Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 4012-4020
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138382

鲁棒复合凸优化的松弛型Fenchel-Lagrange全对偶及最优性条件

李星星[1]，田利萍[1]，郑晴慧[2*]

[1]吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首
[2]怀化学院数学与计算科学学院，湖南 怀化

收稿日期：2024年7月21日；录用日期：2024年8月13日；发布日期：2024年8月23日

摘 要

该文在函数不一定下半连续，集合不一定是闭集的条件下，利用函数次微分性质，引进新的约束规范条件，等价刻画了鲁棒复合优化问题的最优性条件以及原问题与其松弛型Fenchel-Lagrange对偶问题之间的全对偶。

关键词

鲁棒复合凸优化问题，约束规范条件，松弛型Fenchel-Lagrange全对偶，最优性条件

Relaxed Total Fenchel-Lagrange Duality and Optimality Conditions for the Robust Composite Convex Optimization Problem

Xingxing Li[1], Liping Tian[1], Qinghui Zheng[2*]

[1]College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan
[2]School of Mathematics and Computational Science, Huaihua University, Huaihua Hunan

Received: Jul. 21st, 2024; accepted: Aug. 13th, 2024; published: Aug. 23rd, 2024

Abstract

In the case when the functions are not necessarily lower semicontinuous and the sets are not necessarily closed, by using the properties of subdifferential of functions, we introduce some new weaker constraint qualifications. Under those constraint qualifications, the total duality and op-

*通讯作者。

文章引用: 李星星, 田利萍, 郑晴慧. 鲁棒复合凸优化的松弛型 Fenchel-Lagrange 全对偶及最优性条件[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 4012-4020. DOI: 10.12677/aam.2024.138382

timality condition between the robust composite convex optimization problem and its relaxed Fenchel-Lagrange dual problem are established.

Keywords

Robust Composite Convex Optimization Problem, Constraint Qualifications, Relaxed Fenchel-Lagrange Total Duality, Optimality Condition

1. 引言

由于许多的优化问题，如凸优化问题、极小极大问题、最佳一致逼近问题、锥规划等，都可以看作复合优化问题的特例，因此复合凸优化问题引起了学者们的广泛关注

$$(P)\qquad \begin{aligned} &\inf\ f(\varphi(x)) \\ &\text{s.t}\ \ h_t(x)\le 0, t\in T, \\ &\quad x\in C, \end{aligned}$$

其中 X，Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，C 是 X 中的非空凸集，K 是 Y 中的闭凸锥，Y 是 K 所定义的序空间，T 是一个非空(可能无限)指标集，$\varphi: X \to Y^{\bullet} := Y \cup \{\infty_Y\}$ 是真 K-凸函数，∞_Y 是关于偏序 $\le_K$ 下的最大元，$f: Y^{\bullet} \to \overline{\mathbb{R}}$ 是真凸 K-增函数，$h_t: X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, t\in T$ 是真凸函数。特别地，当 $X = Y$ 且 φ 是单位算子时，问题(P)转化为经典凸约束优化问题。学者们通过引入约束规范条件，建立了复合优化问题的全对偶理论和最优性条件等(参看文[1]-[4])。

在实际生活中，由于测量误差或模型本身的缺陷，或者决策阶段信息缺乏等原因，许多优化问题的数据是受到干扰的或是不确定的，并且概率分布也无法预知。因此，许多学者研究了带有数据不确定性的鲁棒复合凸优化问题

$$(RP)\qquad \begin{aligned} &\inf\ \ f(\varphi(x)) \\ &\text{s.t.}\ \ h_t(x,v_t)\le 0, \forall v_t\in V_t, t\in T, \\ &\quad x\in C, \end{aligned}$$

其中 W 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，$V_t(t\in T)\subseteq W$ 是一个不确定集，$h_t(\cdot,v_t): X\times V_t \to \overline{\mathbb{R}}, v_t\in V_t, t\in T$ 是真凸函数。特别地，许多学者研究了鲁棒复合凸优化问题的对偶理论(参看文[5]-[7])。例如，文[5] [6]利用函数的次微分性质，建立了鲁棒复合优化问题与其两种 Lagrange 对偶问题之间的全对偶与稳定全对偶以及解的最优性条件；文[7]利用函数的次微分性质，给出了鲁棒优化问题的强 Fenchel 对偶和全 Fenchel 对偶。

近来，为推广和改进经典的 Lagrange 对偶理论，Dinh 等人在 $C = X$ 且 f，$h_t(t=T)$ 均为下半连续函数的情形下，文[8] [9]引入了一种新的松弛型 Lagrange 对偶问题

$$(D)\qquad \sup_{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)}}\ \inf_{x\in C}\left\{f(x)+\sum_{t\in H}\mu_t h_t(x)\right\},$$

其中 $\mathcal{H}$ 是给定指标集 T 的非空有限子集族，$\mu=(\mu_t)_{t\in H}\in\mathbb{R}_+^{(H)}$。显然，当 $\mathcal{H}$ 是 T 的所有非空有限子集族

$\mathcal{F}(T)$，即 $\mathcal{H}=\mathcal{F}(T)$ 时，问题(*D*)转化为经典的 Lagrange 对偶问题。文[10] [11]利用函数的次微分性质，在 f，$h_t(t\in T)$ 不一定下半连续的情形下，等价刻画了凸优化问题与其松弛型 Lagrange 对偶问题之间的全对偶及最优性条件；文[12] [13]利用函数的上图性质，建立了问题(*RP*)与其松弛型 Fenchel-Lagrange 对偶问题之间的 Farkas 引理，零对偶及强对偶等。

受上述启发，本文在函数不一定下半连续，集合不一定是闭集的条件下，利用函数的次微分性质，引入新的约束规范条件，建立了问题(*RP*)的最优性条件及原问题与其松弛型 Fenchel-Lagrange 全对偶理论，推广和改进了前人的相关结论。

2. 预备知识

设 X，Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间， X^*， Y^* 分别是 X 和 Y 的共轭空间，分别赋予弱 * 拓扑 $w^*\left(X^*,X\right)$， $w^*\left(Y^*,Y\right)$。定义偏序关系 $\le_K$ 。若对任意的 $x,y\in K$, $y-x\in -K$ ，则称 $y\le_K x$ 。 $\left\langle x^*,x\right\rangle$ 表示泛函 $x^*\in X^*$ 在 $x\in X$ 处的值即 $\left\langle x^*,x\right\rangle = x^*(x)$。设 Z 是 X 中的非空子集，记 Z 的闭包和凸包分别为 $\mathrm{cl}Z$ ， $\mathrm{co}Z$ 。Z 在 z_0 点的法锥定义为

$$N_Z(z_0):=\partial\delta_Z(z_0)=\left\{x^*\in X^*:\left\langle x^*,z-z_0\right\rangle\le 0,\forall z\in Z\right\}.$$

Z 的对偶锥和示性函数分别定义为

$$Z^{\oplus}:=\left\{x^*\in X^*:\left\langle x^*,z\right\rangle\ge 0,\forall z\in Z\right\},$$

$$\delta_Z(x):=\begin{cases}0, & x\in Z,\\ +\infty, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $\mathcal{H}$ 是给定指标集 T 的非空有限子集族且 $H\in\mathcal{H}$， 定义 $\mathbb{R}^{(H)}$ 的正极锥为

$$\mathbb{R}_+^{(H)}:=\left\{\mu=(\mu_t)_{t\in H}\in\mathbb{R}^{(H)}:\text{最多只有有限个 }\mu_t\ne 0\right\}.$$

设 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是真函数，f 的有效定义域和共轭函数分别定义为

$$\mathrm{dom}\,f:=\left\{x\in X:f(x)<+\infty\right\},$$

$$f^*\left(x^*\right):=\sup\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle-f(x):x\in X\right\},\forall x^*\in X^*.$$

由共轭函数的定义可知 Young-Fenchel 不等式成立，即

$$f^*\left(x^*\right)+f(x)\ge\left\langle x^*,x\right\rangle,\forall\left(x^*,x\right)\in X\times X^*. \tag{2.1}$$

定义 f 在 $x\in\mathrm{dom}\,f$ 处的次微分为

$$\partial f(x):=\left\{x^*\in X^*:f(x)+\left\langle x^*,y-x\right\rangle\le f(y),\forall y\in X\right\}.$$

由文[15]中的定理 2.4.2(i)可知，对于 $\forall x\in\mathrm{dom}\,f$ ， 以下关系成立：

$$x^*\in\partial f(x)\Leftrightarrow f(x)+f^*\left(x^*\right)=\left\langle x^*,x\right\rangle. \tag{2.2}$$

更多地，设 $x_0\in X$ 。由文([15]，定理 2.5.7)可知，

$$f(x_0)=\min_{x\in X}f(x)\Leftrightarrow 0\in\partial f(x_0). \tag{2.3}$$

若 $f,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 为真凸函数且满足 $\mathrm{dom}\,f\cap\mathrm{dom}h\ne\varnothing$ ， 则

$$\partial f(x)+\partial h(x)\subseteq\partial(f+h)(x),\quad\forall x\in\mathrm{dom}\,f\cap\mathrm{dom}h. \tag{2.4}$$

设函数 $f:Y\to\overline{\mathbb{R}}$，对任意的 $y_1,y_2\in Y$，若当 $y_1\le_K y_2$ 时有 $f(y_1)\le f(y_2)$，则称 f 是 K-增函数。定义函数 $h:X\to Y^\bullet$ 的有效定义域 $\mathrm{dom}h=\left\{x\in X:h(x)\in Y\right\}$ 。若 $\mathrm{dom}h\ne\varnothing$， 则称 h 是真函数。若对任意的

$x_1,x_2\in X$， $t\in[0,1]$，有 $h(tx_1+(1-t)x_2)\le_s th(x_1)+(1-t)h(x_2)$，则称 h 是 K-凸函数。定义函数 $(f\circ\varphi)(\cdot):X\to\overline{\mathbb{R}}$ 为

$$(f\circ\varphi)(x)=\begin{cases} f(\varphi(x)), & \text{若 } x\in\operatorname{dom}\varphi,\\ +\infty, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然， $f\circ\varphi$ 是真凸函数。

引理 2.1 [14] 设 $f,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是真凸函数且满足 $\operatorname{dom}f\cap\operatorname{dom}h\ne\varnothing$。若 f 或 h 在 $\operatorname{dom}f\cap\operatorname{dom}h$ 上有连续点，则

$$\partial f(a)+\partial h(a)=\partial(f+h)(a),\ \ \forall a\in\operatorname{dom}f\cap\operatorname{dom}h.$$

引理 2.2 [15] 设 $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是真凸函数， $\varphi:\operatorname{dom}\varphi\subseteq X\to Y^\bullet$ 真 K-凸函数， $f:Y^\bullet\to\overline{\mathbb{R}}$ 是真凸 K-增函数，若存在 $x_0\in\operatorname{dom}g+\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$ 使得 f 在 $\varphi(x_0)$ 处连续，则对任意的 $x\in\operatorname{dom}g+\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$，

$$\partial(g+f\circ\varphi)(x)=\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x))}\partial(g+\beta\varphi)(x).$$

3. 约束规范条件

定义 $A:=\{x\in C;h_t(\cdot,v_t)\le 0,v_t\in V_t,t\in T\}$ 为问题(RP)的可行集。若无特殊说明，本研究均假设 $A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)\ne\varnothing$。设 $x\in\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$。为简便起见，记

$$v_H:=(v_t)_{t\in H}\in\prod_{t\in H}V_t:=V_H,$$

$$\Phi(x):=\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x))}\partial(\beta\varphi)(x)+N_C(x)+\bigcup_{\substack{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)},v_H\in V_H\\ \sum_{t\in H}\mu_t h_t(x,v_t)=0}}\sum_{t\in H}\mu_t\partial h_t(\cdot,v_t)(x).$$

命题 3.1 设 $x\in A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$，以下结论成立：

$$\Phi(x)\subseteq\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x).\tag{3.1}$$

证明 设 $x\in A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$，由(2.4)式知，

$$\Phi(x)\subseteq\bigcup_{\substack{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)},v_H\in V_H\\ \sum_{t\in H}\mu_t h_t(x,v_t)=0,\beta\in\partial f(\varphi(x))}}\partial\left(\beta\varphi+\delta_C+\sum_{t\in H}\mu_t\partial h_t(\cdot,v_t)(x)\right)(x):=\Phi_1(x).$$

为证(3.1)式成立，现只需证

$$\Phi_1(x)\subseteq\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x).$$

为此，设 $p\in\Phi_1(x)$，则存在 $\overline{H}\in\mathcal{H},\overline{\mu}\in\mathbb{R}_+^{(\overline{H})},\overline{v}_{\overline{H}}\in V_{\overline{H}},\overline{\beta}\in\partial f(\varphi(x))$ 使得 $\sum_{t\in\overline{H}}\overline{\mu}_t h_t(x,\overline{v}_t)=0$，

$$p\in\partial\left(\overline{\beta}\varphi+\delta_C+\sum_{t\in\overline{H}}\overline{\mu}_t h_t(\cdot,\overline{v}_t)\right)(x).$$

由次微分的定义知，

$$\langle p,y-x\rangle\le\left(\overline{\beta}\varphi+\delta_C+\sum_{t\in\overline{H}}\overline{\mu}_t h_t(\cdot,\overline{v}_t)\right)(y)-(\overline{\beta}\varphi+\delta_C)(x).\tag{3.2}$$

由 $\overline{\beta}\in\partial f(\varphi(x))$ 可得，

$$\langle\overline{\beta},\varphi(y)-\varphi(x)\rangle\le f(\varphi(y))-f(\varphi(x)),\forall y\in X.$$

则由(3.2)式可得，对任意的 $y\in X$ ，

$$\begin{aligned}\langle p,y-x\rangle &\le \Big(\bar{\beta}\varphi+\delta_C+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t(\cdot,\bar{v}_t)\Big)(y)-(\bar{\beta}\varphi)(x)\\ &\le \Big(f\circ\varphi+\delta_C+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t(\cdot,\bar{v}_t)\Big)(y)-(f\circ\varphi)(x).\end{aligned}\tag{3.3}$$

由于对任意 $y\in X$ ， $\delta_A(y)\ge\delta_C(y)+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t(\cdot,\bar{v}_t)(y)$，因此可得

$$\Big(f\circ\varphi+\delta_C+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t(\cdot,\bar{v}_t)\Big)(y)-(f\circ\varphi)(x)\le(f\circ\varphi+\delta_A)(y)-(f\circ\varphi+\delta_A)(x),\forall y\in X.$$

从而由(3.3)式知，

$$\langle p,y-x\rangle\le(f\circ\varphi+\delta_A)(y)-(f\circ\varphi+\delta_A)(x),\forall y\in X.$$

于是 $p\in\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x)$，故 $\Phi_1(x)\subseteq\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x)$，即(3.1)式成立。证毕。

为刻画问题(*RP*)与其松弛型 Fenche-Lagrange 对偶问题之间的全对偶以及问题(*RP*)的最优性条件，我们首先引入以下约束规范条件。

定义 3.1 设 $x_0\in A\cap\varphi^{-1}(\mathrm{dom}\,f)$。若

$$\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)=\Phi(x_0),\tag{3.4}$$

则称系统 $\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\}$ 在 x_0 点满足松弛型 $(BCQ)_f$ 条件，若对任意的 $x_0\in A\cap\varphi^{-1}(\mathrm{dom}\,f)$，(3.4)式成立，则称系统 $\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\}$ 满足松弛型 $(BCQ)_f$ 条件。

注 3.1 若对任意的 $x\in A\cap\varphi^{-1}(\mathrm{dom}\,f)$，由命题 3.1 知，系统 $\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\}$ 满足松弛型 $(BCQ)_f$ 条件当且仅当

$$\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x)\subseteq\Phi(x).\tag{3.5}$$

4. 鲁棒复合优化问题的全对偶及稳定全对偶

设 $p\in X^*$。考虑以下带线性扰动的鲁棒复合优化问题

$$(RP_p)\quad\begin{aligned}&\inf\ f(\varphi(x))-\langle p,x\rangle\\ &\text{s.t. } h_t(x,v_t)\le 0,\forall v_t\in V_t,t\in T,\\ &\quad x\in C.\end{aligned}$$

定义问题 (RP_p) 的松弛型 Fenchel-Lagrang 对偶问题为

$$(RD_p)\qquad\sup_{\substack{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)},v_H\in V_H,\\ \beta\in\mathrm{dom}\,f,y^*,z^*\in X^*}}\left\{-f^*(\beta)-(\beta\varphi)^*(y^*)-\Big(\sum_{t\in H}\mu_t\partial h_t(\cdot,v_t)\Big)^*(z^*)-\delta_C^*(p-y^*-z^*)\right\}.$$

特别地，当 $p=0$ 时，问题 (RP_p) 即为问题 (RP)，其对偶问题 (RD_p) 转化为

$$(RD)\qquad\sup_{\substack{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)},v_H\in V_H,\\ \beta\in\mathrm{dom}\,f,y^*,z^*\in X^*}}\left\{-f^*(\beta)-(\beta\varphi)^*(y^*)-\Big(\sum_{t\in H}\mu_t\partial h_t(\cdot,v_t)\Big)^*(z^*)-\delta_C^*(-y^*-z^*)\right\}.$$

令 $v(RP_p)$ 和 $v(RD_p)$ 分别表示问题 (RP_p) 和问题 (RD_p) 的最优值， $S(RP_p)$ 表示问题 (RP_p) 的最优解

集，定义为

$$S(RP_P):=\{x\in A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom} f): f(\varphi(x))-\langle p,x\rangle=v(RP_P)\}.$$

易证问题(RP)与问题(RD)之间的 Fonchel-Lagrange 稳定弱对偶成立，即

$$v(RD_p)\le v(RP_p). \tag{4.1}$$

下面研究问题(RP)和问题(RD)之间的稳定全对偶，为此，先给出如下定义。

定义 4.1 (a)若$S(RP)\neq\varnothing$时，有$v(RP)=v(RD)$且问题(RD)有最优解，则称问题(RP)与问题(RD)之间的 Fenchel-Lagrange 全对偶成立；

(b)若对任意的$p\in X^*$，问题(RP_P)与问题(RD_P)之间的 Fenchel-Lagrange 全对偶成立，则称问题(RP)与(RD)之间的 Fenchel-Lagrange 稳定全对偶成立。

下列定理刻画了问题(RP)与其对偶问题(RD)之间的 Fenchel-Lagrange 稳定全对偶。

定理 4.1 以下命题等价：

(i) 系统$\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\}$满足松弛型$(BCQ)_f$条件。

(ii) 问题(RP)与问题(RD)之间的 Fenchel-Lagrange 稳定全对偶成立。

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 假设(i)成立。设$p\in X^*$且$S(RP_P)\neq\varnothing$。任取$x_0\in S(RP_P)$，则由(2.3)式得，$p\in\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)$。由于系统$\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\}$满足松弛型$(BCQ)_f$条件，故有$p\in\Phi$，于是存在$\bar H\in\mathcal{H}$，$\bar\mu\in\mathbb{R}_+^{(\bar H)}$，$\bar v_{\bar H}\in V_{\bar H}$，$\bar\beta\in\partial f(\varphi(x_0))$使得$\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)=0$，

$$p\in\partial(\bar\beta\varphi)(x_0)+\partial\delta_C(x_0)+\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t\partial h_t(\cdot,\bar v_t)(x_0).$$

因此，存在$\bar y^*\in\partial(\bar\beta\varphi)(x_0)$，$\bar z^*\in\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t\partial h_t(\cdot,\bar v_t)(x_0)$，使得$p-\bar y^*-\bar z^*\in\partial\delta_C(x_0)$。由 Young 等式(2.2)式可知，

$$(\bar\beta\varphi)(x_0)+(\bar\beta\varphi)^*(\bar y^*)=\langle\bar y^*,x_0\rangle, \tag{4.2}$$

$$\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)+\left(\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)\right)^*(\bar z^*)=\langle\bar z^*,x_0\rangle, \tag{4.3}$$

$$\delta_C(x_0)+\delta_C^*(p-\bar y^*-\bar z^*)=\langle p-\bar y^*-\bar z^*,x_0\rangle. \tag{4.4}$$

注意到$\delta_A(x_0)=\delta_C(x_0)=\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)=0$，结合(4.2)式，(4.3)式和(4.4)式可得

$$\delta_A(x_0)+(\bar\beta\varphi)(x_0)+(\bar\beta\varphi)^*(\bar y^*)+\left(\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)\right)^*(\bar z^*)+\delta_C^*(p-\bar y^*-\bar z^*)=\langle p,x_0\rangle. \tag{4.5}$$

由(2.2)式及$\bar\beta\in\partial f(\varphi(x_0))$有，

$$f(\varphi(x_0))=\langle\bar\beta,\varphi(x_0)\rangle-f^*(\bar\beta).$$

将(4.5)式与上式相加，化简可得

$$(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)+f^*(\bar\beta)+(\bar\beta\varphi)^*(\bar y^*)+\left(\sum_{t\in\bar H}\bar\mu_t h_t(x_0,\bar v_t)\right)^*(\bar z^*)+\delta_C^*(p-\bar y^*-\bar z^*)=\langle p,x_0\rangle. \tag{4.6}$$

由$x_0\in S(RP_P)$知，x_0是原问题(RP_P)的最优解，即

$$\left(f\circ\varphi+\delta_A\right)(x_0)-\langle p,x_0\rangle=v\left(RP_p\right). \tag{4.7}$$

将上式代入(4.6)式可得，

$$\begin{aligned} v\left(RP_p\right) &= -f^*\left(\bar{\beta}\right)-\left(\bar{\beta}\varphi\right)^*\left(\bar{y}^*\right)-\left(\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\right)^*\left(\bar{z}^*\right)-\delta_C^*\left(p-\bar{y}^*-\bar{z}^*\right) \\ &\le \sup_{\substack{H\in\mathcal{H},\mu\in\mathbb{R}_+^{(H)},v_H\in V_H,\\ \beta\in\partial f(\varphi(x_0)),y^*,z^*\in X^*}}\left\{-f^*(\beta)-(\beta\varphi)^*\left(y^*\right)-\left(\sum_{t\in H}\mu_t h_t\left(\cdot,v_t\right)\right)^*\left(z^*\right)-\delta_C^*\left(p-\bar{y}^*-\bar{z}^*\right)\right\}, \end{aligned}$$

即 $v\left(RD_p\right)\ge v\left(RP_p\right)$，从而，由(4.1)式可得 $v\left(RD_p\right)=v\left(RP_p\right)$ 且 $\left(\bar{H},\bar{\mu},\bar{v}_{\bar{H}},\bar{\beta},\bar{y}^*,\bar{z}^*\right)\in\mathcal{H}\times\mathbb{R}_+^{(\bar{H})}\times V_{\bar{H}}\times\operatorname{dom}f^*\times X^*\times X^*$ 是对偶问题 $\left(RD_p\right)$ 的最优解。因此，问题 (RP) 与问题 (RD) 之间的 Fenchel-Lagrange 稳定全对偶成立。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 假设(ii)成立。设 $x_0\in A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$，由注 3.1 可知，欲证(i)，只需证(3.5)式成立。为此，设 $p\in\partial\left(f\circ\varphi+\delta_A\right)(x_0)$，则由(2.3)式可得，$x_0\in S\left(RP_p\right)$，故(4.7)式成立。由于(ii)成立，则存在 $\bar{H}\in\mathcal{H}$，$\bar{\mu}\in\mathbb{R}_+^{(\bar{H})}$，$\bar{v}_{\bar{H}}\in V_{\bar{H}}$，$\bar{\beta}\in\partial f\left(\varphi(x_0)\right)$，$y^*,z^*\in X^*$ 使得

$$v\left(RP_p\right)=-f^*\left(\bar{\beta}\right)-\left(\bar{\beta}\varphi\right)^*\left(\bar{y}^*\right)-\left(\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\right)^*\left(\bar{z}^*\right)-\delta_C^*\left(p-\bar{z}^*-\bar{y}^*\right).$$

注意到 $\delta_A(x_0)=0$，结合(4.7)式及上式可得，

$$\left(f\circ\varphi\right)(x_0)-\langle p,x_0\rangle=-f^*\left(\bar{\beta}\right)-\left(\bar{\beta}\varphi\right)^*\left(\bar{y}^*\right)-\left(\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\right)^*\left(\bar{z}^*\right)-\delta_C{}^*\left(p-\bar{y}^*-\bar{z}^*\right). \tag{4.8}$$

再结合(2.1)式和(4.8)式可得，

$$\left(f\circ\varphi\right)(x_0)-\langle p,x_0\rangle\le\left(f\circ\varphi\right)(x_0)+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)+\delta_C(x_0)-\langle p,x_0\rangle.$$

由于 $\delta_C(x_0)=0$，所以有 $\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\ge 0$。又因 $x_0\in A$，有 $\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\le 0$，故 $\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)=0$。因此，

$$\begin{aligned} &\left(\left(\bar{\beta}\varphi\right)(x_0)+\left(\bar{\beta}\varphi\right)^*\left(\bar{y}^*\right)-\left\langle\bar{y}^*,x_0\right\rangle\right)+\left(\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)+\left(\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)\right)^*\left(\bar{z}^*\right)-\left\langle\bar{z}^*,x_0\right\rangle\right) \\ &+\left(\delta_C(x_0)+\delta_C^*\left(p-\bar{y}^*-\bar{z}^*\right)-\left\langle p-\bar{y}^*-\bar{z}^*,x_0\right\rangle\right)=0. \end{aligned}$$

由(2.2)式可得 $\bar{y}^*\in\partial\left(\bar{\beta}\varphi\right)(x_0)$，$\bar{z}^*\in\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t\partial h_t\left(\cdot,\bar{v}_t\right)(x_0)$，$p-\bar{y}^*-\bar{z}^*\in\partial\delta_C(x_0)$。因此，(3.5)式成立。证毕。

5. 鲁棒复合优化问题的最优性条件

定理 5.1 设 $x_0\in A\cap\varphi^{-1}(\operatorname{dom}f)$，则以下命题等价：

(i) 系统 $\left\{f,\varphi,\delta_C;h_t:t\in H\right\}$ 在 x_0 点满足松弛型 $(BCQ)_f$ 条件。

(ii) 对任意的 $p\in X^*$，x_0 是问题 $\left(RP_p\right)$ 的最优解当且仅当存在 $\bar{H}\in\mathcal{H}$，$\bar{\mu}\in\mathbb{R}_+^{(\bar{H})}$，$\bar{v}_{\bar{H}}\in V_{\bar{H}}$，$\bar{\beta}\in\partial f\left(\varphi(x_0)\right)$ 使得 $\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t\partial h_t\left(x_0,\bar{v}_t\right)=0$ 且

$$p\in\partial\left(\bar{\beta}\varphi\right)(x_0)+\partial\delta_C(x_0)+\sum_{t\in\bar{H}}\bar{\mu}_t\partial h_t\left(\cdot,\bar{v}_t\right)(x_0).$$

证明 由(2.3)式知，(ii)等价于

$$0 \in \partial\left(f \circ \varphi + \delta_A - p\right)\left(x_0\right) \Leftrightarrow p \in \Phi\left(x_0\right), \forall p \in X^*,$$

即

$$p \in \partial\left(f \circ \varphi + \delta_A\right)\left(x_0\right) \Leftrightarrow p \in \Phi\left(x_0\right), \forall p \in X^*.$$

显然，上式与(3.4)式等价，因此，(i) $\Leftrightarrow$ (ii)。证毕。

定理 5.2 以下命题等价。

(i)

$$N_A(x) = N_C(x) + \bigcup_{\substack{H \in \mathcal{H}, \mu \in \mathbb{R}_+^{(H)}, v_H \in V_H \\ \sum_{t \in H} \mu_t h_t(x, v_t) = 0}} \sum_{t \in H} \mu_t \partial h_t\left(\cdot, v_t\right)(x), \forall x \in X. \tag{5.1}$$

(ii) 若存在 $x \in X$ 使得 f 和 φ 分别在 $\varphi(x)$ 和 x 处连续且 $x_0 \in A$ 为问题(RP)的最优解，则

$$(f \circ \varphi)\left(x_0\right) = \max_{\substack{\left(H, \mu, v_H, \beta, y^*, z^*\right) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^{(H)} \\ \times V_H \times \operatorname{dom} f^* \times X^* \times X^*}} \left\{-f^*(\beta) - (\beta\varphi)^*\left(y^*\right) - \left(\sum_{t \in H} \mu_t h_t\left(\cdot, v_t\right)\right)^*\left(z^*\right) - \delta_C^*\left(-y^* - z^*\right)\right\}. \tag{5.2}$$

(iii) 对任意的 $p \in X^*$，若 $x_0 \in A$ 为 $p(\cdot)$ 在集合 A 上的最小值点，则

$$p\left(x_0\right) = \max_{\left(H, \mu, v_H, z^*\right) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^{(H)} \times V_H \times X^*} \left\{-\delta_C^*\left(p - z^*\right) - \left(\sum_{t \in H} \mu_t h_t\left(\cdot, v_t\right)\right)^*\left(z^*\right)\right\}. \tag{5.3}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 假设(i)成立且设 $\bar{x} \in X$ 使得 f 和 φ 分别在 $\varphi(\bar{x})$ 和 $\bar{x}$ 处连续，则由引理 2.1 知，对任意的 $x \in A \cap \varphi^{-1}(\operatorname{dom} f)$，

$$\partial\left(f \circ \varphi + \delta_A\right)(x) = \partial(f \circ \varphi)(x) + N_A(x) = \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(x))} \partial(\beta\varphi)(x) + N_A(x).$$

由(5.1)式可得，对任意的 $x \in A \cap \varphi^{-1}(\operatorname{dom} f)$，

$$\partial\left(f \circ \varphi + \delta_A\right)(x) = \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(x))} \partial(\beta\varphi)(x) + N_C(x) + \bigcup_{\substack{H \in \mathcal{H}, \mu \in \mathbb{R}_+^{(H)}, v_H \in V_H \\ \sum_{t \in H} \mu_t h_t(x, v_t) = 0}} \sum_{t \in H} \mu_t \partial h_t\left(\cdot, v_t\right)(x),$$

再由注 3.1 得，松弛型$(BCQ)_f$条件成立。于是，由定理 4.1 可得(5.2)式成立。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 假设命题(ii)成立。设 $p \in X^*$，则 $\operatorname{dom} p^* = \{p\}$。从而由定理 4.1 的命题(ii) ($\{p, \mathrm{Id}_X\}$ 替代 $\{f, \varphi\}$)易知(5.3)式成立。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 假设命题(iii)成立，则由定理 4.1 的(ii) $\Rightarrow$ (i) $(f = \varphi = 0)$ 可得(5.1)式成立。证毕。

参考文献

[1] Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A. and Son, T.Q. (2007) New Farkas-Type Constraint Qualifications in Convex Infinite Programming. *ESAIM*: *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **13**, 580-597. https://doi.org/10.1051/cocv:2007027

[2] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Extended Farkas's Lemmas and Lagrangian Dualities in Convex Infinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1311-1332. https://doi.org/10.1137/080739124

[3] 龚鑫，方东辉. 复合优化问题的 Lagrange 全对偶[J]. 湖南文理学院学报：自然科学版, 2015, 27(4): 1-4.

[4] 孙祥凯. 复合凸优化问题全对偶性的等价刻画[J]. 吉林大学学报：理学版, 2015, 53(1): 33-36.

[5] 叶冬平. 鲁棒复合优化问题的对偶理论及最优性条件[D]: [硕士学位论文]. 吉首：吉首大学, 2020.

[6] 叶冬平，方东辉. 鲁棒复合优化问题的 Lagrange 对偶[J]. 数学物理学报, 2020, 40(4): 1095-1107.

[7] Wang, M., Fang, D. and Chen, Z. (2015) Strong and Total Fenchel Dualities for Robust Convex Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 70. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0592-9

[8] Dinh, N., Goberna, M.A., López-Cerdá, M.A. and Volle, M. (2022) Relaxed Lagrangian Duality in Convex Infinite Optimization: Reducibility and Strong Duality. *Optimization*, **72**, 189-214. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2031192

[9] Dinh, N., Goberna, M.A., Lopez, M.A. and Volle, M. (2021) Relaxed Lagrangian Duality in Convex Infinite Optimization: Reverse Strong Duality and Optimality.

[10] 郑晴慧, 胡星星, 王仙云. 凸无限规划的松弛 Lagrange 全对偶及最优性条件[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2022, 43(3): 26-31.

[11] 郑晴慧. 两类鲁棒优化问题的最优性条件及全对偶[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2023.

[12] Hu, X.X., Zheng, Q.H. and Fang, D.H. (2023) Relaxed Type Fenchel-Lagrange Duality for Robust Composite Convex Optimization Problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **24**, 941-954.

[13] 胡星星. 基于上图技巧的鲁棒优化问题的松弛型对偶[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2023.

[14] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Optimality Conditions and Total Lagrange Dualities in Convex Infinite Programming. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 1143-1159. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.020

[15] Zalinescu, C. (2002) Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific.