Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(9), 4093-4098
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139390

Hans汉斯

一类带有多时滞的奇异Markov跳变正系统的稳定性分析

龙少华[1*]，顾文鑫[1]，吴云龙[2]

[1]重庆理工大学理学院，重庆
[2]长江师范学院数学与统计学院，重庆

收稿日期：2024年8月6日；录用日期：2024年8月27日；发布日期：2024年9月9日

摘　要

本文讨论了一类奇异Markov跳变正系统的稳定性。所讨论的系统带有多重时滞。借助Lyapnov函数，本文给出了一些充分条件，这些充分条件保证所讨论的系统是正系统。另外，给出的充分条件也保证所讨论的系统是正则、无脉冲和随机稳定的。

关键词

奇异系统，Markov跳变正系统，随机稳定，Lyapnov函数

Stability Analysis for a Class of Positive Singular Markov Jump Systems with Multiple Time Delays

Shaohua Long[1*], Wenxin Gu[1], Yunlong Wu[2]

[1]School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing
[2]School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Chongqing

Received: Aug. 6th, 2024; accepted: Aug. 27th, 2024; published: Sep. 9th, 2024

Abstract

This paper discusses the stability of a class of positive singular Markov jump systems. The systems considered in this paper have multiple time delays. By employing the Lyapunov function, this paper gives some sufficient conditions. These sufficient conditions ensure that the considered systems are

*通讯作者。

文章引用: 龙少华, 顾文鑫, 吴云龙. 一类带有多时滞的奇异 Markov 跳变正系统的稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4093-4098. DOI: 10.12677/aam.2024.139390

positive. In addition, the given sufficient conditions also ensure that the investigated systems are regular, impulse-free, and stochastically stable.

Keywords

Singular System, Positive Markov Jump System, Stochastic Stability, Lyapunov Function

1. 引言

奇异 Markov 跳变正系统是一类非常重要的系统，这类系统在一些经济系统、生物系统以及一些化学过程中有非常广泛的应用。不少的学者对奇异 Markov 跳变正系统以及一些相关正系统进行了研究。文献[1]讨论了 Markov 跳变正系统的随机稳定性以及其反馈控制器的设计方法，[2]-[4]则讨论了半 Markov 跳变正系统的随机稳定性以及其反馈控制器的设计方法。[5]-[7]研究了奇异正系统的稳定性。但是，[1]-[4]研究的系统不是奇异 Markov 跳变正系统，[5]-[7]研究的系统不含有 Markov 跳变参数。因此，[1]-[7]提出的方法不能用来解决奇异 Markov 跳变正系统的随机稳定性问题。

奇异 Markov 跳变正系统是一类比 Markov 跳变正系统和奇异系统更一般的系统。文献[8] [9]对奇异 Markov 跳变正系统的随机稳定性和反馈控制器进行了研究，[10]则对部分转移概率未知的奇异 Markov 跳变正系统的随机稳定性和反馈控制器进行了研究，[11] [12]也研究了奇异 Markov 跳变正系统的随机稳定性。值得一提的是，在[8]-[10]研究的系统中，导数项的系数是一个不变的奇异矩阵，而在[11] [12]研究的系统中，导数项的系数是与模态有关的奇异矩阵。因此，[11] [12]所研究的系统是一类更加复杂的系统。但是，[11] [12]所研究的系统的状态时滞不是与模态有关的。另外，[11] [12]所研究的系统也不含有分布时滞。

受以上讨论的启发，本文将研究一类更复杂的奇异 Markov 跳变正系统。我们所讨论的系统含有分布时滞且含有与模态有关的状态时滞。另外，系统的导数项的系数是与模态有关的奇异矩阵。与本文所考虑的系统有关的研究结果目前还非常少见。

本文将讨论一类如下形式的奇异 Markov 跳变系统：

$$\begin{cases} E_{z(t)}h'(t)=A_{z(t)}h(t)+B_{z(t)}h\left(t-g_{z(t)}\right)+C_{z(t)}h\left(t-k_{z(t)}\right)+D_{z(t)}\int_{t-u_{z(t)}}^{t}h(s)\mathrm{d}s \\ h(v)=\theta(v),\ v=\left[-\max\{g,k,u\},0\right] \end{cases} \tag{1}$$

在系统(1)中，$t>0$，$h(t)\in R^n$ 是系统的状态向量，$h'(t)$ 表示 $h(t)$ 的导数。$z(t)$ 在有限集合 $\hat{Z}=\{1,2,\cdots,Z\}$ 中取值，其中 Z 是一个大于等于 1 的正整数。另外，$z(t)$ 表示一个右连续的 Markov 过程，从状态 i 到状态 j 的转移速率为

$$P\{z(t+v)=j\,|\,z(t)=i\}=\begin{cases} p_{ij}v+\mathrm{o}(v), & i\neq j \\ 1+p_{ii}v+\mathrm{o}(v), & i=j \end{cases} \tag{2}$$

在(2)中，当 $i\neq j$ 时，$p_{ij}\geq 0$。当 $i=j$ 时，p_{ii} 满足 $p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{iZ}=0$。当 $v\to 0^+$ 时，$\mathrm{o}(v)$ 是 v 的高阶无穷小。根据式(2)，我们可得该 Markov 过程的转移速率矩阵为

$$H=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1Z} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{Z1} & p_{Z1} & \cdots & p_{ZZ} \end{bmatrix} \tag{3}$$

另外，在(1)中，对于任意的 $z(t)=i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，$E_{z(t)}$、$A_{z(t)}$、$B_{z(t)}$ 和 $C_{z(t)}$ 都是已知的 n 阶实矩阵。对于任意的 $z(t)=i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，$E_{z(t)}$ 都是不可逆矩阵且秩都等于 σ，其中 $0<\sigma<n$。$g_{z(t)}$、$k_{z(t)}$ 和 $u_{z(t)}$ 都是大于 0 的实数。我们记 $g=\max\{g_1,g_2,\cdots,g_Z\}$、$k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_Z\}$ 以及 $u=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_Z\}$。在(1)中，$g_{z(t)}$、$k_{z(t)}$ 和 $u_{z(t)}$ 代表系统的时滞。$\phi(v)\left(v\in\left[-\max\{g,k,u\},0\right]\right)$ 表示系统的初始条件且是连续的。

假设 1：在本文中，我们假定存在矩阵 $M_i(i\in Z)$ 和 Y 满足

$$\bar{E}_i=M_iE_iY=\begin{bmatrix} I_\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ \left(i\in\hat{Z}\right) \tag{4}$$

2. 定义及其引理

本文需要用到下面的一些定义。

定义 1 [11]：如果对于每一个 $l\in\{1,2,\cdots,Z\}$，$\det(vE_l-A_l)$ 都不恒等于 0，则称系统(1)是正则的。

定义 2 [11]：如果对于每一个 $l\in\{1,2,\cdots,Z\}$，$\deg(\det(vE_l-A_l))=rank(E_l)$ 都成立，则称系统(1)是无脉冲的。

定义 3 [12]：假定 $h(v)=\phi(v)\succ=0\left(v\in\left[-\max\{g,k,u\},0\right]\right)$。如果对于任意的 $t>0$，系统(1)的解 $h(t)$ 满足条件 $h(t)\succ=0$，则称系统(1)是一个正系统。

定义 4 [12]：在初始条件 $\phi(v)\left(v\in\left[-\max\{g,k,u\},0\right]\right)$ 和 $z(0)=z_0$ 下，如果系统(1)的解 $h(t)$ 满足条件 $\varepsilon\left(\int_0^\infty\|h(t)\|_1\,\mathrm{d}t\right)<\infty$，则称系统(1)是随机稳定的。

注 1：$A\succ=0$ 表示矩阵 A 的每一个元素都大于等于 0。$A\succ0$ 表示矩阵 A 的每一个元素都大于 0。$A\prec=0$ 表示矩阵 A 的每一个元素都小于等于 0。$A\prec0$ 表示矩阵 A 的每一个元素都小于 0。$\det(A)$ 表示矩阵 A 的行列式。$\deg(\cdot)$ 表示一个多项式的度。

注 2：$\varepsilon(A)$ 表示随机事件 A 的数学期望。

注 3：$\|h(t)\|_1$ 表示向量 $h(t)$ 的各个元素的绝对值之和。

在本文中，我们还需用到下面的引理。

引理 1 [12]：令 Λ 为随机过程 $(h(t),z(t),t)$ 的弱无穷小算子。那么对任意的 $z(t)=i\in\hat{Z}$，下式成立：

$$\Lambda V(t)=\lim_{\Delta\to0^+}\frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{E}\{V(t+\Delta)\,|\,z(t)=i\}-V(t)\,|\,z(t)=i\right] \tag{5}$$

3. 主要结果

令

$$\begin{aligned} &\bar{A}_i=M_iA_iN=\begin{bmatrix} \bar{A}_{i1} & \bar{A}_{i2} \\ \bar{A}_{i3} & \bar{A}_{i4} \end{bmatrix}、\bar{B}_i=M_iB_iN=\begin{bmatrix} \bar{B}_{i1} & \bar{B}_{i2} \\ \bar{B}_{i3} & \bar{B}_{i4} \end{bmatrix}、\\ &\bar{C}_i=M_iC_iN=\begin{bmatrix} \bar{C}_{i1} & \bar{C}_{i2} \\ \bar{C}_{i3} & \bar{C}_{i4} \end{bmatrix}、\bar{D}_i=M_iD_iN=\begin{bmatrix} \bar{D}_{i1} & \bar{D}_{i2} \\ \bar{D}_{i3} & \bar{D}_{i4} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

另外，如果 $\bar{A}_{i4}$ 可逆，假设存在矩阵 $\bar{M}_i(i\in Z)$ 和 $\bar{N}$ 满足

$$\hat{E}_i=\bar{M}_iE_i\bar{N}=\begin{bmatrix}I_\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}、\hat{A}_i=\bar{M}_iA_i\bar{N}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{i1} & 0\\ 0 & \hat{A}_{i4}\end{bmatrix}、\hat{B}_i=\bar{M}_iB_i\bar{N}=\begin{bmatrix}\hat{B}_{i1} & \hat{B}_{i2}\\ \hat{B}_{i3} & \hat{B}_{i4}\end{bmatrix}、$$

$$\hat{C}_i=\bar{M}_iC_i\bar{N}=\begin{bmatrix}\hat{C}_{i1} & \hat{C}_{i2}\\ \hat{C}_{i3} & \hat{C}_{i4}\end{bmatrix}、\hat{D}_i=\bar{M}_iD_i\bar{N}=\begin{bmatrix}\hat{D}_{i1} & \hat{D}_{i2}\\ \hat{D}_{i3} & \hat{D}_{i4}\end{bmatrix}\tag{7}$$

下面的定理给出了一个充分条件。该充分条件保证系统(1)是正系统。另外，该充分条件也保证系统(1)是正则、无脉冲和随机稳定的。

定理 1. 令 $N=Z$ 和 $\bar{p}=\max\limits_{i,j\in\hat{Z}}\left\{\left|p_{ij}\right|\right\}$。如果系统(1)满足如下条件：

(i) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\bar{A}_{i4}$ 可逆；

(ii) $\bar{N}^{-1}\succ 0$ 以及对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{A}_{i1}$ 是梅兹勒矩阵；

(iii) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{B}_{i1}\succ=0$、$\hat{B}_{i2}\succ=0$、$\hat{C}_{i1}\succ=0$、$\hat{C}_{i2}\succ=0$、$\hat{D}_{i1}\succ=0$、$\hat{D}_{i2}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i3}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i4}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i3}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i4}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{D}_{i3}\succ=0$ 以及 $-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{D}_{i4}\succ=0$；

(vi) 存在 n 维向量 $\alpha_i\left(i\in\hat{Z}\right)$、$\beta_i\succ 0\left(i\in\hat{Z}\right)$、$\gamma_i\succ 0\left(i\in\hat{Z}\right)$ 和 $\pi\succ 0$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$ 下面式子都成立：

$$E_i^{\mathrm{T}}\alpha_i\succ=0\tag{8}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}\alpha_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}E_j^{\mathrm{T}}\alpha_j+\beta_i+\gamma_i+u\pi+\bar{p}\sum_{j=1}^{N}g_j\beta_j+\bar{p}\sum_{j=1}^{N}k_j\gamma_j\prec 0\tag{9}$$

$$B_i^{\mathrm{T}}\alpha_i-\beta_i\prec 0\tag{10}$$

$$C_i^{\mathrm{T}}\alpha_i-\gamma_i\prec 0\tag{11}$$

$$D_i^{\mathrm{T}}\alpha_i-\pi\prec 0\tag{12}$$

那么(i)系统(1)是一个正系统；

(ii)系统(1)是正则和无脉冲的；

(iii)系统(1)是随机稳定的。

证明： 注意对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\bar{A}_{i4}$ 可逆。那么，和文献[12]中的证明相类似，我们可得系统(1)是正则和无脉冲的。

注意 $\bar{N}^{-1}\succ 0$ 以及对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{A}_{i1}$ 是梅兹勒矩阵。另外，注意对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{B}_{i1}\succ=0$、$\hat{B}_{i2}\succ=0$、$\hat{C}_{i1}\succ=0$、$\hat{C}_{i2}\succ=0$、$\hat{D}_{i1}\succ=0$、$\hat{D}_{i2}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i3}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i4}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i3}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i4}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{D}_{i3}\succ=0$ 以及 $-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{D}_{i4}\succ=0$。那么，和文献[12]中的证明相类似，我们可得系统(1)是正系统。

下面，我们利用如下的李雅普诺夫泛函来证明系统(1)是随机稳定的。

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t)+V_5(t)+V_6(t)\tag{13}$$

其中

$$V_1(t)=h^{\mathrm{T}}(t)E_{z(t)}^{\mathrm{T}}\alpha_{z(t)}$$

$$V_2(t)=\int_{t-g_{z(t)}}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\beta_{z(t)}\mathrm{d}s$$

$$V_3(t)=\int_{t-k_{z(t)}}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\gamma_{z(t)}\mathrm{d}s$$

$$V_4(t)=\overline{p}\sum_{j=1}^{N}\int_{-g_j}^{0}\int_{t+\theta}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\beta_j\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

$$V_5(t)=\overline{p}\sum_{j=1}^{N}\int_{-k_j}^{0}\int_{t+\theta}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\gamma_j\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

$$V_6(t)=\int_{-u}^{0}\int_{t+\theta}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\pi\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

由上式我们可得

$$\Lambda V_1(t)=\left[h'(t)\right]^{\mathrm{T}}E_i^{\mathrm{T}}\alpha_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}h^{\mathrm{T}}(t)E_j^{\mathrm{T}}\alpha_j$$

$$=\left[A_ih(t)+B_ih(t-g_i)+C_ih(t-k_i)+D_i\int_{t-u_i}^{t}h(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}\alpha_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}h^{\mathrm{T}}(t)E_j^{\mathrm{T}}\alpha_j$$

$$\Lambda V_2(t)=h^{\mathrm{T}}(t)\beta_i-h^{\mathrm{T}}(t-g_i)\beta_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\int_{t-g_j}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\beta_j\mathrm{d}s$$

$$\Lambda V_3(t)=h^{\mathrm{T}}(t)\gamma_i-h^{\mathrm{T}}(t-k_i)\gamma_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\int_{t-k_j}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\gamma_j\mathrm{d}s$$

$$\Lambda V_4(t)=\overline{p}\sum_{j=1}^{N}h^{\mathrm{T}}(t)g_j\beta_j-\overline{p}\sum_{j=1}^{N}\int_{t-g_j}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\beta_j\mathrm{d}s$$

$$\Lambda V_5(t)=\overline{p}\sum_{j=1}^{N}h^{\mathrm{T}}(t)k_j\gamma_j-\overline{p}\sum_{j=1}^{N}\int_{t-k_j}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\gamma_j\mathrm{d}s$$

$$\Lambda V_6(t)=h^{\mathrm{T}}(t)u\pi-\int_{t-u}^{t}h^{\mathrm{T}}(s)\pi\mathrm{d}s$$

令 $\Theta_i=A_i^{\mathrm{T}}\alpha_i+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}E_j^{\mathrm{T}}\alpha_j+\beta_i+\gamma_i+\overline{p}\sum_{j=1}^{N}g_j\beta_j+\overline{p}\sum_{j=1}^{N}k_j\gamma_j$。由上可得，存在 $w>0$ 满足

$$\Lambda V(t)\le h^{\mathrm{T}}(t)\Theta_i\le -w\left\|h(t)\right\|_1 \tag{14}$$

根据(14)，我们可得 $\varepsilon\left(\int_0^{\infty}\left\|h(t)\right\|_1\mathrm{d}t\right)<\infty$，即系统(1)是随机稳定的。证毕。

在系统(1)中，如果对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $D_i=0$，那么系统(1)变成了下面的系统：

$$\begin{cases}E_{z(t)}h'(t)=A_{z(t)}h(t)+B_{z(t)}h\left(t-g_{z(t)}\right)+C_{z(t)}h\left(t-k_{z(t)}\right)\\ h(v)=\theta(v),\ v=\left[-\max\{g,k\},0\right]\end{cases} \tag{15}$$

仿照定理 1，我们可得下面的推论。

推论 1. 令 $N=Z$ 和 $\overline{p}=\max\limits_{i,j\in\hat{Z}}\left\{\left|p_{ij}\right|\right\}$。如果系统(15)满足如下条件：

(i) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\overline{A}_{i4}$ 可逆；

(ii) $\overline{N}^{-1}\succ 0$ 以及对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{A}_{i1}$ 是梅兹勒矩阵；

(iii) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$，都有 $\hat{B}_{i1}\succ=0$、$\hat{B}_{i2}\succ=0$、$\hat{C}_{i1}\succ=0$、$\hat{C}_{i2}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i3}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{B}_{i4}\succ=0$、$-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i3}\succ=0$ 以及 $-\hat{A}_{i4}^{-1}\hat{C}_{i4}\succ=0$；

(vi) 存在 n 维向量 $\alpha_i\left(i\in\hat{Z}\right)$、$\beta_i\succ 0\left(i\in\hat{Z}\right)$ 和 $\gamma_i\succ 0\left(i\in\hat{Z}\right)$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,Z\}$ 下面式子都成立：

$$E_i^{\mathrm{T}}\alpha_i\succ=0 \tag{16}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}\alpha_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} E_j^{\mathrm{T}} \alpha_j + \beta_i + \gamma_i + \overline{p}\sum_{j=1}^{N} g_j \beta_j + \overline{p}\sum_{j=1}^{N} k_j \gamma_j \prec 0 \tag{17}$$

$$B_i^{\mathrm{T}}\alpha_i - \beta_i \prec 0 \tag{18}$$

$$C_i^{\mathrm{T}}\alpha_i - \gamma_i \prec 0 \tag{19}$$

那么(i)系统(15)是一个正系统；

(ii)系统(15)是正则和无脉冲的；

(iii)系统(15)是随机稳定的。

4. 总结

本文对一类带有多时滞的奇异 Markov 跳变系统的稳定性进行了分析。我们首先给出了所讨论的系统是正系统的充分条件。其次，我们给出了所讨论的系统正则和无脉冲的充分条件。最后，我们利用 Lyapunov 函数方法给出了所讨论的系统随机稳定的一些充分条件。在以后的研究中，我们将进一步研究带有多时滞的中立型奇异 Markov 跳变正系统的稳定性。

基金项目

重庆市教育委员会科技项目－科学技术研究项目(青年) (KJQN202101129)。

参考文献

[1] Li, S., Zhang, J., Chen, Y. and Zhang, R. (2018) Robust Stochastic Stabilization for Positive Markov Jump Systems with Actuator Saturation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **38**, 625-642. https://doi.org/10.1007/s00034-018-0878-5

[2] Wang, H., Qi, W., Zhang, L., Cheng, J. and Kao, Y. (2020) Stability and Stabilization for Positive Systems with Semi-Markov Switching. *Applied Mathematics and Computation*, **379**, Article 125252. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125252

[3] Wang, L., Wu, Z. and Shen, Y. (2021) Asynchronous Mean Stabilization of Positive Jump Systems with Piecewise-Homogeneous Markov Chain. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **68**, 3266-3270. https://doi.org/10.1109/tcsii.2021.3064388

[4] Li, L., Qi, W., Chen, X., Kao, Y., Gao, X. and Wei, Y. (2018) Stability Analysis and Control Synthesis for Positive Semi-Markov Jump Systems with Time-Varying Delay. *Applied Mathematics and Computation*, **332**, 363-375. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.055

[5] Ait Rami, M. and Napp, D. (2014) Positivity of Discrete Singular Systems and Their Stability: An LP-Based Approach. *Automatica*, **50**, 84-91. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.10.011

[6] Cui, Y., Feng, Z., Shen, J. and Chen, Y. (2017) L_∞-Gain Analysis for Positive Singular Time-Delay Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **354**, 5162-5175. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.05.006

[7] Cui, Y., Shen, J., Feng, Z. and Chen, Y. (2018) Stability Analysis for Positive Singular Systems with Time-Varying Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 1487-1494. https://doi.org/10.1109/tac.2017.2749524

[8] Thuan, D.D. and Thu, N.T. (2024) Stability and Stabilizability of Positive Switched Discrete-Time Linear Singular Systems. *Systems & Control Letters*, **185**, Article 105725. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105725

[9] Wang, J., Gao, A., Wang, K., Yang, J. and Li, Q. (2024) Event-Based Filter Design for Singular Positive Markov Jump Systems with Parameter Uncertainty and Measurement Delay. *Journal of the Franklin Institute*, **361**, Article 106818. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.106818

[10] Qi, W. and Gao, X. (2015) State Feedback Controller Design for Singular Positive Markovian Jump Systems with Partly Known Transition Rates. *Applied Mathematics Letters*, **46**, 111-116. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.02.016

[11] Zhang, D., Du, B., Jing, Y. and Sun, X. (2022) Investigation on Stability of Positive Singular Markovian Jump Systems with Mode-Dependent Derivative-Term Coefficient. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **52**, 1385-1394. https://doi.org/10.1109/tsmc.2020.3020271

[12] Zhang, D., Zhang, Q. and Du, B. (2017) Positivity and Stability of Positive Singular Markovian Jump Time-Delay Systems with Partially Unknown Transition Rates. *Journal of the Franklin Institute*, **354**, 627-649. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.09.013