Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(9), 4234-4237
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139404

Hans汉斯

三个重要矩阵秩的不等式证明

薛桃梅

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2024年8月14日；录用日期：2024年9月7日；发布日期：2024年9月18日

摘 要

在高等代数的广阔领域内，矩阵作为核心研究对象，其理论贯穿于学科始终。矩阵的秩，作为矩阵的核心属性，其性质与结论的研究至关重要。矩阵秩有许多重要的不等式，当然它们的证明方法也有很多，而本文中的三个不等式在很多课本中没有给出证明。本文聚焦于矩阵秩的三个关键不等式，它们反映了矩阵的和、乘积的秩与原矩阵秩之间的关系，主要从矩阵向量组的秩线性相关性及齐次线性方程组的相关性质等方面证明有关矩阵秩的三个重要不等式。

关键词

矩阵，秩的不等式

Proofs of Three Important Matrix Inequalities

Taomei Xue

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Aug. 14th, 2024; accepted: Sep. 7th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

In the broad field of higher algebra, matrix is the core research object, and its theory runs through the whole subject. As the core attribute of matrix, the rank of matrix is very important to study its properties and conclusions. There are many important inequalities for matrix rank, and of course there are many ways to prove them. This paper focuses on the three key inequalities of matrix rank, and proves the three important inequalities of matrix rank from the linear correlation of matrix rank and the correlation properties of homogeneous linear equations.

Keywords

Matrix, Inequality of Rank

文章引用: 薛桃梅. 三个重要矩阵秩的不等式证明[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4234-4237.
DOI: 10.12677/aam.2024.139404

1. 研究现状

近年来，矩阵秩不等式的研究取得了显著进展，主要体现在以下几个方面：

1) 理论研究的深化：学者们不断挖掘矩阵秩不等式的内在联系和深层次规律，提出了许多新的不等式和定理。例如，一些学者研究了 Sylvester 秩不等式，参考文献[1]利用矩阵秩的性质和分块矩阵运算技巧对 Sylvester 不等式进行了研究，给出了等号成立的充要条件，将其做了一定程度的推广，并得到了一些方便应用的充分条件，丰富了矩阵秩的性质。参考文献[2]应用线性方程组解的理论，可将矩阵秩的等式证明转化为线性方程组解空间相等的证明；将矩阵秩的不等式的证明转化为解空间包含的证明，从行列式性质法的证明转化为集合间关系的证明，不仅简化了矩阵秩的性质的证明，而且证明过程便于理解。

2) 应用领域的拓展：随着计算机技术和大数据的发展，矩阵秩不等式在信号处理、机器学习等领域的应用越来越广泛。通过构建合适的矩阵模型和优化算法，利用矩阵秩不等式解决实际问题成为了一种有效手段，参考文献[3]在数学表达式的基础上，采用区域比较法提出了基于矩阵不等式的外骨骼助行稳定性判据。

3) 交叉学科的融合：矩阵秩不等式的研究不再局限于数学领域内部，而是与其他学科(如计算机科学、物理学、生物学等)产生了广泛的交叉和融合。参考文献[4]构建了一类秩为 $n\,(n=5,6,7,8)$ 的 3-qubit 混合态，研究了这类混合态的 three-tangle，并且给出了相应的最优分解，最后验证了 CKW 不等式，这种交叉学科的融合不仅促进了矩阵秩不等式研究的深入发展，也为相关学科的研究提供了新的思路和方法。

2. 矩阵秩的两种定义

秩的定义[5] 1：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意一个极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩。

秩的定义 2：$s\times n$ 阶非零矩阵 A 的秩等于 A 的不为 0 的子式的最高阶数，记为 $rank(A)$。

3. 预备知识

定义 3 [5] [6]：数域 K 上 $s\times n$ 阶梯形矩阵的列秩 = 行秩 = 非零行的个数。

1) 由于 A 的行向量组是 A' 的列向量组，从而 A 的行秩 = A' 的列秩。即 $rank(A)=rank(A')$

2) 设 A 是 $m\times n$ 阶非零矩阵，则 $rankA\le\min(m,n)$。由矩阵秩的定义知：矩阵 A 的秩不大于 A 的行数，也不会大于 A 的列数。

定理：设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关，那么 $r\le s$。

命题：向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表示，则 $rank(I)\le rank(II)$。

证明：$\because$ 向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表示，则 (I) 的一个极大线性无关组 $(I)'$ 可由 (II) 的一个极大线性无关组 $(II)'$ 线性表示。有 $(I)\cong(I)'$，$(II)\cong(II)'$ 由上述定理可知，$(I)'$ 所含向量个数 $\le(II)'$ 所含向量个数。

引理 [7] [8]：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 有一基础解系：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$，$\Rightarrow AX=0$ 解空间的维度 $=r\Rightarrow R(A)=n-r$。

齐次线性方程组 $ABX=0$，如果 η 是 $ABX=0$ 的解向量，则有 $AB\eta=0$，即 $A(B\eta)=0$，所以 $B\eta$ 是 $AX=0$ 的解向量。

4. 有关矩阵秩的不等式的证明

1) 不等式 $rank(AB) \le \min(rankA, rankB)$

证明：

$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$ 的第 j 列是 $\begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{s1}b_{1j} + \cdots + a_{sn}b_{nj} \end{pmatrix} = b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n$，于是 $AB = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = (b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \cdots, b_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n)$ 从而 AB 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示。于是 $rank(AB) \le rank(A)$ $rank(AB) = rank\left[(AB)'\right] = rank(B'A') \le rank(B') = rank(B)$

因此有 $rank(AB) \le \min(rankA, rankB)$。

2) $rank(A+B) \le rankA + rankB$

证明： $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), B = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 均为 $s \times n$ 阶矩阵

$\Rightarrow A + B = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\beta}_n)$

令 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 分别是 A，B 列向量组的极大线性无关组，

显然 $\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r_1}, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示，

所以 $rank(A+B) \le \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r_1}, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$ **的秩** $\le rank(A) + rank(B)$**，证毕。**

3) $rank(AB) \ge rankA + rankB - n$

证明： 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times s$ 矩阵，齐次线性方程组 $BX = 0$ 有一基础解系：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_l$，所以 $R(B) = s - l$

又因为 $BX = 0$ 的解一定是 $ABX = 0$，所以 $ABX = 0$ 的基础解系一定包含 $BX = 0$ 的基础解系

设 $ABX = 0$ 的基础解系为 $\eta_1, \cdots, \eta_l, \eta_{l+1}, \cdots, \eta_{l+k}$，$ABX = 0$ 解空间的维度 $= l + k$，所以 $R(AB) = s - (l + k)$

如果，$k = 0$，所以 $R(AB) = R(B)$，又因为 $R(A) \le n$，所以 $R(AB) \ge R(B) + R(A) - n$

如果，$k > 0$，$R(B) = s - l$，$R(AB) = s - (l + k)$，所以 $R(B) - R(AB) = k$，

所以 $\eta_{l+1}, \cdots, \eta_{l+k}$ 共 k 个是 $ABX = 0$ 的解向量，所以 $AB\eta_{l+i} = 0 (i = 1, \cdots, k)$，所以 $A(B\eta_{l+i}) = 0$

因此 $B\eta_{l+1}, \cdots, B\eta_{l+k}$ 共 k 个是 $AX = 0$ 的解向量，$B\eta_{l+1}, \cdots, B\eta_{l+k} \subseteq AX = 0$ 的解空间，

所以 $B\eta_{l+1}, \cdots, B\eta_{l+k}$ 的秩 $\le AX = 0$ 解空间的维度，因此 $k \le n - R(A)$，所欲 $R(B) - R(AB) \le n - R(A)$ $\Rightarrow R(AB) \ge R(B) + R(A) - n$。

5. 总结

本文深入探讨了三个关键的矩阵秩不等式，这些不等式在多个数学领域展现出广泛的应用价值。前两个不等式的证明巧妙地利用了向量组线性相关性的原理。而第三个不等式的证明，则从齐次线性方程组解的性质出发，提供了一个新颖且深刻的视角，这不仅展示了矩阵秩与线性方程组之间的紧密联系，也为理解矩阵不等式提供了新的思路。本文的研究不仅加深了我们对矩阵不等式及其相关数学内容的理解，还进一步丰富了现有的理论框架，为后续的研究与应用奠定了坚实的基础。

矩阵秩的不等式是高等代数中的一个重点、难点，本文所做的这些还远远不能解决矩阵秩中许许多多复杂多变的问题，而且证明它们的方法也有很多，本人也会继续努力，希望在以后的学习与科研中能够更深入地研究，使得相关的基本知识以及应用越来越完善。

参考文献

[1] 生玉秋, 蒙惠芳. 矩阵秩的 Sylvester 不等式[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2021, 30(3): 5-8.

[2] 张姗梅, 刘耀军. 应用线性方程组理论证明矩阵秩的性质[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2024, 33(2): 62-68.

[3] 汪步云, 等. 下肢外骨骼机器人交互力激励估计与稳定性分析[J]. 机器人, 2024, 46(1): 54-67.

[4] 何淑娟. 量子信息中的量子纠缠问题[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京邮电大学, 2011.

[5] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[6] 何雪萍. 关于矩阵秩不等式问题的证明与应用[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1433-1447.

[7] 张禾瑞, 郝鈵新. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[8] 屈龙江, 李超, 戴清平. 三个矩阵秩不等式的多种证明[J]. 数学理论与应用, 2010, 30(2): 97-100.