

一类链环的HOMFLY多项式

刘芷夷

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年7月23日; 录用日期: 2024年8月16日; 发布日期: 2024年8月23日

摘要

纽结理论中主要研究对象为纽结和链环, 对它们的研究是通过所对应的纽结投影图来展开的。纽结多项式是一类以多项式表达的纽结不变量, 例如Alexander多项式和Jones多项式。HOMFLY多项式是一个双变量的Laurent多项式, 两个变量分别是 m 和 l , 是继Jones多项式之后, 又一计算纽结不变量的多项式。Brunnian链环是一类特殊的链环, 拆去任何单个分量都会生成一个平凡链环。本文主要结合HOMFLY多项式的定义和性质, 应用拆接关系研究计算Brunnian链环的HOMFLY多项式。

关键词

HOMFLY多项式, Brunnian链环, 纽结不变量

The HOMFLY Polynomials of Class of Links

Zhiyi Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 23rd, 2024; accepted: Aug. 16th, 2024; published: Aug. 23rd, 2024

Abstract

The main research objects in knot theory are knots and links, but the research on them is carried out through the corresponding knot projection diagram. The knot polynomial refers to a class of knot invariant expressed by polynomials, such as the Alexander polynomial and the Jones polynomial. The HOMFLY polynomial is a bivariate Laurent polynomial with two variables m and l , which is another important polynomial for calculating knots after the Jones polynomial. Brunnian link is a special class of link in which the complement of any one component is a trivial link. In this paper, we state and calculate the HOMFLY polynomials of Brunnian link by using the definition and properties of HOMFLY polynomials and the disconnection relation.

文章引用: 刘芷夷. 一类链环的 HOMFLY 多项式[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 4055-4063.

DOI: 10.12677/aam.2024.138387

Keywords

HOMFLY Polynomial, Brunnian Link, Knot Invariant

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

纽结理论是拓扑学中的一个不可或缺的区域分支。在纽结理论中,把纽结和链环作为主要研究对象,从纽结投影图开始对它们展开研究。纽结(链环)多项式是一个纽结不变量,且是以系数符合给定纽结(链环)性质的多项式。1985年, Jones 为纽结或链环定义了一个新的多项式不变量。之后 Peter Freyd、David Yette、Jim Hoste、W. B. R. Lickorish、Kenneth C. Millett、Ocnean, 几乎在同一时间独立地提出了一种新的关于一个有向纽结或链环的双变量多项式——HOMFLY 多项式。HOMFLY 多项式为纽结相关研究带来了新进展和新成就, HOMFLY 多项式与 Alexander 多项式和 Jones 多项式有某些联系,它在一定程度上可以说是 Alexander 多项式和 Jones 多项式的一般形式,纽结的 Alexander 多项式或 Jones 多项式可以直接由 HOMFLY 多项式得出。

1892年, Hermann Brunn 引入了一类非平凡链环,这些链环具有这样的属性:拆去任何单个分量都会生成一个平凡链环,这样的链环被称作 Brunnian 链环。换句话说,如果每一个 $(n-1)$ -分量的子链都是平凡的,则一个有 n 个分量的链环就是 Brunnian 链环。由于 Brunnian 链环的任意真子链环都是平凡的,链环构造具有特殊性,所以 Brunnian 链环在学术上的性质被利用进行广泛探究,会根据 Brunnian 链环的概念去对链环进行新的性质的定义,比如:一个有 n 个分量的链环,如果拆去任何一个分量使 L 平凡化,则可以说 L 是 Brunnian 的。本文主要研究这一类 Brunnian 链环,利用 HOMFLY 多项式的拆接关系,对链环投影图的交叉点依次进行拆接,重复操作,得到该链环 HOMFLY 多项式的递推关系式,进而计算出 HOMFLY 多项式。

本文的组织结构为:在第2节中,回顾了一些关于纽结的基本知识,有关 HOMFLY 多项式的定义及性质,同时还简单介绍了 Brunnian 链环。在第3节中,利用 HOMFLY 多项式的拆接关系和 Brunnian 链环的性质计算 Brunnian 链环的 HOMFLY 多项式。第4节中,对本文的主要研究成果进行总结。

2. 预备知识

2.1. 纽结与链环

纽结[1] 设 K 为 S^3 中的一个简单闭曲线,且 $K \cong S^1$,则称 K 为一个纽结。若给出 K 一个方向,那么 K 为定向纽结,如图1是平凡结。

链环[2] 将若干个互不相交的圆周 $S_i^1 (1 \leq i \leq n, n > 1)$ 嵌入球面 S^3 或者三维欧氏空间 R^3 中,这些圆周形成的空间图称为链环,记 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$,每个 $K_i (i=1,2,\dots,n)$ 为链环 L 的一个分支, n 为链环 L 的分支数。如果给链环 L 每个分支一个方向,则称该链环为定向链环。

注1[1] 纽结是特殊的链环,其分支数为1。

注2[1] 链环 L 为平凡链环: L 的每个分支 K_i 都是平凡结。图2为平凡链环。

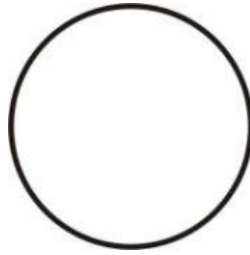


Figure 1. Trivial knot
图 1. 平凡结

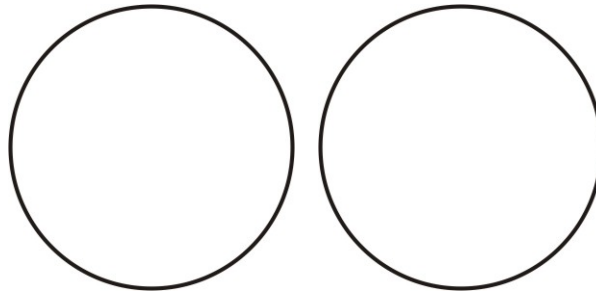


Figure 2. Trivial link
图 2. 平凡链环

2.2. 纽结(链环)的投影图[3]

对于一个纽结(链环), 选取一个合适的平面, 选择一个合适的方向对其进行投影, 把三维空间中的纽结(链环)正则投影在该平面上, 得到的投影图满足: (1) 只有有限多个交叉点; (2) 每个交叉点都是二重点; (3) 在上行线和下行线处的投影都是互相穿越交叉的, 则称为纽结(链环)投影图。

注: 由于所选取平面不同, 得到的投影图也不相同。

2.3. Reidemeister Move (R 变换) [4] [5]

R 变换是纽结理论中最基本的变换, 它可以概括三维空间中纽结所有的拓扑情形。 R 变换概括为改变纽结正则投影图的三种方式, 而每种方式都会改变交叉点之间的关系。这三种变换形式具体为 R_1 变换、 R_2 变换、 R_3 变换。Reidemeister 变换的变换形式如图 3 所示。

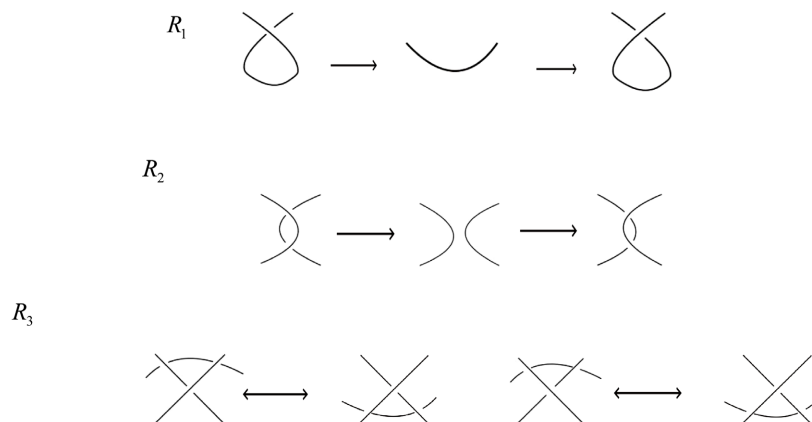


Figure 3. Reidemeister moves
图 3. Reidemeister 变换

2.4. 纽结的分离并[6]

在链环 L 的补空间 $R^3 - L$ 中, 存在一个二维球面 S , 将其嵌入 S 可将链环分为两个不同的连通分支, 并且这两个分支分布在球面 S 的两侧, 则称链环 L 为可分离的。如果将所得的这两个不同的连通分支记为 $A_i, i=1,2$, 令 $L_i = L \cap A_i, i=1,2$, 称 L 为 L_1 和 L_2 的分离并, 记作 $L = L_1 \cup L_2$ 。

2.5. HOMFLY 多项式[7]-[9]

2.5.1. HOMFLY 多项式的定义

HOMFLY 多项式是一种双变量的多项式纽结不变量, 并且是第一个可以同时推广出 Jones 多项式和 Alexander 多项式的多项式。

HOMFLY 多项式的计算满足如下几个规则

规则 1 不考虑链环的方向, 平凡结的 HOMFLY 多项式为 1, 即 $P(O) = 1$ 。

规则 2 $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$, 其中 L_+, L_-, L_0 为三个可定向链环, 且除了图 4 所示的部分, 链环的其余部分均相同。

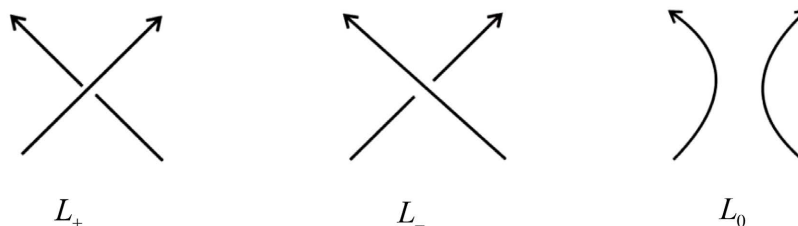


Figure 4. L_+, L_- and L_0

图 4. L_+, L_- 和 L_0

2.5.2. HOMFLY 多项式的性质

性质 1 $P(L \cup O) = -(l + l^{-1}) m^{-1} P(L)$ 。

性质 2 若链环 L 为 L_1 和 L_2 的分离并, 则 $P(L) = -(l + l^{-1}) m^{-1} P(L_1) P(L_2)$ 。

性质 3 $P(L_1 \# L_2) = P(L_1) P(L_2)$ 。

性质 4 L^* 为可定向链环 L 的镜像, 则 $P_{L^*}(l, m) = P_L(l^{-1}, m)$, 即 $P(L^*)$ 为 $P(L)$ 中 l 替换为 l^{-1} 。

性质 5 令 $-L$ 为可定向链环 L 中每个分支反向, 则 $P(-L) = P(L)$ 。

2.6. Brunnian 链环

构造[10] Brunnian 链环是一个非平凡链环, 使得每个子链环都链环同伦于平凡链环。例如: 3-分支的 Brunnian 链环是 Borromean 链环, 图 5 为一个 n -分支的 Brunnian 链环 B_n 。

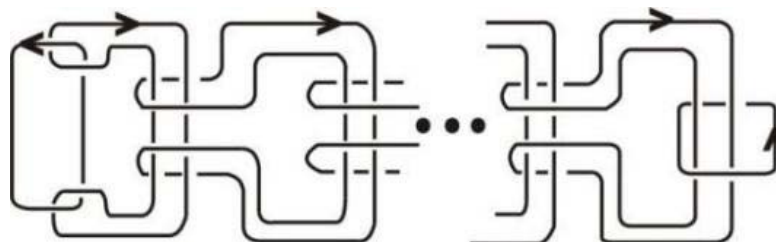


Figure 5. Brunnian link with n components B_n

图 5. n -分支的 Brunnian 链环 B_n

例： $n=2$ 时，与 n -分支的 Brunnian 链环 B_n 相对应的 2-分支的 Brunnian 链环 B_2 ，其对应的投影图如图 6 所示。

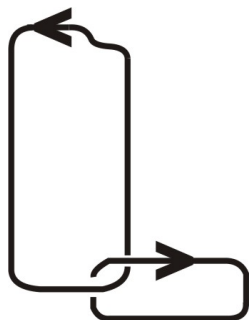


Figure 6. Brunnian link with 2 components B_2
图 6. 2 分支的 Brunnian 链环 B_2

3. Brunnian 链环 B_n 的 HOMFLY 多项式

定理 3.1 Brunnian 链环 B_n 的 HOMFLY 多项式的表达式为

$$P(B_n) = (l+l^{-1})^{n-3} (m^3 - 2m) \left((l+l^{-1})^2 (1-m^2) + m^4 \right) + (1-m^2) \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{n-1} + \sum_{i=3}^{n-1} \left[(l+l^{-1})(m^3 - 2m) \right]^{n-i-1} \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^i (l+l^{-1})^2 (m^2 - 1)^2.$$

证明 应用 HOMFLY 多项式的拆接关系，拆接 B_n 最右边分支上左上角的交叉点，得到两个新的链环，将这两个链环分别记为 B'_n, B''_n ，如图 7 所示。

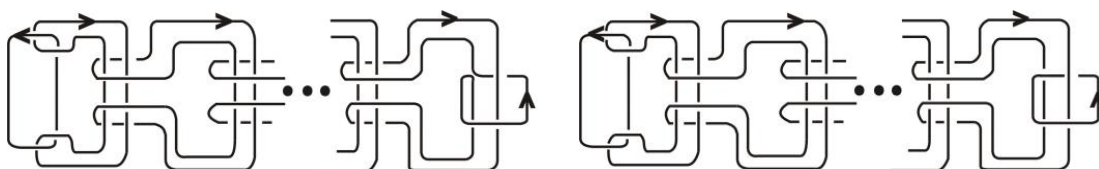


Figure 7. B'_n, B''_n
图 7. B'_n, B''_n

可得到拆接关系式

$$lP(B_n) + l^{-1}P(B''_n) + mP(B'_n) = 0. \tag{3.1}$$

然后对 B'_n 应用一系列 R 变换，得到链环 B_n^{**} ，如图 8 所示。

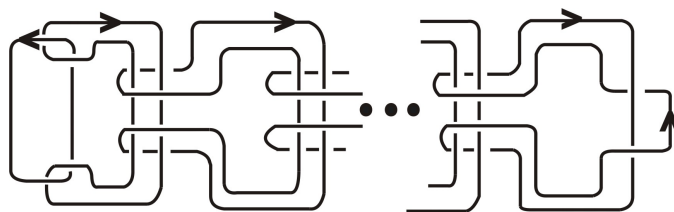


Figure 8. B_n^{**}
图 8. B_n^{**}

再对 B_n'' 应用一系列 R 变换, 此时 B_n'' 等价于 $n-2$ 个平凡结和一个 Hopf 链环的并, 根据 HOMFLY 多项式的性质(1)可得到 B_n'' 的 HOMFLY 多项式的表达式, 即

$$P(B_n'') = \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{n-2} \cdot P(\text{Hopf link}). \tag{3.2}$$

下面计算(3.2)中 Hopf 链环的 HOMFLY 多项式, 对上述 Hopf 链环中最上面的上交叉点应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 如图 9 所示。

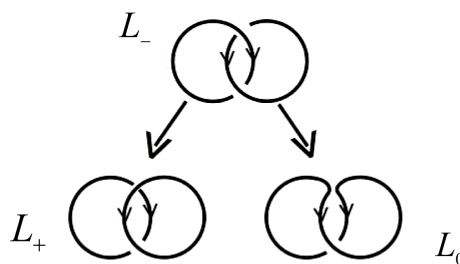


Figure 9. The skein relation of the Hopf link

图 9. Hopf 链环的拆接关系式

经过一系列 R 变换, L_+ 等价于两个平凡结的并, L_0 等价于一个平凡结。

则有拆接关系式

$$l^{-1}P(\text{Hopf link}) + lP(\text{two circles}) + mP(\text{one circle}) = 0. \tag{3.3}$$

整理(3.3)有

$$P(\text{Hopf link}) = -l^2 \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right] - ml = l^3m^{-1} + l(m^{-1} - m). \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.2)得

$$P(B_n'') = \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{n-2} \left[l^3m^{-1} + l(m^{-1} - m) \right]. \tag{3.5}$$

计算出 B_n'' 的 HOMFLY 多项式后, 接着分析 B_n^* 。对链环 B_n^* 右上方的交叉点应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 得到 A_{n-1} 和 L_{n-1} , 如图 10 所示。

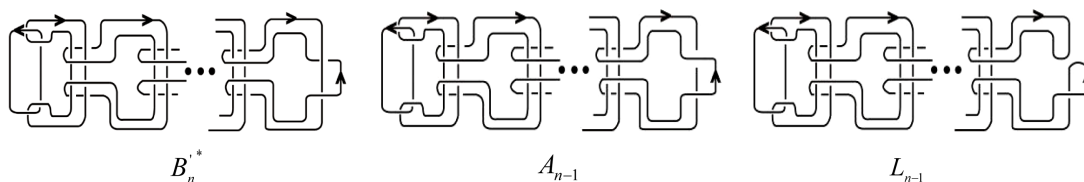


Figure 10. The skein relation of B_n^*

图 10. B_n^* 的拆接关系式

那么就有拆接关系式

$$l^{-1}P(B_n^*) + lP(A_{n-1}) + mP(L_{n-1}) = 0. \tag{3.6}$$

注 1 其中 A_{n-1} 表示 $n-1$ 个平凡结的并, 根据 HOMFLY 多项式的性质(1), 有 $P(A_{n-1}) = \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{n-2}$ 。

注 2 将 B_n 最右侧的分支增加一个, 并且这个新增的分支与链环 B_n 最右侧分支的连接方式一致, 方

向相反, 令其为 L_n 。

对(3.1)、(3.5)和(3.6)进行整理, 得到 $P(B_n)$ 关于 $P(L_n)$ 和 $P(A_{n-1})$ 的表达式

$$P(B_n) = mlP(A_{n-1}) + m^2P(L_{n-1}) - \left[-(l+l^{-1})m^{-1}\right]^{n-2} \left[lm^{-1} + l^{-1}(m^{-1} - m)\right]. \quad (3.7)$$

其中, 由注 1 可知 $P(A_{n-1}) = \left[-(l+l^{-1})m^{-1}\right]^{n-2}$, 下面只需再计算出 $P(L_{n-1})$ 即可。

接下来, 应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 拆接链环 L_{n-1} 的右上角的端点 C, 得到 L'_{n-1} 和 L''_{n-1} , 如图 11 所示。

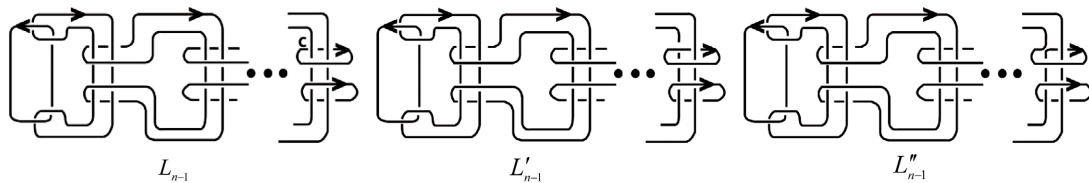


Figure 11. The skein relation of L_{n-1}

图 11. L_{n-1} 的拆接关系式

得到拆接关系式

$$l^{-1}P(L_{n-1}) + lP(L'_{n-1}) + mP(L''_{n-1}) = 0. \quad (3.8)$$

再次应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 分别对 L'_{n-1} 和 L''_{n-1} 的右上端点进行拆接, 得到 B_{n-1} 、 $B_{n-1} \cup O$ 和 B_{n-1} 、 $L_{n-1} \cup O$ 。如图 12 所示。

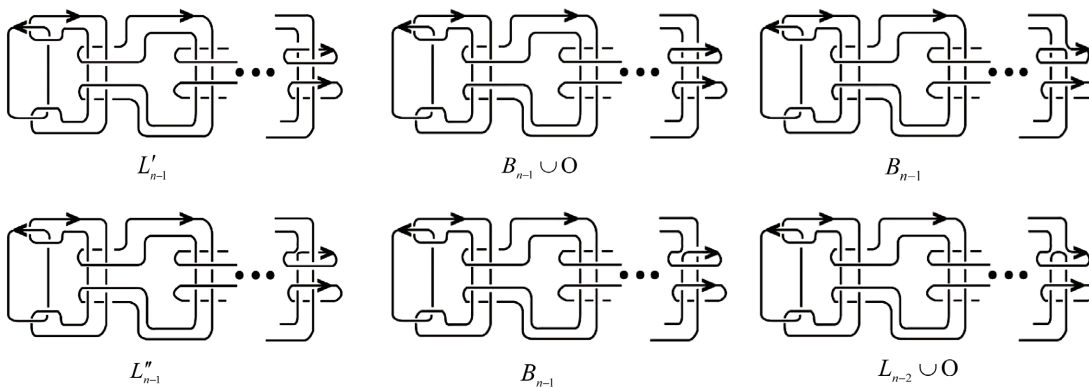


Figure 12. The skein relation of L'_{n-1} and L''_{n-1}

图 12. L'_{n-1} 和 L''_{n-1} 的拆接关系式

得到拆接关系式

$$lP(L'_{n-1}) + l^{-1}P(B_{n-1} \cup O) + mP(B_{n-1}) = 0. \quad (3.9)$$

和

$$lP(L''_{n-1}) + l^{-1}P(B_{n-1}) + mP(L_{n-2} \cup O) = 0. \quad (3.10)$$

整理(3.8)~(3.10), 可得 $P(L_{n-1})$ 的表达式

$$P(L_{n-1}) = (l+l^{-1})(m-m^{-1})P(B_{n-1}) - m(l+l^{-1})P(L_{n-2}). \quad (3.11)$$

将(3.11)中的 n 替换为 $n+1$, 即得到 $P(L_n)$ 的表达式

$$P(L_n) = (l+l^{-1})(m-m^{-1})P(B_n) - m(l+l^{-1})P(L_{n-1}). \quad (3.12)$$

将(3.7)的结果代入(3.12), 整理得 $P(L_n)$ 的递推关系式为

$$\begin{aligned} P(L_n) &= (l+l^{-1})(m-m^{-1})\left((l+l^{-1})(m-m^{-1})P(A_{n-1}) + m^2P(L_{n-1})\right) - m(l+l^{-1})P(L_{n-1}) \\ &= (l+l^{-1})(m^3-2m)P(L_{n-1}) + (l+l^{-1})^2(m-m^{-1})^2P(A_{n-1}), \end{aligned}$$

令 $a = (l+l^{-1})(m^3-2m)$, $b_n = (l+l^{-1})^2(m-m^{-1})^2P(A_{n-1})$, 则上式等价于

$$P(L_n) = aP(L_{n-1}) + b_n.$$

将上式中 n 取 $3, 4, \dots, n-1$, 可依次推出

$$P(L_{n-1}) = aP(L_{n-2}) + b_{n-1}, \quad (3.13)$$

⋮

$$P(L_3) = aP(L_2) + b_3. \quad (3.14)$$

对上述式子进行整理, 可得出

$$P(L_n) = a^{n-2}P(L_2) + b_n + ab_{n-1} + \dots + a^{n-3}b_3, \quad (3.15)$$

其中 $P(L_2) = P(\text{Diagram})$.

应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 拆接 $P(L_2)$ 最上面的交叉点, 得到拆接关系式

$$l^{-1}P(\text{Diagram}) + lP(\text{Diagram}) + mP(\text{Diagram}) = 0.$$

整理得

$$P(\text{Diagram}) = -l^2P(\text{Diagram}) - mlP(\text{Diagram}). \quad (3.16)$$

其中 $P(\text{Diagram}) = P(\text{Diagram})$.

对 $P(B_2)$ 左侧交叉点应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 得到拆接关系式

$$lP(\text{Diagram}) + l^{-1}P(\text{Diagram}) + mP(\text{Diagram}) = 0.$$

即

$$P(\text{Diagram}) = -l^2P(\text{Diagram}) - ml^{-1}P(\text{Diagram}) = (l^{-1} + l^{-3})m^{-1} - ml^{-1}. \quad (3.17)$$

把(3.17)代入(3.16), 即可计算出 $P(L_2)$ 的表达式

$$P(L_2) = (l+l^{-1})^2(m^{-2}-1) + m^2. \quad (3.18)$$

再将(3.18)代入(3.15), 整理得 $P(L_n)$ 的表达式

$$P(L_n) = (l+l^{-1})^{n-2} (m^3 - 2m)^{n-2} \left((l+l^{-1})^2 (m^{-2} - 1) + m^2 \right) + \sum_{i=3}^n \left[(l+l^{-1})(m^3 - 2m) \right]^{n-i} \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{i-2} (l+l^{-1})^2 (m - m^{-1})^2. \quad (3.19)$$

根据 $P(L_n)$ 的表达式可知 $P(L_{n-1})$,

$$P(L_{n-1}) = (l+l^{-1})^{n-3} (m^3 - 2m)^{n-3} \left((l+l^{-1})^2 (m^{-2} - 1) + m^2 \right) + \sum_{i=3}^{n-1} \left[(l+l^{-1})(m^3 - 2m) \right]^{n-i-1} \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{i-2} (l+l^{-1})^2 (m - m^{-1})^2. \quad (3.20)$$

最后把(3.20)代入(3.7)中, 可计算出 Brunnian 链环 B_n 的 HOMFLY 多项式的表达式, 即

$$P(B_n) = (l+l^{-1})^{n-3} (m^3 - 2m)^{n-3} \left[(l+l^{-1})^2 (1 - m^2) + m^4 \right] + (1 - m^2) \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^{n-1} + \sum_{i=3}^{n-1} \left[(l+l^{-1})(m^3 - 2m) \right]^{n-i-1} \left[-(l+l^{-1})m^{-1} \right]^i (l+l^{-1})^2 (m^2 - 1)^2.$$

4. 结语

本文主要研究一类特殊的 Brunnian 链环 B_n , 通过应用 HOMFLY 多项式的性质以及拆接关系, 对链环投影图中某个交叉点进行拆接, 重复操作下去, 得到相应的递推关系式, 进而计算出这类特殊的 n -分支定向 Brunnian 链环 B_n 的 HOMFLY 多项式。

参考文献

- [1] Armstrong, M.A. (2013) Basic Topology. Springer Science & Business Media.
- [2] 刘卫丽. 关于纽结的一个多项式不变量[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2014.
- [3] Adams, C.C. (1994) The Knot Book. American Mathematical Society.
- [4] Adams, C.C. (2004) The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots. American Mathematical Society.
- [5] Rolfsen, D. (2003) Knots and Links. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/chel/346>
- [6] 颜春惺. 一些定向链环的 HOMFLY 多项式[D]: [硕士或博士学位论文]. 北京: 中国石油大学, 2021.
- [7] 邱海燕, 陈震霆. Alexander 与 HOMFLY 多项式在纽结中的应用[J]. 长春大学学报, 2010, 20(5): 39-40.
- [8] 邱海燕, 华宏图, 孙佳慧. HOMFLY 多项式在纽结理论中的应用[J]. 电脑知识与技术, 2010, 6(14): 3817-3818.
- [9] 周倩竹. 浅谈琼斯多项式和 HOMFLY 多项式[J]. 现代职业教育, 2020(27): 100-101.
- [10] Sathaye, B. (2016) Link Homotopic but Not Isotopic. arXiv:1601.05292.