Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 4049-4054
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138386

Hans汉斯

随机环境中乘积受控分枝过程矩的存在性

陈祁欢*，张　鑫

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙

收稿日期：2024年7月21日；录用日期：2024年8月13日；发布日期：2024年8月23日

摘　要

在深入研究经典分枝过程的基础上，进行模型的扩展与创新，进而推出随机环境中乘积受控分枝过程模型，探讨了序列 $\log W_n$ 的矩的存在性，且给出了相关证明，其中 $W_n = Z_n/P_n$， P_n 为规范化序列， Z_n 为随机环境中乘积受控分枝过程。

关键词

随机环境，乘积受控分枝过程，矩

Existence of Moments of Multiplicative Controlled Branching Processes in a Random Environment

Qihuan Chen*, **Xin Zhang**

College of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jul. 21st, 2024; accepted: Aug. 13th, 2024; published: Aug. 23rd, 2024

Abstract

Based on the research of classical branching processes, the model is extended and innovated, leading to a multiplicative controlled branching process in a random environment. Moreover, we explore the existence of moments of the sequence $\log W_n$, and relevant proofs are given, where $W_n = Z_n/P_n$, P_n is the normalized sequence, Z_n is the multiplicative controlled branching process in a random environment.

*通讯作者。

文章引用: 陈祁欢, 张鑫. 随机环境中乘积受控分枝过程矩的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 4049-4054.
DOI: 10.12677/aam.2024.138386

Keywords

Random Environment, Multiplicative Controlled Branching Process, Moments

1. 引言

随机环境中乘积受控分枝过程(Multiplicative controlled branching process in random environments, MCBPRE)是经典分枝过程(G-W过程)一个既自然又关键的延伸，繁衍能力粒子数受特殊控制函数制约体现出优势，能够更有效地对现实生活中个体后代的繁衍过程进行模拟，由此也获得了学者们的重视与探究。1992年，Hambly [1]率先研究了随机环境中分支过程的淬火调和矩问题。此后，1995年，Dion和Essebbar [2]引入了乘积受控分枝过程(Multiplicative controlled branching process, MCBP)，为该领域增添了新的研究方向。接着，2012年，Huang C和Liu Q [3]计算了随机环境中分支过程 W 的调和矩存在的临界值，这一成果对于深入理解分支过程具有重要意义。2019年，Li Y和Liu Q [4]探究了随机环境中加权分支过程调和矩。本文在文献[5]的研究基础上，探讨了随机环境MCBPI中序列 $\log W_n$ 的矩的存在性问题。

2. 模型的描述

在独立同分布的随机环境 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 中，ξ_n 的每个实现都对应于 $N=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的概率分布 $\{p_i(\xi_n):i\in N\}$，其中 $p_i(\xi_n)\ge 0$，$\sum_{i=0}^{\infty}p_i(\xi_n)=1$，$0<\sum_{i=0}^{\infty}ip_i(\xi_n)<\infty$。乘积受控分枝过程可以通过下列关系来定义：

$$Z_0=1,\ Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{\alpha_n Z_n}X_{n,i},\ n=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

其中，$X_{n,i}$ 表示第 n 代第 i 个粒子在第 $n+1$ 代产生的粒子总数，$\{\alpha_n:n\ge 0\}$ 是一列非负整数的随机变量，表示在第 n 代粒子繁衍后代的过程中期间对这些粒子展开(倍数)的约束，Z_{n+1} 表示第 $n+1$ 代的粒子总数。随机变量 $\alpha_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 和 $X_{n,i}\,(n=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots)$ 相互独立。

令 $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$ 且 $\mathcal{F}_n=\sigma\left(X_{k,i},\alpha_j:0\le k<n,0\le j<n,i\ge 1;\xi\right)$，使得 Z_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测。

为了方便讨论，对 $n\ge 0, p\ge 1$，我们记：

$$m_n(p)=\mathbb{E}_\xi X_{n,i}^p,\quad m_n=m_n(1)=\mathbb{E}_\xi X_{n,i},$$

$$\tau_n(p)=\mathbb{E}_\xi \alpha_n^p,\quad \tau_n=\tau_n(1)=\mathbb{E}_\xi\alpha_n$$

$$P_0=1,\quad P_n=\prod_{i=0}^{n-1}\tau_i m_i,\ W_n=\frac{Z_n}{P_n}.$$

在本文中，我们研究通常的情况，其中 $P_n\to\infty$ 且对 $n\ge 0$，并存在常数 M 使得 $1\le\inf_{n\ge 0}\tau_n\le\sup_{n\ge 0}\tau_n\le M$。由于

$$\mathbb{E}_\xi(Z_{n+1})=\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{E}_\xi\left(\sum_{i=1}^{\alpha_n Z_n}X_{n,i}\mid Z_n,\alpha_n\right)\right]=\mathbb{E}_\xi\left[\sum_{i=1}^{\alpha_n Z_n}\mathbb{E}_\xi\left(X_{n,i}\mid Z_n,\alpha_n\right)\right]$$
$$=\mathbb{E}_\xi\left(\sum_{i=1}^{\alpha_n Z_n}m_n\right)=\mathbb{E}_\xi\left(\alpha_n Z_n m_n\right)=m_n\tau_n\mathbb{E}_\xi\left(Z_n\right)$$

由迭代，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\xi}\left(Z_{n+1}\right)&=m_n\tau_n\left[m_{n-1}\tau_{n-1}\mathbb{E}_{\xi}\left(Z_{n-1}\right)\right]\\&=m_n\tau_n\left\{m_{n-1}\tau_{n-1}\left[m_{n-2}\tau_{n-2}\mathbb{E}_{\xi}\left(Z_{n-2}\right)\right]\right\}=\cdots\\&=P_{n+1}\end{aligned}$$

所以，Z_n 的期望为

$$\mathbb{E}_{\xi}Z_{n+1}=P_{n+1}. \tag{2}$$

假设

$$\mathbb{P}\left(Z_1=1\right)=\mathbb{E}p_1\left(\xi_0\right)<1. \tag{3}$$

3. 主要结果及其证明

引理 1 [6] 令 $\left(X_i\right)_{i\geq 1}$ 是一列独立同分布的随机变量。那么对于 $p\in\left(1,\infty\right)$，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|^p\leq\begin{cases}\left(B_p\right)^p\mathbb{E}\left(\left|X_i\right|^p\right)n, & \text{if } 1<p\leq 2,\\ \left(B_p\right)^p\mathbb{E}\left(\left|X_i\right|^p\right)n^{p/2}, & \text{if } p>2,\end{cases} \tag{4}$$

其中，$B_p=2\min\left\{k^{1/2}:k\in N,k\geq p/2\right\}$ 是一个仅取决于 p 的常数(因此，如果 $1<p\leq 2$ 时，$B_p=2$)。

定理 2 设 $\mathbb{E}\left|\log m_0\right|^{2p}<\infty$，对于 $p>1$。那么，对于所有 $q\in\left(0,p\right)$，$\mathbb{E}\left|\log W\right|^q<\infty$ 和 $\sup_{n\in N}\mathbb{E}\left|\log W_n\right|^q<\infty$。

我们通过研究 W 的斯拉普拉变换的渐近行为来证明定理 2.2。用 $\phi_{\xi}\left(t\right)=\mathbb{E}_{\xi}e^{-tW}$ 和 $\phi\left(t\right)=\mathbb{E}\phi_{\xi}\left(t\right)=\mathbb{E}e^{-tW}$ 定义 W 的淬火和退火拉普拉斯变换，其中 $t\geq 0$。那么根据马尔可夫不等式，对于 $t>0$，我们有

$$\mathbb{P}\left(W<t^{-1}\right)\leq e\mathbb{E}e^{-tW}=e\phi\left(t\right). \tag{5}$$

证明：根据 Holder 不等式只需在 $q\in\left(1,p\right)$ 时证明该引理的断言即可。利用不等式 $\left|\log x\right|^q\mathbf{1}_{\{x>1\}}\leq Cx$，显然存在一个常数 $C>0$，使得 $\mathbb{E}\left|\log W\right|^q\mathbf{1}\left(W\geq 1\right)\leq C\mathbb{E}W<\infty$。因此，还需要证明 $\mathbb{E}\left|\log W\right|^q\mathbf{1}\left(W\leq 1\right)<\infty$。根据(5)以及

$$\begin{aligned}E\left|\log W\right|^q\mathbf{1}_{(W\leq 1)}&=E\left(-\log W\right)^q\mathbf{1}_{(W\leq 1)}\\&=\int_{\Omega}\left(\log W^{-1}\right)^q\mathbf{1}_{(W\leq 1)}\mathrm{d}P\\&=\int_{\Omega}\int_0^{\log W^{-1}}qx^{q-1}\mathbf{1}_{(W\leq 1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}P\\&=q\int_{\Omega}\int_1^{W^{-1}}\left(\log t\right)^{q-1}\mathbf{1}_{(W\leq 1)}\mathrm{d}\left(\log t\right)\mathrm{d}P\\&=q\int_{\Omega}\int_1^{W^{-1}}\frac{1}{t}\left(\log t\right)^{q-1}\mathbf{1}_{(W\leq 1)}\mathrm{d}t\mathrm{d}P\\&=q\int_{\Omega}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\log t\right)^{q-1}\mathbf{1}_{\left(W\leq t^{-1}\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}P\\&=q\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\log t\right)^{q-1}\int_{\Omega}\mathbf{1}_{\left(W\leq t^{-1}\right)}\mathrm{d}P\mathrm{d}t\\&=q\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\log t\right)^{q-1}E\mathbf{1}_{\left(W\leq t^{-1}\right)}\mathrm{d}t\\&=q\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\log t\right)^{q-1}P\left(W\leq t^{-1}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6}$$

只需证明，当$t\to\infty$时，

$$\phi(t)=O(\log t)^{-p}\text{。}$$

令$\phi_n(t,\xi)=\mathbb{E}_\xi e^{-tW_n}$，$f_0(s)=\mathbb{E}\left(s^{\alpha_1 Z_1}\mid\xi\right)=\sum_{i=0}^{\infty}P(\alpha_1 Z_1=i\mid\xi_0)s^i$，$s\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(t,\xi)&=\mathbb{E}_\xi e^{-tW_{n+1}}=\mathbb{E}_\xi e^{-t\frac{Z_{n+1}}{m_0\tau_0 m_1\tau_1\cdots m_n\tau_n}}=\mathbb{E}_\xi e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}\frac{Z_{n+1}}{m_1\tau_1\cdots m_n\tau_n}}\\&=\mathbb{E}_\xi e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}\frac{\sum_{i=1}^{\alpha_1Z_1}Z_n^{(1,i)}}{m_1\tau_1\cdots m_n\tau_n}}=\mathbb{E}_\xi e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}\sum_{i=1}^{\alpha_1Z_1}W_n^{(1,i)}}=\mathbb{E}_\xi\prod_{i=1}^{\alpha_1Z_1}e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}W_n^{(1,i)}}\\&=\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{\alpha_1Z_1}e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}W_n^{(1,i)}}\mid\xi,\alpha_1,Z_1\right)\right]\\&=\mathbb{E}_\xi\left[\prod_{i=1}^{\alpha_1Z_1}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}W_n^{(1,i)}}\mid\xi,\alpha_1,Z_1\right)\right]\\&=\mathbb{E}_\xi\left[\prod_{i=1}^{\alpha_1Z_1}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{t}{m_0\tau_0}W_n^{(1,i)}}\mid\xi\right)\right]\\&=\mathbb{E}_\xi\left(\prod_{i=1}^{\alpha_1Z_1}\phi_n\left(\frac{t}{m_0\tau_0},T\xi\right)\right)\\&=\mathbb{E}_\xi\phi_n\left(\frac{t}{m_0\tau_0},T\xi\right)^{\alpha_1Z_1}\\&=f_0\left(\phi_n\left(\frac{t}{m_0\tau_0},T\xi\right)\right),\end{aligned}\tag{7}$$

则

$$\phi_\xi(t)=f_0\left(\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)\right).\tag{8}$$

其中，T^n是移位算子，定义为在$n\ge1$时，$T^n(\xi_0,\xi_1,\cdots)=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$。利用(7)以及对于所有$k\ge2$，$\phi_{T\xi}^k\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)\le\phi_{T\xi}^2\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)$的事实，我们得到

$\phi_\xi(t)\le p_1(\xi_0)\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)+(1-p_1(\xi_0))\phi_{T\xi}^2\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)=\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)\left(p_1(\xi_0)+(1-p_1(\xi_0))\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)\right)$，通过迭代，考虑到$\phi_\xi(t)$是非递增的和$\phi_\xi(t)\le\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0\tau_0}\right)$，可以得出

$$\phi_\xi(t)\le\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{P_n}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\left(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{P_n}\right)\right).\tag{9}$$

求期望值并利用$\phi_{T^n\xi}(t)\le1$的事实，我们得到

$$\phi(t)\le\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{P_n}\right)\right)\right].$$

利用简单截断法和$\phi_{\xi}(\cdot)$非递增这一事实，对于所有$A>1$，我们可以得到

$$\begin{aligned}\phi(t) &\le \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(p_1(\xi_j)+\left(1-p_1(\xi_j)\right)\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{A^n}\right)\right)\mathbf{1}\left(P_n \le A^n\right)\right]+\mathbb{P}\left(P_n \ge A^n\right)\\ &\le \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(p_1(\xi_j)+\left(1-p_1(\xi_j)\right)\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{A^n}\right)\right)\right]+\mathbb{P}\left(P_n \ge A^n\right).\end{aligned}$$

由于$T^n\xi$与$\sigma(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1})$是独立的，且随机变量$p_1(\xi_i)$ ($i\ge 0$)为独立同分布的，我们有，

$$\phi(t) \le \left[\mathbb{E}p_1(\xi_0)+\left(1-\mathbb{E}p_1(\xi_0)\right)\phi\left(\frac{t}{A^n}\right)\right]^n+\mathbb{P}\left(P_n \ge A^n\right).$$

根据控制收敛定理，我们有，$\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$。因此，对于任意$\gamma\in(0,1)$，存在一个常数$K>0$，使得对于所有$t\ge K$，我们都有$\phi(t)\le\gamma$。那么对于所有$t\ge KA^n$，我们有$\phi\left(\frac{t}{A^n}\right)\le\gamma$。因此，对于$t\ge KA^n$，

$$\phi(t)\le \alpha^n+\mathbb{P}\left(P_n \ge A^n\right) \tag{10}$$

其中，根据(3)，

$$\alpha=\mathbb{E}p_1(\xi_0)+\left(1-\mathbb{E}p_1(\xi_0)\right)\gamma\in(0,1). \tag{11}$$

回顾$\mu=\mathbb{E}X$和$S_n=\log P_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。选择$A$使得$\log A>\mu$并让$\delta=\log A-\mu>0$。根据马尔可夫不等式和引理1，存在一个常数$C>0$，对于$n\in N$，使得

$$\mathbb{P}\left(P_n \ge A^n\right)\le\mathbb{P}\left(\left|S_n-n\mu\right|\ge n\delta\right)\le\frac{\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)\right|^{2p}}{n^{2p}\delta^{2p}}\le\frac{C}{n^p}.$$

那么，根据(10)对于n足够大且$t\ge KA^n$，我们可以得到

$$\phi(t)\le\frac{C}{n^p}. \tag{12}$$

对于$t\ge K$，定义$n_0=n_0(t)=\left[\frac{\log(t/K)}{\log(A)}\right]\ge 0$，其中$[x]$代表$x$的整数部分，因此

$$\frac{\log(t/K)}{\log(A)}-1\le n_0\le\frac{\log(t/K)}{\log(A)}\text{ 和 }t\ge KA^{n_0}.$$

回到(12)，$n=n_0$，对于$t\ge K$，我们得到

$$\phi(t)\le\frac{C(\log A)^p}{\left(\log(t/K)\right)^p}\le C(\log t)^{-p},$$

证明了对于所有$q\in(1,p)$，$\mathbb{E}\left|\log W\right|^q<\infty$ (见(6))。

此外，对于$q\in(1,p)$，$x\mapsto\left|\log^q(x)\right|\mathbf{1}(x\le 1)$是非负凸函数，根据[3]的引理2.1，我们有

$$\sup_{n\in N}\mathbb{E}\left|\log W_n\right|^q\mathbf{1}(W_n\le 1)=\mathbb{E}\left|\log W\right|^q\mathbf{1}(W\le 1).$$

通过标准截断法，我们得到

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left|\log W_n\right|^q \leq C\mathbb{E}W + \mathbb{E}\left|\log W\right|^q \mathbf{1}(W \leq 1) < \infty, \tag{13}$$

这就结束了这一定理的证明。

基金项目

国家自然科学基金面上项目“随机矩阵乘积与随机环境中多型分枝过程”(12271062)。

参考文献

[1] Hambly, B. (1992) On the Limiting Distribution of a Supercritical Branching Process in a Random Environment. *Journal of Applied Probability*, **29**, 499-518. https://doi.org/10.1017/s0021900200043345

[2] Dion, J. and Essebbar, B. (1995) On the Statistics of Controlled Branching Processes. In: *Lecture Notes in Statistics*, Springer New York, 14-21. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2558-4_2

[3] Huang, C. and Liu, Q. (2012) Moments, Moderate and Large Deviations for a Branching Process in a Random Environment. *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 522-545. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.09.001

[4] Li, Y., Liu, Q. and Peng, X. (2019) Harmonic Moments, Large and Moderate Deviation Principles for Mandelbrot's Cascade in a Random Environment. *Statistics & Probability Letters*, **147**, 57-65. https://doi.org/10.1016/j.spl.2018.10.002

[5] Grama, I., Liu, Q. and Miqueu, E. (2017) Berry-Esseen's Bound and Cramér's Large Deviation Expansion for a Supercritical Branching Process in a Random Environment. *Stochastic Processes and Their Applications*, **127**, 1255-1281. https://doi.org/10.1016/j.spa.2016.07.014

[6] Liu, Q. (2001) Local Dimensions of the Branching Measure on a Galton-Watson Tree. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*B*) *Probability and Statistics*, **37**, 195-222. https://doi.org/10.1016/s0246-0203(00)01065-7