{v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$, 则 $E_{21} \cap E_{22} = \emptyset$, $E_{21} \cup E_{22} = E_2$ 。由前面的分析可知: $1 \leq |E_{21} \cap M''| \leq 2$, $1 \leq |E_{22} \cap M''| \leq 2$ (其中 $M'' \in \mathcal{M}(M_{n-1})$)。所以当 $|E_2 \cap M''| = 4$ 时, $|E_{21} \cap M''| = 2$ 且 $|E_{22} \cap M''| = 2$ 。即 $v_2^2 v_2^3, v_6^2 v_6^3 \in E_2 \cap M''$, 但 P_1 上剩余三个点 v_3^2, v_4^2, v_5^2 不可能同时被 M'' 覆盖, 矛盾。该矛盾说明 $|E_2 \cap M''| \neq 4$ 。

当 $|E_2 \cap M''| = 2$ 时, $|E_{21} \cap M''| = 1$ 且 $|E_{22} \cap M''| = 1$ 。由对称性, 我们又分为以下三种情况:

情况 1: $E_2 \cap M'' = \{v_l^2 v_l^3, v_{l+2}^2 v_{l+2}^3\}$ ($l = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, 当 $l > 12$ 时, $v_l^2 = v_{l-12}^2, v_l^3 = v_{l-12}^3$)。

因为 $|E_{21} \cap M''| = 1$ 且 $|E_{22} \cap M''| = 1$ 。故 $E_2 \cap M''$ 的取值为 $\{v_{12}^2 v_{12}^3, v_2^2 v_2^3\}$ 或 $\{v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3\}$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_{12}^2 v_{12}^3, v_2^2 v_2^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_3^2, v_4^2, v_5^2, v_6^2, v_8^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_3^2 v_4^2, v_5^2 v_6^2, v_8^2 v_9^2, v_{10}^2 v_{11}^2 \in M''$ 。从 M_{n-1} 中删除 C_2 上的点及 v_2^2, v_{12}^2 后剩下的图同构于 K_{n-2} 。因而此时 M_{n-1} 的完美匹配数等于 K_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(M_{n-1}) = f(K_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3\}$ 时, $f(M_{n-1}) = f(K_{n-2})$ 。

情况 2: $E_2 \cap M'' = \{v_l^2 v_l^3, v_{l+4}^2 v_{l+4}^3\}$ ($l = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, 当 $l > 12$ 时, $v_l^2 = v_{l-12}^2, v_l^3 = v_{l-12}^3$)。

因为 $|E_{21} \cap M''| = 1$ 且 $|E_{22} \cap M''| = 1$ 。故 $E_2 \cap M''$ 的取值为 $\{v_4^2 v_4^3, v_8^2 v_8^3\}$ 或 $\{v_{12}^2 v_{12}^3, v_4^2 v_4^3\}$ 或 $\{v_6^2 v_6^3, v_{10}^2 v_{10}^3\}$ 或 $\{v_{10}^2 v_{10}^3, v_2^2 v_2^3\}$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_8^2 v_8^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_2^2, v_3^2, v_5^2, v_6^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_2^2 v_3^2, v_5^2 v_6^2, v_9^2 v_{10}^2, v_{11}^2 v_{12}^2 \in M''$ 。从 M_{n-1} 中删除 C_2 上的点及点 v_4^2, v_8^2 后剩下的图同构于 Q_{n-2} 。因而此时 M_{n-1} 的完美匹配数等于 Q_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(M_{n-1}) = f(Q_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_{12}^2 v_{12}^3, v_4^2 v_4^3\}$ 或 $\{v_6^2 v_6^3, v_{10}^2 v_{10}^3\}$ 或 $\{v_{10}^2 v_{10}^3, v_2^2 v_2^3\}$ 时, $f(M_{n-1}) = f(Q_{n-2})$ 。

情况 3: $E_2 \cap M'' = \{v_l^2 v_l^3, v_{l+6}^2 v_{l+6}^3\}$ ($l = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, 当 $l > 12$ 时, $v_l^2 = v_{l-12}^2, v_l^3 = v_{l-12}^3$)。

因为 $|E_{21} \cap M''| = 1$ 且 $|E_{22} \cap M''| = 1$ 。故 $E_2 \cap M''$ 的取值为 $\{v_2^2 v_2^3, v_8^2 v_8^3\}$ 或 $\{v_4^2 v_4^3, v_{10}^2 v_{10}^3\}$ 或 $\{v_6^2 v_6^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2 v_2^3, v_8^2 v_8^3\}$ 时, C_2 上剩余点 $v_3^2, v_4^2, v_5^2, v_6^2, v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式唯一, 即 $v_3^2 v_4^2, v_5^2 v_6^2, v_9^2 v_{10}^2, v_{11}^2 v_{12}^2 \in M''$ 。从 M_{n-1} 中删除 C_2 上的点及点 v_2^2, v_8^2 后剩下的图同构于 M_{n-2} 。因而此时 M_{n-1} 的完美匹配数等于 M_{n-2} 的完美匹配数, 即 $f(M_{n-1}) = f(M_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_{10}^2 v_{10}^3\}$ 或 $\{v_6^2 v_6^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 时, $f(M_{n-1}) = f(M_{n-2})$ 。

综上,

$$f(M_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + 4f(Q_{n-2}) + 3f(M_{n-2}) \tag{4}$$

观察 Q_{n-1} (如图 5) 进行类似 Claim 3.3, Claim 3.5 的分析, 则

$$f(Q_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + 4f(Q_{n-2}) + 2f(M_{n-2}) \tag{5}$$

由(3)~(5)式得

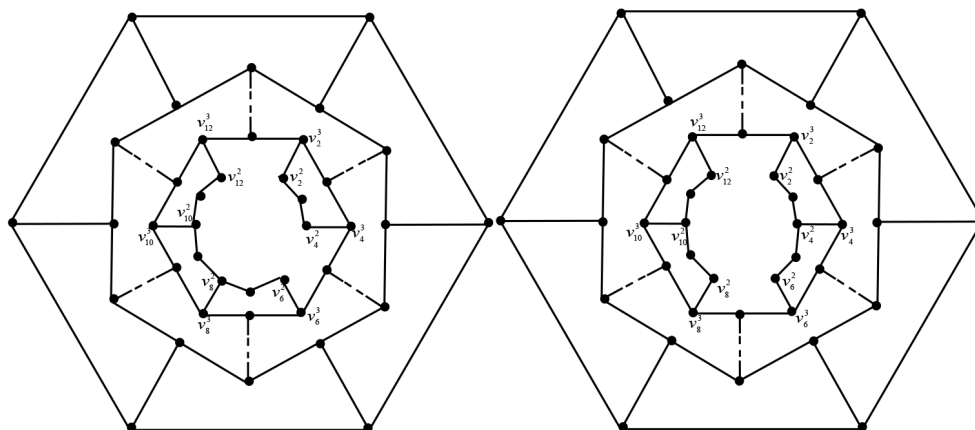


Figure 5. Graphs M_{n-1} (left), graphs Q_{n-1} (right)

图 5. 图 M_{n-1} (左), 图 Q_{n-1} (右)

$$f(Q_{n-1}) = 8f(K_{n-3}) + 12f(Q_{n-3}) + 8f(M_{n-3}) + 4f(Q_{n-2}) \tag{6}$$

$$4f(Q_{n-2}) = 8f(K_{n-3}) + 16f(Q_{n-3}) + 8f(M_{n-3}) \tag{7}$$

再由(6)~(7)式得

$$f(Q_{n-1}) = 8f(Q_{n-2}) - 4f(Q_{n-3}) \tag{8}$$

由(3) - 2 × (5), (4) - (5)分别得

$$2f(K_{n-1}) = 2f(K_{n-2}) + f(Q_{n-1}) \tag{9}$$

$$f(M_{n-1}) = f(M_{n-2}) + f(Q_{n-1}) \tag{10}$$

由(8), (9)得

$$f(K_{n-1}) = 9f(K_{n-2}) - 12f(K_{n-3}) + 4f(K_{n-4}) \tag{11}$$

其中(11)式的特征方程的根为 $x_1 = 1$, $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$, $x_3 = 4 - 2\sqrt{3}$ 。易知 $f(K_2) = 3$, $f(K_3) = 19$, $f(K_4) = 139$ 。得出递推式(11)式的通解为

$$f(K_{n-1}) = \frac{1}{3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{6}(4 + 2\sqrt{3})^{n-1} + \frac{2 + \sqrt{3}}{6}(4 - 2\sqrt{3})^{n-1} \tag{12}$$

由(8), (10)得

$$f(M_{n-1}) = 9f(M_{n-2}) - 12f(M_{n-3}) + 4f(M_{n-4}) \tag{13}$$

线性递推式(13)式的特征方程的根与递推式(11)式的特征方程的根相同, 易知 $f(M_2) = 5$, $f(M_3) = 37$, $f(M_4) = 277$ 。因此递推式(13)式的通解为

$$f(M_{n-1}) = -\frac{1}{3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3}(4 + 2\sqrt{3})^{n-1} + \frac{2 + \sqrt{3}}{3}(4 - 2\sqrt{3})^{n-1} \tag{14}$$

综上, 当 $|E_1 \cap M'| = 2$ 时, 图 $F_{12(n-1)}$ 的完美匹配数为

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_2| &= |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}| + |\mathcal{M}_{23}| \\
 &= 6f(K_{n-1}) + 3f(M_{n-1}) \\
 &= 1 + 2^n \left(2 + \sqrt{3} \right)^{n-2} + 2^n \left(2 - \sqrt{3} \right)^{n-2}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

引理 4 记 $\mathcal{M}_3 = \{M' \mid M' \in \mathcal{M}, |E_1 \cap M'| = 4\}$, 则 $|\mathcal{M}_3| = 2^n + \left(2 + \sqrt{3} \right)^{n-2} + \left(2 - \sqrt{3} \right)^{n-2}$.

证明: 对任意的 $M' \in \mathcal{M}_3$, 当 $|E_1 \cap M'| = 4$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}$ 或 $\{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2, v_{i+4}^1 v_{j+8}^2\}$ 或 $\{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}$ ($i=1, 2, \dots, 6; j=1, 3, 5, 7, 9, 11$, 当 $l > 6$ 时, $v_l^1 = v_{l-6}^1$; 当 $t > 12$ 时, $v_t^2 = v_{t-12}^2$). 对上述 i, j , 设 $\mathcal{M}_{31} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}\}$, $\mathcal{M}_{32} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2, v_{i+4}^1 v_{j+8}^2\}\}$, $\mathcal{M}_{33} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2, v_{i+4}^1 v_{j+8}^2\}\}$. 则 $\mathcal{M}_{3i} \cap \mathcal{M}_{3j} = \emptyset$ ($i, j=1, 2, 3$ 且 $i \neq j$), $\mathcal{M}_{31} \cup \mathcal{M}_{32} \cup \mathcal{M}_{33} = \mathcal{M}_3$. 故

$$|\mathcal{M}_3| = |\mathcal{M}_{31}| + |\mathcal{M}_{32}| + |\mathcal{M}_{33}| \tag{16}$$

设

$$S_5 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^1, v_3^2, v_4^1, v_7^1, v_5^1, v_6^1\},$$

$$S_6 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_3^2, v_4^1, v_7^1, v_5^1, v_6^1, v_{11}^2\},$$

$$S_7 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_3^2, v_4^1, v_5^1, v_9^1, v_6^1, v_{11}^2\},$$

$$N_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_5,$$

$$R_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_6,$$

$$X_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_7.$$

见图 6, 图 7 所示图 N_{n-1} , R_{n-1} , X_{n-1} . 记 $f(N_{n-1})$ 为子图 N_{n-1} 的完美匹配的数目, 对 R_{n-1} , X_{n-1} 类似.

Claim 4.1 $|\mathcal{M}_{32}| = 0$.

证明: 因为 $\mathcal{M}_{32} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2, v_{i+4}^1 v_{j+8}^2\}\}$ ($i=1, 2, \dots, 6; j=1, 3, 5, 7, 9, 11$, 当 $l > 6$ 时, $v_l^1 = v_{l-6}^1$; 当 $t > 12$ 时, $v_t^2 = v_{t-12}^2$). 所以此时 v_{i+1}^1 必须与 v_{j+2}^2 匹配. 与 $|E_1 \cap M'| = 4$ 矛盾, 因而 $|\mathcal{M}_{32}| = 0$. 比如当 $i=1, j=1$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_1^1 v_1^2, v_3^1 v_5^2, v_4^1 v_7^2, v_5^1 v_9^2\}$, 则 C_1 上剩余点 v_2^1, v_6^1 必须分别与 v_3^2, v_{11}^2 匹配, 此时 $v_2^1 v_3^2, v_6^1 v_{11}^2 \in E_1 \cap M'$, 与 $|E_1 \cap M'| = 4$ 矛盾.

Claim 4.2 $|\mathcal{M}_{33}| = 0$.

证明: 因为 $\mathcal{M}_{33} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2, v_{i+4}^1 v_{j+8}^2\}\}$ ($i=1, 2, \dots, 6; j=1, 3, 5, 7, 9, 11$, 当 $l > 6$ 时, $v_l^1 = v_{l-6}^1$; 当 $t > 12$ 时, $v_t^2 = v_{t-12}^2$). 所以此时 v_{i+2}^1 必须与 v_{j+4}^2 匹配. 与 $|E_1 \cap M'| = 4$ 矛盾, 因而 $|\mathcal{M}_{33}| = 0$. 比如当 $i=1, j=1$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2, v_4^1 v_7^2, v_5^1 v_9^2\}$, 则 C_1 上剩余点 v_3^1, v_6^1 必须分别与 v_5^2, v_{11}^2 匹配, 此时 $v_3^1 v_5^2, v_6^1 v_{11}^2 \in E_1 \cap M'$, 与 $|E_1 \cap M'| = 4$ 矛盾.

Claim 4.3 $|\mathcal{M}_{31}| = 6f(N_{n-1})$.

证明: 因为 $\mathcal{M}_{31} = \{M' \in \mathcal{M} \mid E_1 \cap M' = \{v_i^1 v_j^2, v_{i+1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+2}^1 v_{j+4}^2, v_{i+3}^1 v_{j+6}^2\}\}$ ($i=1, 2, \dots, 6; j=1, 3, 5, 7, 9, 11$, 当 $l > 6$ 时, $v_l^1 = v_{l-6}^1$; 当 $t > 12$ 时, $v_t^2 = v_{t-12}^2$). 当 $i=1, j=1$ 时, $E_1 \cap M' = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2, v_3^1 v_5^2, v_4^1 v_7^2\}$, C_1 上剩余两个点 v_5^1, v_6^1 被 M' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_5^1 v_6^1 \in M'$. 因为 $S_5 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_3^1, v_3^2, v_4^1, v_7^1, v_5^1, v_6^1\}$, $N_{n-1} = F_{12(n-1)} - S_5$. 从

$F_{12(n-1)}$ 中删除 $V(C_1)$ 及点 $v_1^2, v_3^2, v_5^2, v_7^2$ 后剩下的图即为 N_{n-1} 。因而此时 $f(F_{12(n-1)}) = f(N_{n-1})$, 由对称性, 当 $i = 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $f(F_{12(n-1)}) = f(N_{n-1})$, 所以 $|\mathcal{M}_{31}| = 6f(N_{n-1})$ 。

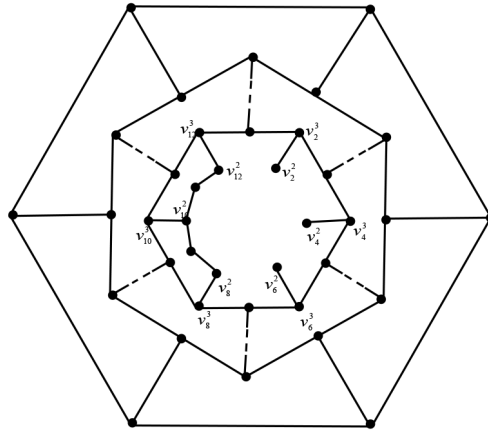


Figure 6. Graphs N_{n-1}

图 6. 图 N_{n-1}

Claim 4.4 $f(N_{n-1}) = 2f(N_{n-2}) + f(R_{n-2})$ 。

证明: 观察图 N_{n-1} (如图 6), 边集 $E_2 = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_8^2v_8^3, v_{10}^2v_{10}^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$, 设 $\mathcal{M}(N_{n-1})$ 为图 N_{n-1} 所有完美匹配构成的集合。对边集 E_2 中是完美匹配边的数目 $|E_2 \cap M''|$ 进行分类, 其中 $M'' \in \mathcal{M}(N_{n-1})$ 。因为圈 C_2 在图 N_{n-1} 上剩余偶数个点, 所以对于任意一个完美匹配 $M'' \in \mathcal{M}(N_{n-1})$, $|E_2 \cap M''|$ 不可能为奇数, $|E_2 \cap M''|$ 可能取值为 0, 2, 4, 6。

对图 N_{n-1} , 点 v_2^2 必须与点 v_2^3 匹配, 点 v_4^2 必须与点 v_4^3 匹配, 点 v_6^2 必须与点 v_6^3 匹配, 则边集 $\{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3\} \subseteq E_2 \cap M''$, 所以 $|E_2 \cap M''|$ 可能取值为 4 或 6。又当 $|E_2 \cap M''| = 6$ 时, 即 $v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_8^2v_8^3, v_{10}^2v_{10}^3, v_{12}^2v_{12}^3 \in E_2 \cap M''$, 则圈 C_2 上点 v_9^2, v_{11}^2 不能被 M'' 覆盖, 矛盾。从而 $|E_2 \cap M''| \neq 6$ 。

对任意 $M'' \in \mathcal{M}(N_{n-1})$, 当 $|E_2 \cap M''| = 4$ 时, 由于 $v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3 \in E_2 \cap M''$, 故 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_8^2v_8^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_{10}^2v_{10}^3\}$ 或 $\{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_8^2v_8^3\}$ 时, 则圈 C_2 上点 $v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_9^2v_{10}^2, v_{11}^2v_{12}^2 \in M''$ 。从 N_{n-1} 中删除 $E_2 \cap M''$ 中边关联的点以及点 $v_9^2, v_{10}^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 后剩下的图同构于 N_{n-2} , 因而此时 $f(N_{n-1}) = f(N_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$ 时, $f(N_{n-1}) = f(N_{n-2})$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_{10}^2v_{10}^3\}$ 时, 则圈 C_2 上点 $v_8^2, v_9^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 被 M'' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_8^2v_9^2, v_{11}^2v_{12}^2 \in M''$ 。从 N_{n-1} 中删除 $E_2 \cap M''$ 中边关联的点以及点 $v_8^2, v_9^2, v_{11}^2, v_{12}^2$ 后剩下的图同构于 R_{n-2} , 因而此时 $f(N_{n-1}) = f(R_{n-2})$ 。

综上,

$$f(N_{n-1}) = 2f(N_{n-2}) + f(R_{n-2}) \tag{17}$$

Claim 4.5 $f(R_{n-1}) = f(N_{n-2}) + 2f(R_{n-2}) + f(X_{n-2})$ 。

证明: 观察图 R_{n-1} (如图 7), 边集 $E_2 = \{v_2^2v_2^3, v_4^2v_4^3, v_6^2v_6^3, v_8^2v_8^3, v_{10}^2v_{10}^3, v_{12}^2v_{12}^3\}$, 设 $\mathcal{M}(R_{n-1})$ 为图 R_{n-1} 所有完美匹配构成的集合。对边集 E_2 中是完美匹配边的数目 $|E_2 \cap M''|$ 进行分类, 其中 $M'' \in \mathcal{M}(R_{n-1})$ 。因为圈 C_2 在图 R_{n-1} 上剩余偶数个点, 所以对于任意一个完美匹配 $M'' \in \mathcal{M}(R_{n-1})$, $|E_2 \cap M''|$ 不可能为奇数,

$|E_2 \cap M''|$ 可能取值为0, 2, 4, 6。且在图 R_{n-1} 中, 圈 C_2 被分成两个 2-长路 $v_8^2 v_9^2 v_{10}^2, v_{12}^2 v_1^2 v_2^2$ 和两个孤立点 v_4^2, v_6^2 (见图 7 左)。

所以对任意 $M'' \in \mathcal{M}(R_{n-1})$, $v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3 \in E_2 \cap M''$ 且 $v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3$ 中恰好有一条边属于 $E_2 \cap M''$, 同理,

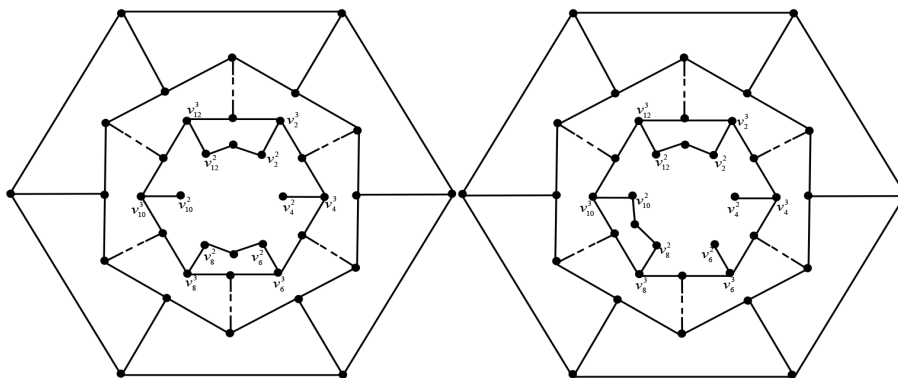


Figure 7. Graphs R_{n-1} (left), graphs X_{n-1} (right)

图 7. 图 R_{n-1} (左), 图 X_{n-1} (右)

$v_{12}^2 v_{12}^3, v_2^2 v_2^3$ 中恰好有一条边也属于 $E_2 \cap M''$, 为此, 我们有 $|E_2 \cap M''|=4$ 且 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_2^2 v_2^3\}$ 或 $\{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_2^2 v_2^3\}$ 或 $\{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 或 $\{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_2^2 v_2^3\}$ 时, 圈 C_2 上点 $v_9^2, v_{10}^2, v_{12}^2, v_1^2$ 被 M'' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_9^2 v_{10}^2, v_{12}^2 v_1^2 \in M''$ 。从 R_{n-1} 中删除 $E_2 \cap M''$ 中边关联的点以及点 $v_9^2, v_{10}^2, v_{12}^2, v_1^2$ 后剩下的图同构于 N_{n-2} , 因而此时 $f(R_{n-1}) = f(N_{n-2})$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_2^2 v_2^3, v_{10}^2 v_{10}^3\}$ 时, 圈 C_2 上点 $v_8^2, v_9^2, v_{12}^2, v_1^2$ 被 M'' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_8^2 v_9^2, v_{12}^2 v_1^2 \in M''$ 。从 R_{n-1} 中删除 $E_2 \cap M''$ 中边关联的点以及点 $v_8^2, v_9^2, v_{12}^2, v_1^2$ 后剩下的图同构于 R_{n-2} , 因而此时 $f(R_{n-1}) = f(R_{n-2})$ 。由对称性, 当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 时, $f(R_{n-1}) = f(R_{n-2})$ 。当 $E_2 \cap M'' = \{v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 时, 圈 C_2 上点 $v_8^2, v_9^2, v_1^2, v_2^2$ 被 M'' 覆盖的方式只有一种, 即 $v_8^2 v_9^2, v_1^2 v_2^2 \in M''$ 。从 R_{n-1} 中删除 $E_2 \cap M''$ 中边关联的点以及点 $v_8^2, v_9^2, v_1^2, v_2^2$ 后剩下的图同构于 X_{n-2} , 因而此时 $f(R_{n-1}) = f(X_{n-2})$ 。

综上,

$$f(R_{n-1}) = f(N_{n-2}) + 2f(R_{n-2}) + f(X_{n-2}) \tag{18}$$

观察 X_{n-1} (如图 7) 进行类似 Claim 4.4, Claim 4.5 的分析, 可得

$$f(X_{n-1}) = 2f(X_{n-2}) + 2f(R_{n-2}) \tag{19}$$

由(17)~(19)式得

$$f(R_{n-1}) = 2f(N_{n-3}) + 2f(X_{n-3}) + 3f(R_{n-3}) + 2f(R_{n-2}) \tag{20}$$

$$2f(R_{n-2}) = 2f(N_{n-3}) + 2f(X_{n-3}) + 4f(R_{n-3}) \tag{21}$$

再由(20)~(21)式得

$$f(R_{n-1}) = 4f(R_{n-2}) - f(R_{n-3}) \tag{22}$$

由(17), (22)联立得

$$f(N_{n-1}) = 6f(N_{n-2}) - 9f(N_{n-3}) + 2f(N_{n-4}) \tag{23}$$

其中(23)式的特征方程的根为 $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, $x_3 = 2 - \sqrt{3}$ 。易知 $f(N_2) = 2$, $f(N_3) = 3$, $f(N_4) = 14$ 。得出递推式(23)式的通解为

$$f(N_{n-1}) = \frac{2^{n-1}}{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{2+\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^{n-1} \tag{24}$$

故对任意的 $M' \in \mathcal{M}$, 当 $|E_1 \cap M'| = 4$ 时, 图 $F_{12(n-1)}$ 的完美匹配数为

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_3| &= |\mathcal{M}_{31}| + |\mathcal{M}_{32}| + |\mathcal{M}_{33}| \\ &= 6f(N_{n-1}) \\ &= 2^n + (2 + \sqrt{3})^{n-2} + (2 - \sqrt{3})^{n-2} \end{aligned} \tag{25}$$

引理 5 令 $\mathcal{M}_4 = \{M' | M' \in \mathcal{M}, |E_1 \cap M'| = 6\}$, 则 $|\mathcal{M}_4| = 1$ 。

证明: 当 $\mathcal{M}_4 = \{M' | M' \in \mathcal{M}, |E_1 \cap M'| = 6\}$ 时, 即 C_1 和 C_2 之间的横跨边 $E_1 = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2, v_3^1 v_5^2, v_4^1 v_7^2, v_5^1 v_9^2, v_6^1 v_{11}^2\}$ 是完美匹配 M' 中的边。从图 $F_{12(n-1)}$ 中删除横跨边 $E_1 = \{v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_3^2, v_3^1 v_5^2, v_4^1 v_7^2, v_5^1 v_9^2, v_6^1 v_{11}^2\}$ 中的边关联的点得到图 W_{n-1} (如图 8 左所示), 则 C_2 和 C_3 之间的横跨边 $E_2 = \{v_2^2 v_2^3, v_4^2 v_4^3, v_6^2 v_6^3, v_8^2 v_8^3, v_{10}^2 v_{10}^3, v_{12}^2 v_{12}^3\}$ 也是完美匹配 M' 中的边。再从图 W_{n-1} 中删除横跨边 E_2 中的边关联的点得到图 W_{n-2} , 则 C_3 和 C_4 之间的横跨边 E_3 也是完美匹配 M' 中的边。依此类推, 最后 C_{n-1} 和 C_n 之间的横跨边 $E_{n-1} = \{v_2^{n-1} v_1^n, v_4^{n-1} v_2^n, v_6^{n-1} v_3^n, v_8^{n-1} v_4^n, v_{10}^{n-1} v_5^n, v_{12}^{n-1} v_6^n\}$ 也是完美匹配 M' 中的边。则 $|E_1 \cap M'| = 6$ 时, 图 $F_{12(n-1)}$ 的完美匹配如图 8 右所示。

即当 $|E_1 \cap M'| = 6$ 时, 图 $F_{12(n-1)}$ 的完美匹配数为

$$|\mathcal{M}_4| = 1 \tag{26}$$

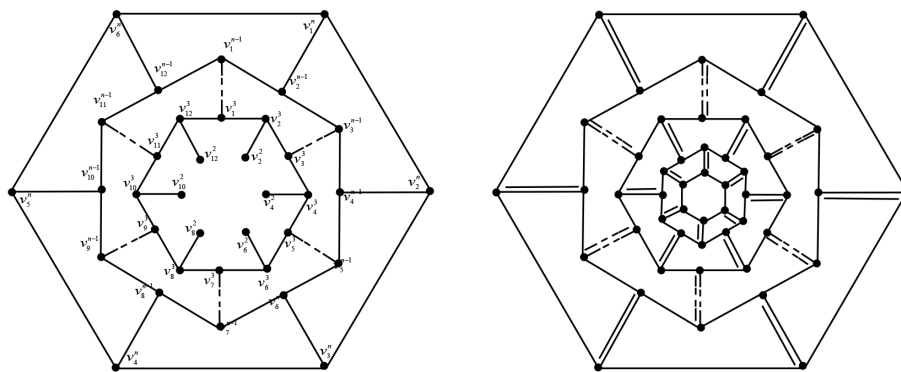


Figure 8. Graphs W_{n-1} (left), a perfect matching of graphs $F_{12(n-1)}$ (right)

图 8. 图 W_{n-1} (左), 图 $F_{12(n-1)}$ 的一种完美匹配(右)

定理 1 的证明: 结合引理 2~5, 可得

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}| &= |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_4| \\ &= 2^n + \left[1 + 2^n (2 + \sqrt{3})^{n-2} + 2^n (2 - \sqrt{3})^{n-2} \right] + \left[2^n + (2 + \sqrt{3})^{n-2} + (2 - \sqrt{3})^{n-2} \right] + 1 \\ &= \left[2 + (2 + \sqrt{3})^{n-2} + (2 - \sqrt{3})^{n-2} \right] (2^n + 1) \end{aligned} \tag{27}$$

设 s 是 F 的顶点数, 则 $s = 12(n-1)$, 即 $n = \frac{s+12}{12}$ 代入等式(27), 可得

$$|\mathcal{M}| = \left[2 + (2 + \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}} + (2 - \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}} \right] \left(2^{\frac{s+12}{12}} + 1 \right) \quad (28)$$

即图 F 的完美匹配数为 $\left[2 + (2 + \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}} + (2 - \sqrt{3})^{\frac{s-12}{12}} \right] \left(2^{\frac{s+12}{12}} + 1 \right)$ (其中 s 为 F 的顶点数)。

4. 结论

在本文中, 我们得出一类管状富勒烯图 F 的完美匹配数的计算公式, 验证了 Lovász 和 Plummer 的任意 2-边连通 3-正则图都有指数多个完美匹配的猜想的正确性。对于其他管状富勒烯图, 我们可以尝试运用本文中的方法求出其完美匹配数的计算公式。在推导文中的递推公式时过程比较繁琐, 后续可以寻求更好的方法解决此类问题。

基金项目

本文研究得到了国家自然科学基金项目(No.11801148, 11626089)以及河南理工大学博士基金项目(No.B2014-060)的资助。

参考文献

- [1] 胡启明, 许欢, 袁晓彤. 图的覆盖数与分子的凯库勒结构[J]. 长春师范大学学报, 2022, 41(4): 17-21.
- [2] 严正, 姜捷, 陈焱, 漏燕娣, 林志. 对量子 dimer 模型实现全拓扑类抽样的量子蒙特卡洛方法[P]. 中国专利, 201910162497. X. 2019-06-07.
- [3] Smith, D.K., Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. and Orlin, J.B. (1994) Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. *The Journal of the Operational Research Society*, **45**, 1340. <https://doi.org/10.2307/2583863>
- [4] 黄银峰, 李艳红, 姚静怡, 罗昌银. 基于稀疏采样数据的复杂路网地图匹配算法[J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2024, 43(4): 522-531.
- [5] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [6] Kasteleyn, P.W. (1961) The Statistics of Dimers on a Lattice: I. The Number of Dimer Arrangements on a Quadratic Lattice. *Physica*, **27**, 1209-1225. [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(61\)90063-5](https://doi.org/10.1016/0031-8914(61)90063-5)
- [7] Kasteleyn, P.W. (1967) Graph Theory and Crystal Physics. In: Harary, F., Ed., *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, 43-110.
- [8] Little, C.H.C. (1974) An Extension of Kasteleyn's Method of Enumerating the 1-Factors of Planar Graphs. In: Holton, D.A., Ed., *Combinatorial Mathematics*, Springer, 63-72. <https://doi.org/10.1007/bfb0057377>
- [9] Little, C.H.C. (1975) A Characterization of Convertible (0, 1)-Matrices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **18**, 187-208. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(75\)90048-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(75)90048-9)
- [10] Lu, W.T. and Wu, F.Y. (2002) Close-packed Dimers on Nonorientable Surfaces. *Physics Letters A*, **293**, 235-246. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(02\)00019-1](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(02)00019-1)
- [11] Ciucu, M. (1997) Enumeration of Perfect Matchings in Graphs with Reflective Symmetry. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **77**, 67-97. <https://doi.org/10.1006/jcta.1996.2725>
- [12] Zhang, F. and Yan, W. (2003) Enumeration of Perfect Matchings in a Type of Graphs with Reflective Symmetry. *Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry*, **48**, 117-124.
- [13] Yan, W. and Zhang, F. (2004) Enumeration of Perfect Matchings of Graphs with Reflective Symmetry by Pfaffians. *Advances in Applied Mathematics*, **32**, 655-668. [https://doi.org/10.1016/s0196-8858\(03\)00097-6](https://doi.org/10.1016/s0196-8858(03)00097-6)
- [14] Yan, W. and Zhang, F. (2006) Enumeration of Perfect Matchings of a Type of Cartesian Products of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **154**, 145-157. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.07.001>
- [15] Propp, J. (1999) Enumerations of Matchings: Problems and Progress. In: Billera, L.J., et al., Eds., *New Perspectives in*

Geometric Combinatorics, Cambridge University Press, 255-291.

- [16] Chen, H. and Ye, Y. (2023) On the Number of Perfect Matchings in the Line Graph of a Traceable Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **327**, 110-118. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.12.011>
- [17] 冯星. 图的 Pfaffian 性与完美匹配计数问题[D]: [博士学位论文]. 厦门: 厦门大学, 2018.
- [18] Yan, W., Yeh, Y. and Zhang, F. (2008) Dimer Problem on the Cylinder and Torus. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**, 6069-6078. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.06.042>
- [19] 张福基, 刘育亭, 郭晓峰. 树状多六边形的完美匹配计数[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 1985(3): 7-11.
- [20] Zhang, H. and Zhang, F. (1997) Perfect Matchings of Polyomino Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **13**, 295-304. <https://doi.org/10.1007/bf03353008>
- [21] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2005, 33(6): 704-735.
- [22] 唐保祥, 任韩. 3 类 3-正则图中的完美匹配数[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2014, 48(5): 637-649.
- [23] 马京成, 马登举, 朱珺. 3-正则 Halin 图的完美匹配数[J]. 昆明理工大学学报(自然科学版), 2015, 40(5): 132-136.
- [24] 叶银珠, 陈海燕. 繁星树线图的完美匹配数[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2023, 62(3): 450-453.
- [25] Dong, F., Yan, W. and Zhang, F. (2013) On the Number of Perfect Matchings of Line Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 794-801. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.10.032>
- [26] 杨思齐, 边红, 于海征, 魏丽娜. 几类特殊图的完美匹配的计数[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 27-35.
- [27] 唐保祥, 任韩. 3 类特殊图完美匹配数的计算公式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(3): 36-40.
- [28] Yang, R. and Yuan, M. (2023) The Number of Perfect Matchings in (3, 6)-Fullerene. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, **28**, 192-200. <https://doi.org/10.1051/wujns/2023283192>
- [29] 刘剑洪, 吴双泉, 何传新, 卓海涛, 朱才镇, 李翠华, 张黔玲. 碳纳米管和碳微米管的结构、性质及其应用[J]. 深圳大学学报(理工版), 2013, 30(1): 1-11.
- [30] Iijima, S. (2002) Carbon Nanotubes: Past, Present, and Future. *Physica B: Condensed Matter*, **323**, 1-5. [https://doi.org/10.1016/s0921-4526\(02\)00869-4](https://doi.org/10.1016/s0921-4526(02)00869-4)
- [31] Došlić, T. (1998) On Lower Bounds of Number of Perfect Matchings in Fullerene Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **24**, 359-364. <https://doi.org/10.1023/a:1019195324778>
- [32] Zhang, H. and Zhang, F. (2001) New Lower Bound on the Number of Perfect Matchings in Fullerene Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **30**, 343-347. <https://doi.org/10.1023/a:1015131912706>
- [33] Kardoš, F., Král, D., Miškuf, J. and Sereni, J. (2008) Fullerene Graphs Have Exponentially Many Perfect Matchings. *Journal of Mathematical Chemistry*, **46**, 443-447. <https://doi.org/10.1007/s10910-008-9471-7>
- [34] 鞠阳. 富勒烯图的不变量及其统计分析[D]: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2012.
- [35] 王芳. 富勒烯图完美匹配数和共振型个数的比较[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2016.
- [36] 钱进. 富勒烯的 Kekulé 数下界及稳定性研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2020.
- [37] Lovász, L. and Plummer, M. (1986) Matching Theory. North-Holland Press.
- [38] Esperet, L., Kardoš, F., King, A.D., Král, D. and Norine, S. (2011) Exponentially Many Perfect Matchings in Cubic Graphs. *Advances in Mathematics*, **227**, 1646-1664. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.03.015>