Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 4043-4048
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138385

随机环境中加权分枝过程的概率不等式

彭 聪*，杨海龙，李 瑞
长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2024年7月21日；录用日期：2024年8月13日；发布日期：2024年8月23日

摘 要

令 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 表示独立同分布随机环境 $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ 中的加权分枝过程，本文针对统计量 $\log\left(\frac{Y_{n_0+n}}{Y_{n_0}}\right)$，借助Markov不等式建立了一个相关概率不等式，这一结果可以用于探索种群动态和概率特性，有助于深入理解随机环境中加权分枝模型的本质。

关键词

加权分枝过程，随机环境，概率不等式

Probability Inequalities for Weighted Branching Processes in Random Environments

Cong Peng*, Hailong Yang, Rui Li
School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jul. 21st, 2024; accepted: Aug. 13th, 2024; published: Aug. 23rd, 2024

Abstract

Let $\{Y_n, n \geq 0\}$ denote the weighted branching process in independently and identically distributed random environments $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$. In this paper, focusing on a statistic $\log\left(\frac{Y_{n_0+n}}{Y_{n_0}}\right)$, we estab-

*通讯作者。

文章引用: 彭聪, 杨海龙, 李瑞. 随机环境中加权分枝过程的概率不等式[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 4043-4048.
DOI: 10.12677/aam.2024.138385

lish a related probability inequality using Markov's inequality. This result can be used to investigate population dynamics and probabilistic characteristics, contributing to a deeper understanding of the essence of weighted branching models in random environments.

Keywords

Weighted Branching Process, Random Environment, Probability Inequality

1. 引言

概率不等式是概率论中常用的一类不等式，它们可以帮助我们对随机变量的概率分布进行估计和推断。如 Chebyshev 不等式给出了一个测量随机变量偏离其期望值的可能性的上界。它对于证明大数定律和中心极限定理是很有用的。1963 年，Hoeffding [1]提出了有界随机变量之和的概率不等式；2006 年，Nagaev [2]深入研究了临界的经典分枝过程(G-W 过程)的概率不等式。概率不等式在概率论和统计学中扮演着重要角色，能帮助我们理解随机现象的分布特性和预测系统动态行为，从而进行推断和决策。

加权分枝过程(Weighted Branching Process, WBP)是一种随机过程模型，它是经典分枝过程的一种扩展。分枝过程描述了一个种群中个体的繁殖过程，每个个体可以产生随机数量的后代，这些后代数量服从特定的概率分布。在加权分枝过程中，每个个体的生殖率(或称为分枝率)不再是固定的，而是依赖于该个体的权重或状态，这些权重通常是随机变量。1992 年，Rösler [3]首次对加权分枝过程模型进行介绍，2004 年，Kuhlbusch [4]给出了平稳遍历的随机环境中加权分枝过程的定义，研究了非负鞅的极限非退化的充分和必要条件，加权分枝过程模型也叫作 Mandelbrot 鞅。2013 年，Liang 和 Liu [5]展示了独立同分布随机环境下广义的 Mandelbrot 鞅极限变量矩和加权矩存在的充分和必要条件，2017 年，Hao [6]在独立同分布随机环境的 Mandelbrot 鞅的模型中，得到了非负随机变量的大数定律和中心极限定理。2023 年，邓[7]、鲁[8]分别研究了随机环境加权分枝过程的 Fuk-Nagaev 型不等式和偏差不等式。本文讨论了关于随机环境中加权分枝过程的概率不等式研究。这种模型在当前文献中关注度还不太高，因此本文想通过借鉴前人的成果，提出了一个新的概率不等式。

2. 模型的引入

假设随机环境 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots)$ 是独立同分布的，加权分枝过程 $\{Y_n\}$ 定义如下：

$$Y_n=\sum_{u\in\mathbb{T}_n}X_u,\ X_u=A_{u_1}\cdots A_{u_1\cdots u_n},\ u=u_1\cdots u_n\in\mathbb{N}^n; \tag{1}$$

令 $Y_0=X_\varnothing=1$。Y_n 表示第 n 代所有粒子所带的权重，X_u 表示第 n 代中 u 粒子所带的权重，A_{ui} 表示第 n 代中 u 粒子的第 i 个后代所获得的权重，用 $|u|=n$ 表示第 n 代粒子的长度，约定 $|\phi|=0$。令 $\mathbb{T}_n=\{u\in\mathbb{T}:|u|=n\}$ 表示第 n 代粒子的权重树。

为了方便讨论，我们记：

$$m_0=m_0(\xi)=E\sum_{i=1}^{N}A_i,$$

$$m_n = m_n(\xi) = E_\xi \sum_{i=1}^{N_u} A_{ui}^p, i = 1,2,\cdots,N_u,$$

对 $p \ge 0$，$n \ge 1$，我们定义：$\Pi_0 = 1$，$\Pi_n = \prod_{i=0}^{n-1} m_i$，$E_\xi Y_n = \Pi_n$。其规范化过程

$$W_n = \frac{Y_n}{E_\xi Y_n} = \frac{Y_n}{\Pi_n}, n \ge 0$$

是关于

$$\mathcal{F}_0 = \sigma\{\xi\}, \mathcal{F}_n = \sigma\{\xi;(N_u, A_{u1}, A_{u2}, \cdots):|u| < n\}, n \ge 1,$$

的非负鞅，存在非负随机变量 $W = \lim_{n\to\infty} W_n$ $a.s.$，且有 $EW \le 1$。

3. 基本结果及证明

令

$$X = X_1 = \log m_0,\ \mu = EX,\ \sigma^2 = E(X-\mu)^2,$$

在本文中，我们假定 $\mu > 0, 0 < \sigma^2 < \infty$。记

$$Y_{n_0,n} := \frac{\log\left(\frac{Y_{n_0+n}}{Y_{n_0}}\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},\ n_0, n \in \mathbb{N}.$$

由 $W_n = \frac{Y_n}{\Pi_n}$ 可得到下面这个分解式

$$\log Y_n = \sum_{i=1}^n X_i + \log W_n,$$

其中 $X_i = \log m_{i-1}(i \ge 1)$，$X_i$ 为只依赖于环境的独立同分布随机变量序列。$\log Y_n$ 的渐进性为会受到相关随机游动 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \log \Pi_n, n \in \mathbb{N}$ 的影响。

$$\eta_{n,i} = \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}, i = 1,\cdots,n_0+n,\ W_{n_0,n} = \frac{W_{n_0+n}}{W_{n_0}},$$

可以知道 $E\eta_{n,i} = E\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0$，$Var\left(\sum_{i=1}^n \eta_{n,n_0+i}\right) = \sum_{i=1}^n E\eta_{n,n_0+i}^2 = 1$。

基于以上定义，我们有

$$Y_{n_0,n} = \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n} X_i + \log W_{n_0,n} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=n_0+1}^{n_0+n} \frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \eta_{n,n_0+i} + \frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{2}$$

定理 1：假设存在 $\alpha \in (0,1)$，使得 $E\left[(X-\mu)^2 \exp\left\{\left((X-\mu)^+\right)^\alpha\right\}\right] < \infty$，则 $\forall x > 0$，

$$P\left(Y_{n_0,n} \ge x\right) \le 3\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u + \left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha} x^{2-\alpha}\right)}\right\},$$

其中 $u=\frac{1}{\sigma^2}E\left[(X-\mu)^2\exp\left\{\left((X-\mu)^+\right)^\alpha\right\}\right]$。

证明：对 $x\ge 0$ 有，根据式(2)有

$$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}+\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge x\right)\le I_1+I_2, \tag{3}$$

其中

$$I_1=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\ge x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right),\ I_2=P\left(\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

因此当 $0<x\le\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，

$$\begin{aligned}
I_1&=P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n_0+i}-\mu\right)\ge\sigma\sqrt{n}\left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\\
&\le 2\exp\left\{-\frac{\left(\sigma\sqrt{n}\left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^2}{2\left(u_n+\left(\sigma\sqrt{n}\left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^{2-\alpha}\right)}\right\}\\
&=2\exp\left\{-\frac{x^2\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2\left(\frac{u_n}{\sigma^2 n}+\left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha}x^{2-\alpha}\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{2-\alpha}\right)}\right\}\\
&\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u+\left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha}x^{2-\alpha}\right)}\right\},
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $u_n=nE\left[(X-\mu)^2\exp\left\{\left((X-\mu)^+\right)^\alpha\right\}\right]$。由 Markov 不等式及 $EW_n=1$，对 $0\le x<\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，我们有

$$I_2\le\exp\left\{-x^2\right\}. \tag{5}$$

由式(3)~(5)，对 $0\le x<\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)&\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u+\left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha}x^{2-\alpha}\right)}\right\}+\exp\left\{-x^2\right\}\\
&\le 3\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u+\left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha}x^{2-\alpha}\right)}\right\},
\end{aligned}$$

类似地，当 $x>\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$P\left(Y_{n_0,n} \geq x\right) \leq I_3 + I_4, \tag{6}$$

其中

$$I_3 = P\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_{n,n_0+i} \geq \frac{x}{2}\right),\ I_4 = P\left(\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{x}{2}\right).$$

所以

$$\begin{aligned} I_3 &= P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n_0+i} - \mu\right) \geq \sigma\sqrt{n}\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(\frac{u_n}{\sigma^2 n} + \left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\alpha}\right)}\right\} \\ &\leq 2\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u + \left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha} x^{2-\alpha}\right)}\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

以及

$$I_4 \leq \exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}. \tag{8}$$

因此，综合式(6)~(8)，对 $x > \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$\begin{aligned} P\left(Z_{n_0,n} \geq x\right) &\leq 2\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u + \left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha} x^{2-\alpha}\right)}\right\} + \exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\} \\ &\leq 3\exp\left\{-\frac{x^2}{8\left(u + \left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-\alpha} x^{2-\alpha}\right)}\right\}. \end{aligned}$$

证毕。

基金项目

国家自然科学基金面上项目“随机矩阵乘积与随机环境中多型分枝过程”(12271062)。

参考文献

[1] Hoeffding, W. (1963) Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, **58**, 13-30. https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500830

[2] Nagaev, S.V. and Vakhtel, V. (2006) Probability Inequalities for a Critical Galton—Watson Process. *Theory of Probability & Its Applications*, **50**, 225-247. https://doi.org/10.1137/s0040585x97981640

[3] Rösler, U. (1992) A Fixed Point Theorem for Distributions. *Stochastic Processes and their Applications*, **42**, 195-214. https://doi.org/10.1016/0304-4149(92)90035-o

[4] Kuhlbusch, D. (2004) On Weighted Branching Processes in Random Environment. *Stochastic Processes and their Ap-*

plications, **109**, 113-144. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.09.004

[5] Liang, X. and Liu, Q. (2013) Weighted Moments of the Limit of a Branching Process in a Random Environment. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **282**, 127-145. https://doi.org/10.1134/s0081543813060126

[6] Hao, S. (2017) Limit Theorems for Multiplicative Cascades in a Random Environment. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **21**, 943-959. https://doi.org/10.11650/tjm/5216

[7] 邓琳, 陈祁欢, 鲁展. 随机环境加权分枝过程的方差和 Fuk-Nagaev 型不等式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4183-4188.

[8] 鲁展, 彭聪, 邓琳. 随机环境中加权分枝过程的偏差不等式[J]. 湖北文理学院学报(自然科学版), 2023, 44(11): 5-7.