Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 3903-3916
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138372

Hans汉斯

一个n分支μ-Camassa-Holm系统解的局部适定性和爆破现象研究

高亚琴，王海权*，滕凯民

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2024年7月19日；录用日期：2024年8月11日；发布日期：2024年8月20日

摘 要

首先利用Kato理论，研究了一个具有多尖峰孤子解和满足H^1守恒的n分支μ-Camassa-Holm系统Cauchy问题解的局部适定性；然后利用守恒律和能量估计，研究了该系统解的爆破现象。

关键词

n分支μ-Camassa-Holm系统，局部适定性，爆破现象

Local Well-Posedness and Blow-Up Phenomena of Solutions of a n-Component μ-Camassa-Holm System

Yaqin Gao, Haiquan Wang*, Kaimin Teng

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Jul. 19th, 2024; accepted: Aug. 11th, 2024; published: Aug. 20th, 2024

Abstract

By utilizing Kato theory, this paper first establishes the local well-posedness of the solutions of the Cauchy problem of a n-component μ-Camassa-Holm system with multi-peakons and H^1-conservation law. Then, the blow-up phenomena of the solutions is studied by means of conservation law and energy estimations.

*通讯作者。

文章引用: 高亚琴, 王海权, 滕凯民. 一个 n 分支 μ-Camassa-Holm 系统解的局部适定性和爆破现象研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3903-3916. DOI: 10.12677/aam.2024.138372

Keywords

A *n*-Component μ-Camassa-Holm System, Local Well-Posedness, Blow-Up Phenomena

1. 引言

非线性发展方程是数学学科领域内重要研究分支之一，它是描述动力学的形态随时间而改变的非线性偏微分方程的总称，在流体力学、热传导、量子力学等方面具有重要应用，对于大部分非线性发展方程而言，得到它的精确解是非常困难的，因而可以研究其 Cauchy 问题解的若干定性性质，从而对其他学科的研究提供理论支持。本文主要考虑具有如下形式的 n 分支 μ-Camassa-Holm 系统 Cauchy 问题

$$\begin{cases} m_{i,t}+2m_i u_{i,x}+m_{i,x}u_i+\left(m_i\sum_{j\neq i}^{n}u_j\right)_x+\sum_{j\neq i}^{n}m_j u_{j,x}=0, \\ u_i(0,x)=u_{i,0}(x), \quad x\in\mathbf{S}, \end{cases} \tag{1.1}$$

解的局部适定性以及爆破现象，其中 $m_i=\mu(u_i)-u_{i,xx}$，$\mu(u_i)=\int_{\mathbf{S}}u_i(t,x)\mathrm{d}x$，$i=1,2,\cdots,n$，$\mathbf{S}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\cong(0,1)$，问题(1.1)中的系统是由李颖颖和闫璐[1]提出来的，该系统具有以弱解形式存在的多尖峰孤子解并且满足 H^1 守恒：

$$E\left[(u_i)_{i=1}^{n}\right]=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)\mathrm{d}x。$$

当 $n=1$ 时，问题(1.1)中的系统可简化为 μ-Camassa-Holm (μ-CH)方程

$$m_t+um_x+2u_x m=0，\quad m=\mu(u)-u_{xx}，\quad x\in\mathbf{S}， \tag{1.2}$$

方程(1.2)是由 Khesin，Lenells 和 Misiołek 在文献[2]中提出来的，可作为描述具有自作用和外磁场作用的向列液晶的转子的演化模型。对于该方程 Cauchy 问题解的适定性、尖峰孤子解的存在性以及解的爆破现象等问题的讨论，具体可见文献[3] [4]。

当 $n=2$ 时，问题(1.1)中的系统可简化为具有如下形式的两分支 μ-Camassa-Holm (μ-CH)系统

$$\begin{cases} m_t+2mu_x+m_x u+(mv)_x+nv_x=0, m=\mu(u)-u_{xx}, x\in\mathbf{S}, \\ n_t+2nv_x+n_x v+(nu)_x+mu_x=0, n=\mu(v)-v_{xx}, \end{cases} \tag{1.3}$$

该系统是由李颖颖，付英和屈长征[5]在满足 H^1 守恒和具有多尖峰孤子解的前提下，对带有 μ 形式且具有二次非线性的两分量 CH 型系统进行分类得到的，进一步他们还研究了系统(1.3) Cauchy 问题解的局部适定性以及爆破现象。

解的爆破现象[6] (在有限时间段内，解本身是有界的，但解关于空间变量的导数是无界的)是 CH 型方程以及 μ-CH 型方程区别于著名的浅水波方程 KdV 方程最大的不同点之一。近二十年来，关于这两类方程解的爆破性质研究，已经取得非常丰富的成果，除了上述提到的 μ-CH 方程和两分支 μ-CH 系统，还有 CH 方程[6]-[8]，Novikov 方程[9]，修正的 CH 方程[10] [11]，修正的 μ-CH 方程[12]，μ-Degasperis-Procesi 方

程[3]等，这些方程解的爆破现象都被不同学者进行了详细研究。本文所讨论的是一个 n 分支 μ-Camassa-Holm 系统，它的研究还处于初级阶段，与以往所研究的方程结构不同，它本身具有 n ($n\geq 2$)个分支，所以在讨论解的爆破性质时，需要考虑这 n 个分支之间的相互作用，这无疑给研究解的爆破性质带来了很大困难。另外它也是一个带有 μ 形式的方程，是一种具有退化形式的方程即将算子 $\left(1-\partial_x^2\right)u$ 退化为 $\left(\mu-\partial_x^2\right)u$，因此对于该类型方程解的爆破性质的研究与非退化形式有很大的不同。本文首先利用 Kato 理论[13]研究问题(1.1)解的局部适定性，然后以解的局部适定性为基础，分别给出解在 Sobolev 空间中的爆破图景，爆破准则以及爆破结果。

本文结构如下：第二部分介绍了证明问题(1.1)解的爆破现象的一些引理；第三部分，利用 Kato 理论证明了该问题解的局部适定性；第四部分，依次给出了解的爆破图景、爆破准则以及爆破结果。

符号说明：本文考虑的所有函数的定义域都为 $\mathbf{S}$，其中 $\mathbf{S}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\simeq(0,1)$，为了简便，在函数空间的标记中省略 $\mathbf{S}$。另外，$(\cdot|\cdot)_s$ 表示空间 $H^s(\mathbf{S})$ 中的内积运算，$s\in\mathbf{R}^+$。且记 $\Lambda=1-\partial_x^2$，$\mathrm{A}=\mu-\partial_x^2$。

2. 预备知识

首先，为了估算方便，上述问题(1.1)可以化为如下非局部形式

$$\begin{cases} u_{i,t}+\sum_{j=1}^{n}u_ju_{i,x}=\sum_{j\neq i}^{n}\mu\left(u_{i,x}u_j\right)-\partial_x\mathrm{A}^{-1}\left[\mu\left(u_i\right)\left(2u_i+\sum_{j\neq i}^{n}u_j\right)\right.\\ \qquad\left.+\sum_{j\neq i}^{n}\mu\left(u_j\right)u_j+\sum_{j\neq i}^{n}u_{i,x}u_{j,x}+\frac{1}{2}u_{i,x}^2-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{n}u_{j,x}^2\right]\\ u_i\left(0,x\right)=u_{i,0}\left(x\right),\quad x\in\mathbf{S}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$。

接下来介绍证明问题(2.1)爆破图景、爆破准则以及爆破结果所需要的一些引理。

引理 2.1 [6] 如果 $f\in H^3$ 且 $\int_{\mathbf{S}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\max_{x\in\mathbf{S}}f^2(x)\leq\frac{\varepsilon+2}{24}\int_{\mathbf{S}}f_x^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon+2}{4\varepsilon}a_0^2\text{。}$$

注 2.1：由于 H^3 连续稠密地嵌入 H^1，上述引理对于任意的 $f\in H^1$ 也成立。此外，如果 $\int_{\mathbf{S}}f(x)\mathrm{d}x=0$，则有

$$\max_{x\in\mathbf{S}}f^2(x)\leq\frac{1}{12}\int_{\mathbf{S}}f_x^2(x)\mathrm{d}x,\quad f\in H^1\text{。}$$

引理 2.2 [7] 令 $T>0$，$u\in C^1\left([0,T);H^2\right)$，则对任意的 $t\in[0,T)$，至少存在一点 $\xi(t)\in\mathbf{S}$ 使得

$$\omega(t):=\inf_{x\in\mathbf{S}}u_x(t,x)=u_x\left(t,\xi(t)\right)\text{。}$$

此外，$\omega(t)$ 在 $(0,T)$ 是绝对连续函数，并且有

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=u_{xt}\left(t,\xi(t)\right),\quad a.e.\ t\in(0,T)\text{。}$$

引理 2.3 [14] 若 $r>0$，则 $H^r\cap L^\infty$ 是一个代数，且存在一个仅依赖于 r 的常数 C 有

$$\|fg\|_{H^r}\leq C\left(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^r}+\|f\|_{H^r}\|g\|_{L^\infty}\right)\text{。}$$

引理 2.4 [15] 若 $r>0$，则存在一个仅依赖于 r 的常数 C 有

$$\left\|\left[\Lambda^r, f\right]g\right\|_{L^2} \le C\left(\left\|\partial_x f\right\|_{L^\infty}\left\|\Lambda^{r-1}g\right\|_{L^2} + \left\|\Lambda^r f\right\|_{L^2}\left\|g\right\|_{L^\infty}\right)。$$

引理 2.5 [16] 设$1 \le q \le r \le p \le \infty$，且$\theta \in [0,1]$满足$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$，则对任意的$u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$有

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \le \|u\|_{L^q(\Omega)}^{\theta}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}。$$

最后，证明 n 分支 μ -Camassa-Holm 系统的一些先验估计。

由于该系统具有多尖峰孤子解以及满足H^1守恒，通过计算可知，$\mu(u_i)$，$\int_{\mathbb{S}} u_{i,x}^2(t,x)\mathrm{d}x$在时间上守恒，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(u_i) = 0，$$

为了书写方便，记

$$\mu_{i,0} := \mu(u_{i,0}) = \mu(u_i)，\quad \mu_{i,1} := \left(\int_{\mathbb{S}} u_{i,x}^2(0,x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}，$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$。

此外，利用引理 2.1 可得

$$\max_{x\in\mathbb{S}}\left[u_i(t,x) - \mu_{i,0}\right]^2 \le \frac{1}{12}\int_{\mathbb{S}} u_{i,x}^2(t,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int_{\mathbb{S}} u_{i,x}^2(0,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\mu_{i,1}^2，$$

进一步有

$$\left\|u_i(t,x) - \mu_{i,0}\right\|_{L^\infty} \le \frac{\sqrt{3}}{6}\mu_{i,1}， \tag{2.2}$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$。

算子$\mathrm{A} = \mu - \partial_x^2$为$H^s$到$H^{s-2}$的同构映射，具有如下性质：

$$\partial_x \mathrm{A}^{-1} f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^x f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x，$$

$$\partial_x^2 \mathrm{A}^{-1} f(x) = -f(x) + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x， \tag{2.3}$$

且有如下估计

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x \mathrm{A}^{-1}u\right\|_{H^s} &\le \left\|\partial_x \mathrm{A}^{-1}u\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x \mathrm{A}^{-1}\partial_x u\right\|_{H^{s-1}} \\ &\le C\|u\|_{L^2} + \left\|-u + \int_{\mathbb{S}} u\mathrm{d}x\right\|_{H^{s-1}} \\ &\le C\|u\|_{H^{s-1}}，\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中$C > 0$为常数。

为了书写方便，以下证明中出现的 i，如若没有特殊说明，均有$i = 1, 2, \cdots, n$。

3. 解的局部适定性

在这一部分主要利用 Kato 理论[13]研究问题(2.1)解在 Sobolev 空间中的局部适定性，定理如下：

定理 3.1 假设初值$z_0 = \left(u_{1,0}, u_{2,0}, \cdots, u_{n,0}\right)' \in \left(H^s\right)^n$，$s > 3/2$，则存在某个时间$T > 0$使得 Cauchy 问题(2.1)有唯一的解$z = \left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)'$，且

$$z\in C\left(\left[0,T\right);\left(H^{s}\right)^{n}\right)\cap C^{1}\left(\left[0,T\right);\left(H^{s-1}\right)^{n}\right),$$

其中 T 依赖于初值 z_0。

注 3.1 定理 3.1 中解的最大存在时间 T 不依赖于 s。

证明 考虑如下形式的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+H(z)z=f(z), & t>0,\\ z(0)=z_0,\end{cases}$$

其中 $z=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'$，$H(z)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\partial_x\right)I_n$（$I_n$ 表示 n 阶单位矩阵），且

$$f(z)=\left(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z)\right)',$$

其中

$$f_i(z)=\sum_{j\neq i}^{n}\mu\left(u_{i,x}u_j\right)-\partial_x\mathrm{A}^{-1}\left(2\mu_{i,0}u_i+\mu_{i,0}\sum_{j\neq i}^{n}u_j+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}u_j+u_{i,x}\sum_{j\neq i}^{n}u_{j,x}+\frac{1}{2}u_{i,x}^2-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{n}u_{j,x}^2\right)。$$

令 $X=\left(H^{s-1}\right)^n$，$Y=\left(H^{s}\right)^n$，$Q=\left(1-\partial_x^2\right)^{1/2}I_n$，显然 $Q:\left(H^{s}\right)^n\to\left(H^{s-1}\right)^n$ 为等距映射。为了证明定理 3.1，需说明 $H(z)$ 和 $f(z)$ 满足 Kato 理论[13]中的三个条件，根据文献[17]中引理 4.1~4.5，可以得到下面类似的引理：

引理 3.1 算子 $H(z)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\partial_x\right)I_n\in G\left(\left(L^2\right)^n,1,\beta\right)$，其中 $z\in\left(H^{s}\right)^n$，$s>3/2$。

引理 3.2 算子 $H(z)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\partial_x\right)I_n\in G\left(\left(H^{s-1}\right)^n,1,\beta\right)$，其中 $z\in\left(H^{s}\right)^n$，$s>3/2$。

引理 3.3 令算子 $H(z)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\partial_x\right)I_n$，其中 $z\in\left(H^{s}\right)^n$，$s>3/2$，则 $H(z)\in L\left(\left(H^{s}\right)^n,\left(H^{s-1}\right)^n\right)$，且

$$\left\|\left(H(y)-H(z)\right)\omega\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n}\le C_1\left\|y-z\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n}\left\|\omega\right\|_{\left(H^{s}\right)^n},\quad y,z,\omega\in\left(H^{s}\right)^n。$$

引理 3.4 令 $B(z)=QH(z)Q^{-1}-H(z)$，其中 $z\in\left(H^{s}\right)^n$，$s>3/2$，则 $B(z)\in L\left(\left(H^{s-1}\right)^n\right)$ 且

$$\left\|\left(B(y)-B(z)\right)\omega\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n}\le C_2\left\|y-z\right\|_{\left(H^{s}\right)^n}\left\|\omega\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n},\quad y,z\in\left(H^{s}\right)^n,\omega\in\left(H^{s-1}\right)^n。$$

引理 3.5 令 $z=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'\in\left(H^{s}\right)^n$，$s>3/2$，$f(z)=\left(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z)\right)'$，则 f 在空间 $\left(H^{s}\right)^n$ 的有界子集上一致有界，且满足

$$\left\|f(y)-f(z)\right\|_{\left(H^{s}\right)^n}\le C_3\left\|y-z\right\|_{\left(H^{s}\right)^n},\quad y,z\in\left(H^{s}\right)^n,$$

$$\left\|f(y)-f(z)\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n}\le C_4\left\|y-z\right\|_{\left(H^{s-1}\right)^n},\quad y,z\in\left(H^{s}\right)^n。$$

注 3.2 上述引理 3.3~3.5 中出现的 C_1，C_2，C_3，C_4 均依赖于 $\max\left(\left\|y\right\|_{\left(H^{s}\right)^n},\left\|z\right\|_{\left(H^{s}\right)^n}\right)$。

最后，根据引理 3.1~3.5，再结合 Kato 理论[13]，可以得到问题(2.1)解的局部适定性，即定理 3.1。

4. 爆破现象

这一部分以局部适定性的结果为基础，研究问题(2.1)解在 Sobolev 空间中的爆破图景、爆破准则以及爆破结果，首先给出如下爆破图景：

定理 4.1 假设初值 $z_0=\left(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0}\right)'\in\left(H^s\right)^n$，$s>3/2$，$i=1,2,\cdots,n$，且 T 是 Cauchy 问题(2.1)解的最大存在时间，则 T 是有限的使得

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\left\|u_{i,x}(\tau)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau=\infty\text{。}$$

证明 现假设初值 $z_0=\left(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0}\right)'\in\left(H^s\right)^n$，$s>3/2$，根据定理 3.1，假设 $T>0$ 是问题(2.1)解的最大存在时间。

对系统(2.1)中第 i 个方程利用 Λ^s，两边同乘 $\Lambda^s u_i$ 并对 x 在 $\mathbf{S}$ 上积分有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u_i\right\|_{H^s}^2+\left(\sum_{j=1}^n u_ju_{i,x},u_i\right)_s=\left(u_i,f_i(z)\right)_s,\tag{4.1}$$

其中

$$f_i(z)=\sum_{j\neq i}^n\mu\left(u_{i,x}u_j\right)-\partial_x\Lambda^{-1}\left(2\mu_{i,0}u_i+\mu_{i,0}\sum_{j\neq i}^n u_j+\sum_{j\neq i}^n\mu_{j,0}u_j+u_{i,x}\sum_{j\neq i}^n u_{j,x}+\frac{1}{2}u_{i,x}^2-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^n u_{j,x}^2\right)\text{。}$$

利用 Hölder 不等式以及引理 2.4 对(4.1)式左边第二项进行估计有

$$\begin{aligned}\left|\left(u_{i,x}\sum_{j=1}^n u_j,u_i\right)_s\right|&=\left|\left(\left[\Lambda^s,\sum_{j=1}^n u_j\right]u_{i,x},\Lambda^s u_i\right)_0+\left(\sum_{j=1}^n u_j\Lambda^s u_{i,x},\Lambda^s u_i\right)_0\right|\\&\le\left\|\left[\Lambda^s,\sum_{j=1}^n u_j\right]u_{i,x}\right\|_{L^2}\left\|\Lambda^s u_i\right\|_{L^2}+\frac{1}{2}\left|\left(\sum_{j=1}^n u_{j,x}\Lambda^s u_i,\Lambda^s u_i\right)_0\right|\\&\le C\left(\left\|\sum_{j=1}^n u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\left\|u_i\right\|_{H^s}+\left\|u_{i,x}\right\|_{L^\infty}\left\|\sum_{j=1}^n u_j\right\|_{H^s}\right)\left\|u_i\right\|_{H^s}+\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^n u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\left\|u_i\right\|_{H^s}^2\\&\le C\left(\sum_{j=1}^n\left\|u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\right)\left(\sum_{j=1}^n\left\|u_j\right\|_{H^s}^2\right),\end{aligned}\tag{4.2}$$

接下来根据(2.4)式、引理 2.3 以及 H^s 嵌入 L^∞ 对(4.1)式右边进行估计有

$$\begin{aligned}\left|\left(u_i,f_i(z)\right)_s\right|&=\left|\left(\sum_{j\neq i}^n\mu\left(u_{i,x}u_j\right)-\partial_x\Lambda^{-1}\left(2\mu_{i,0}u_i+\mu_{i,0}\sum_{j\neq i}^n u_j+\sum_{j\neq i}^n\mu_{j,0}u_j+u_{i,x}\sum_{j\neq i}^n u_{j,x}+\frac{1}{2}u_{i,x}^2-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^n u_{j,x}^2\right),u_i\right)_s\right|\\&\le\sum_{j\neq i}^n\left|\mu\left(u_{i,x}u_j\right)\right|\left\|u_i\right\|_{H^s}+C\left\|u_i\right\|_{H^s}\left(\sum_{j=1}^n\left\|u_j^2\right\|_{H^{s-1}}+\sum_{j=1}^n\left\|u_{j,x}^2\right\|_{H^{s-1}}\right)\\&\le C\left\|u_i\right\|_{H^s}\left(\sum_{j\neq i}^n\left\|u_{i,x}\right\|_{L^\infty}\left\|u_j\right\|_{L^\infty}+\sum_{j=1}^n\left\|u_j\right\|_{L^\infty}\left\|u_j\right\|_{H^{s-1}}+\sum_{j=1}^n\left\|u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\left\|u_{j,x}\right\|_{H^{s-1}}\right)\\&\le C\left(\sum_{j=1}^n\left(\left\|u_j\right\|_{L^\infty}+\left\|u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^n\left\|u_j\right\|_{H^s}^2\right),\end{aligned}\tag{4.3}$$

因此，结合(4.1)式~(4.3)式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^n\left\|u_i\right\|_{H^s}^2\right)\le C\left(\sum_{j=1}^n\left(\left\|u_j\right\|_{L^\infty}+\left\|u_{j,x}\right\|_{L^\infty}\right)\left(\sum_{j=1}^n\left\|u_j\right\|_{H^s}^2\right)\right),$$

对 t 在 $[0,t]$ 上积分有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{H^s} &\le \sum_{i=1}^{n}\|u_{i,0}\|_{H^s}+C\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{H^s}\sum_{j=1}^{n}\left(\|u_j\|_{L^\infty}+\|u_{j,x}\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}\tau\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\|u_{i,0}\|_{H^s}+C\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{H^s}\sum_{i=1}^{n}\|u_{i,x}\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

最后利用 Gronwall 不等式可以得到

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{H^s}\le\sum_{i=1}^{n}\|u_{i,0}\|_{H^s}\exp\left\{C\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\|u_{i,x}\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau\right\}, \tag{4.4}$$

若 $T<\infty$ 满足 $\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\|u_{i,x}\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau<\infty$，则根据(4.4)式有

$$\lim_{t\to T}\sup_{x\in\mathbf{S}}\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{H^s}<\infty,$$

于是 $T=\infty$，与假设 $T<\infty$ 矛盾，这也就完成了定理 4.1 的证明。

其次，在给出爆破准则前先介绍如下定义：

设 $q(t,x)$ 是随着解 $z(t,x)$ 发展的例子轨迹，并且满足方程

$$\begin{cases}q_t(t,x)=z(t,q(t,x)),\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{S},\\ q(0,x)=x,\ x\in\mathbf{S},\end{cases} \tag{4.5}$$

其中 $z=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'\in C^1\left([0,T),\left(H^{s-1}\right)^n\right)$ 是 Cauchy 问题(2.1)的解，初值 $z_0=(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0})'\in\left(H^s\right)^n$，$s>3/2$，$i=1,2,\cdots,n$，且 T 是 Cauchy 问题(2.1)解的最大存在时间。通过计算有

$$q_{tx}(t,x)=z_x(t,q(t,x))q_x(t,x),$$

于是对于 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbf{S}$ 有

$$q_x(t,x)=\exp\left\{\int_0^t z_x(\tau,q(\tau,x))\mathrm{d}\tau\right\}>0,$$

因此对于任意的 $t\in[0,T)$，$q(t,\cdot):\mathbf{S}\to\mathbf{S}$ 是微分同胚映射。

接着利用上述定义、守恒律以及定理 4.1 给出问题(2.1)解的爆破准则。

定理 4.2 假设初值 $z_0=(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0})'\in\left(H^s\right)^n$，$s>3/2$，$i=1,2,\cdots,n$，$T$ 是 Cauchy 问题(2.1)解的最大存在时间，则 T 是有限的当且仅当满足

$$\liminf_{t\to T}\left\{\inf_{x\in\mathbf{S}}\left[u_{i,x}(x,t)\right]\right\}=-\infty。 \tag{4.6}$$

证明 利用定理 3.1 以及稠密性定理，接下来考虑 $s=3$ 的情况。将系统(2.1)中的前 n 个方程相加并通过整理可得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)_t+\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)\\ &=-\partial_x\mathrm{A}^{-1}\left[(n+1)\sum_{i=1}^{n}\mu(u_i)u_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu(u_i)\sum_{j\ne i}^{n}u_j\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}u_{i,x}u_{j,x}-\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)\right],\end{aligned}$$

上述等式左右两边对 x 求偏导同时利用(2.3)式可以得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)_t+\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2+\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,xx}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})-\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right),$$

通过整理有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)_t+\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2+\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,xx}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right), \tag{4.7}$$

令 $m_i(t)=u_{i,x}(t,\alpha(t))=\sup_{x\in\mathbf{S}}(u_{i,x}(t,x)),t\in[0,T)$，于是

$$u_{i,xx}(t,\alpha(t))=0,\quad a.e.\,t\in[0,T)。$$

令 $q(t,x)$ 为上述(4.5)式中定义的特征线，由于对于任意的 $t\in[0,T)$， $q(t,\cdot):\mathbf{S}\to\mathbf{S}$ 是微分同胚映射，因此存在 $x_1(t)\in\mathbf{S}$ 使得

$$q(t,x_1(t))=\alpha(t),\quad t\in[0,T),$$

令 $M_i(t)=u_{i,x}(t,q(t,x_1))$，于是上述(4.7)式可改写为如下形式

$$\sum_{i=1}^{n}M_i'(t)=-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2+f(t,q(t,x_1)), \tag{4.8}$$

其中

$$f=\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)。$$

下面假设 $T<\infty$，且存在一个正数 A，使得 $\inf_{x\in\mathbf{S}}(u_{i,x}(t,x))\ge -A$。

结合

$$2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})\le\sum_{1\le i<j\le n}(\mu_{i,1}^2+\mu_{j,1}^2)=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)$$

以及(2.2)式对函数 f 进行估计有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\right|$$
$$\le\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right) \tag{4.9}$$
$$:=\frac{1}{2}N^2$$

对于任意的 $x\in\mathbf{S}$，定义

$$P_i(t)=M_i(t)-\left\|u_{i,0}'\right\|_{L^\infty}-\frac{N}{n}, \tag{4.10}$$

满足

$$P_i(0)=u'_{i,0}-\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}-\frac{N}{n}\le 0 \text{。}$$

现在说明 $P_i(t)\le 0$，$t\in[0,T)$，若不成立，则存在一些 $t_0\in[0,T)$，使得 $P_i(t_0)>0$，令 $t_1=\max\{t<t_0;P_i(t)=0\}$，则

$$P_i(t_1)=0\text{，}\quad P_i'(t_1)\ge 0\text{，}$$

于是根据(4.10)式有

$$M_i(t_1)=\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}+\frac{N}{n}\text{，}\tag{4.11}$$

$$M_i'(t_1)\ge 0\text{，}\tag{4.12}$$

另一方面，通过(4.8)式、(4.9)式以及(4.11)式有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_i'(t_1)&=-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n u_{i,x}^2+f(t_1,q(t_1,x_1))\\&\le-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n M_i(t_1)\right)^2+\frac{1}{2}N^2=-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}+N\right)^2+\frac{1}{2}N^2\\&=-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}^2+2\sum_{i=1}^n\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}N\right)<0,\end{aligned}$$

与(4.12)式矛盾，因此对任意的 $t\in[0,T)$ 有 $P_i(t)\le 0$，所以

$$\sup_{x\in\mathbf{S}}u_{i,x}(t,x)\le\|u'_{i,0}\|_{L^\infty}+\frac{N}{n}\text{，}$$

又由于 $\inf_{x\in\mathbf{S}}u_{i,x}(t,x)\ge -A$，故 $\|u_{i,x}(t,x)\|_{L^\infty}<\infty$，根据定理 4.1 有 $T=\infty$，这与假设 $T<\infty$ 矛盾，充分性得证。

反之，如果(4.6)式成立，根据 H^s 嵌入 L^∞，$s>1/2$ 可知，解在有限时间内爆破，必要性得证。这就完成了定理 4.2 的证明。

最后，根据定理 4.2 给出问题(2.1)解的两个爆破结果。

定理 4.3 假设初值 $z_0=(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0})'\in(H^s)^n$，$s>3/2$，$i=1,2,\cdots,n$，$n$ 是偶数，$T_0>0$ 是 Cauchy 问题(1.1)解 $z=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'$ 的最大存在时间，且 $\sum_{i=1}^n u_{i,x}$ 在 $\mathbf{S}$ 上不变号，如果

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^n u'_{i,0}\right)\mathrm{d}x<-n\left(\sum_{i=1}^n\mu_{i,1}^2\right)\left[\frac{2(n+1)}{n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{i=1}^n\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^n\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\sum_{i=1}^n\mu_{i,1}^2\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}\\:\equiv -K\end{aligned}$$

则解在有限时间 T 内发生爆破，其中

$$0<T\le-\frac{2n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^n\mu_{i.1}^2\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^n u'_{i,0}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left[-K\left(\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^n u'_{i,0}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{-n^2+2n+1}{(n-1)^2}}\right]^{\frac{n-1}{2}}}\text{，}$$

且有

$$\liminf_{t\to T}\left\{\inf_{x\in\mathbf{S}}\left[\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}(x,t)\right]\right\}=-\infty\text{。}$$

证明 根据定理 3.1，存在 $T_0>0$ 使得 Cauchy 问题(2.1)存在唯一的解 $z=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in C\left([0,T_0);(H^s)^n\right)$。

首先，将(4.7)式左右两边同乘 $(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^n$ 并对 x 在 $\mathbf{S}$ 上积分有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x+\frac{n(n+1)}{2}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+2}\mathrm{d}x$$
$$=(n+1)\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)\left(u_i-\mu_{i,0}\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu\left(u_{i,x}u_{j,x}\right)+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\right]\mathrm{d}x,$$

另外根据

$$\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\mathrm{d}x\ge\frac{1}{n}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+2}\mathrm{d}x\text{，}$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x+\frac{n-1}{2}\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+2}\mathrm{d}x\\&\le(n+1)\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)\left(u_i-\mu_{i,0}\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu\left(u_{i,x}u_{j,x}\right)+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.13}$$

接下来对不等式(4.13)左边第二项进行估计。利用引理 2.5 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^{n+1}}\le\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^2}^{\frac{2}{n(n+1)}}\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^{n+2}}^{\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}},$$

从而可以得到

$$\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+2}\mathrm{d}x\ge\frac{1}{\left(n\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}}\left(\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-1}}\text{。}\tag{4.14}$$

紧接着对(4.13)式右边进行估计。同样的方法，利用引理 2.5 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^{n}}\le\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^2}^{\frac{2}{n(n-1)}}\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right\|_{L^{n+1}}^{\frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}},$$

即

$$\left|\int_{\mathbf{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\mathrm{d}x\right|\le\int_{\mathbf{S}}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right|^{n}\mathrm{d}x\le n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{\mathbf{S}}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right|^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

根据假设 $\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}$ 在 $\mathbf{S}$ 上不变号，则可以得到

$$\left|\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\mathrm{d}x\right|\le n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-2}{n-1}}。\tag{4.15}$$

再结合(2.2)式以及

$$2\sum_{1\le i<j\le n}\mu\left(u_{i,x}u_{j,x}\right)\le\sum_{1\le i<j\le n}\left(\mu_{i,1}^{2}+\mu_{j,1}^{2}\right)=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\left|(n+1)\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu\left(u_{i,x}u_{j,x}\right)+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\le(n+1)n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{4.16}$$

最后，将(4.13)式~(4.16)式相结合可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\le\left(\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-2}{n-1}}&\left[-\frac{n-1}{2}\frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\left(\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n-1}}\right.\\&\left.+(n+1)n^{\frac{1}{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)\right]\right]\end{aligned}\tag{4.17}$$

令 $V(t)=\int_{\mathrm{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^{n+1}\mathrm{d}x$， $t\in[0,T)$，

$$K:=n\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)\left[\frac{2(n+1)}{n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}},\quad c:=\frac{n^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^{2}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

则(4.17)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)\le\left[V(t)\right]^{\frac{n-2}{n-1}}\left(-\frac{1}{2c}\left(V(t)\right)^{\frac{2}{n-1}}+\frac{1}{2c}K^{\frac{2}{n-1}}\right)。\tag{4.18}$$

根据假设条件 $V(0)<-K$，则 $V'(0)<0$，且 $V(t)$ 在 $[0,T)$ 严格单调递减。令

$$c\delta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{K}{-V(0)}\right)^{\frac{n-1}{2}}\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

则

$$\left(V(0)\right)^{\frac{2}{n-1}}=\frac{K^{\frac{2}{n-1}}}{(1-2c\delta)^{\left(\frac{2}{n-1}\right)^{2}}}<\left(V(t)\right)^{\frac{2}{n-1}},$$

即

$$K^{\frac{2}{n-1}}<(1-2c\delta)^{\left(\frac{2}{n-1}\right)^2}\left(V(t)\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{4.19}$$

将(4.19)式代入到(4.18)式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)\le-\frac{1}{2c}\left[V(t)\right]^{\frac{n}{n-1}}\left(1-(1-2c\delta)^{\frac{4}{(n-1)^2}}\right)\le-\delta\left[V(t)\right]^{\frac{n}{n-1}},\quad t\in[0,T),$$

不等式两边对 t 在 $[0,t)$ 上积分可得

$$V(t)\le\frac{V(0)}{\left(1+\frac{\delta}{n-1}t\left(V(0)\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}},$$

这也就是说

$$T\le-\frac{1}{\frac{\delta}{n-1}\left(V(0)\right)^{\frac{1}{n-1}}}<+\infty,$$

根据定理 4.2 有

$$\liminf_{t\to T}\left\{\inf_{x\in\mathbb{S}}\left[\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}(x,t)\right]\right\}=-\infty,$$

这也就完成了定理 4.3 的证明。

定理 4.4 假设初值 $z_0=\left(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{n,0}\right)'\in\left(H^s\right)^n$，$s>3/2$，$i=1,2,\cdots,n$，$T_0>0$ 是 Cauchy 问题(2.1)解的最大存在时间，如果

$$\inf_{x\in\mathbb{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u'_{i,0}(x)\right)<-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{3}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right|+(3n-4)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)}$$
$$:=-Q$$

则解在有限时间 T 内发生爆破，其中

$$0<T\le-\frac{2}{\inf_{x\in\mathbb{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u'_{i,0}(x)\right)+\sqrt{-Q\inf_{x\in\mathbb{S}}\left(\sum_{i=1}^{n}u'_{i,0}(x)\right)}},$$

且有

$$\liminf_{t\to T}\left\{\inf_{x\in\mathbb{S}}\left[\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}(x,t)\right]\right\}=-\infty\text{。}$$

证明 利用定理 3.1 以及稠密性定理，接下来考虑 $s=2$ 的情况。令 $\omega=\sum_{i=1}^{n}u_i$，则(4.7)式可写为

$$\omega_{x,t}+\omega\omega_{xx}+\frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\ne i}^{n}\mu_{j,0}\right)\left(u_i-\mu_{i,0}\right)\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu\left(u_{i,x}u_{j,x}\right)+\frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2,$$

根据引理 2.2，现定义 $l(t)=\omega_x\left(t,\xi(t)\right)=\inf_{x\in\mathbb{S}}\left[\omega_x(t,x)\right]$，则对任意的 $t\in[0,T)$ 有 $\omega_{xx}\left(t,\xi(t)\right)=0$，于是有

$$l'(t)+\frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})+\frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2,\quad a.e.\,t\in[0,T)。\tag{4.20}$$

利用(2.2)式以及

$$2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})\le\sum_{1\le i<j\le n}(\mu_{i,1}^2+\mu_{j,1}^2)=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right),$$

对等式(4.20)右边进行估计有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\left((n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right)(u_i-\mu_{i,0})-2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_{i,x}u_{j,x})+\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\right|\\&\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{6}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right|+\frac{3n-4}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)\\&:=\frac{1}{2}Q^2,\end{aligned}\tag{4.21}$$

再根据

$$\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}^2\ge\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,x}\right)^2,$$

以及(4.20)式、(4.21)式可以推出

$$l'(t)\le-\frac{1}{2}l^2(t)+\frac{1}{2}Q^2,$$

其中

$$Q=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{3}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right|+(3n-4)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)},$$

重复上述定理 4.3 的证明可知，如果

$$l(0)<-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{3}\mu_{i,1}\left|(n+1)\mu_{i,0}+\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{j,0}\right|+(3n-4)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,1}^2\right)},$$

则 T 是有限的，且有

$$0<T\le-\frac{2}{l(0)+\sqrt{-Ql(0)}},$$

以及

$$\lim_{t\to T}l(t)=-\infty,$$

这就完成了定理 4.4 的证明。

基金项目

山西省基础研究计划项目(20210302124259)。

参考文献

[1] 李颖颖，闫璐．具有尖峰孤子解的三分量μ-Camassa-Holm 方程组[J]．纯粹数学与应用数学, 2020, 36(2): 168-183.

[2] Khesin, B., Lenells, J. and Misiołek, G. (2008) Generalized Hunter-Saxton Equation and the Geometry of the Group of Circle Diffeomorphisms. *Mathematische Annalen*, **342**, 617-656. https://doi.org/10.1007/s00208-008-0250-3

[3] Fu, Y., Liu, Y. and Qu, C. (2012) On the Blow-Up Structure for the Generalized Periodic Camassa-Holm and Degasperis-Procesi Equations. *Journal of Functional Analysis*, **262**, 3125-3158. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.01.009

[4] Lenells, J., Misiołek, G. and Tiğlay, F. (2010) Integrable Evolution Equations on Spaces of Tensor Densities and Their Peakon Solutions. *Communications in Mathematical Physics*, **299**, 129-161. https://doi.org/10.1007/s00220-010-1069-9

[5] Li, Y., Fu, Y. and Qu, C. (2020) The Two-Component-Camassa-Holm System with Peaked Solutions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **40**, 5929-5954. https://doi.org/10.3934/dcds.2020253

[6] Constantin, A. (2000) On the Blow-Up of Solutions of a Periodic Shallow Water Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **10**, 391-399. https://doi.org/10.1007/s003329910017

[7] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Wave Breaking for Nonlinear Nonlocal Shallow Water Equations. *Acta Mathematica*, **181**, 229-243. https://doi.org/10.1007/bf02392586

[8] Constantin, A. and Escher, J. (2000) On the Blow-Up Rate and the Blow-Up Set of Breaking Waves for a Shallow Water Equation. *Mathematische Zeitschrift*, **233**, 75-91. https://doi.org/10.1007/pl00004793

[9] Wu, X. and Yin, Z. (2012) Well-Posedness and Global Existence for the Novikov Equation. *Annali Scuola Normale Superiore-Classe di Scienze*, **11**, 707-727. https://doi.org/10.2422/2036-2145.201007_001

[10] Fu, Y., Gui, G., Liu, Y. and Qu, C. (2013) On the Cauchy Problem for the Integrable Modified Camassa-Holm Equation with Cubic Nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1905-1938. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.024

[11] Gui, G., Liu, Y., Olver, P.J. and Qu, C. (2012) Wave-Breaking and Peakons for a Modified Camassa-Holm Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **319**, 731-759. https://doi.org/10.1007/s00220-012-1566-0

[12] Qu, C., Fu, Y. and Liu, Y. (2014) Well-Posedness, Wave Breaking and Peakons for a Modified M-Camassa-Holm Equation. *Journal of Functional Analysis*, **266**, 433-477. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.09.021

[13] Kato, T. (1975) Quasi-Linear Equations of Evolution, with Applications to Partial Differential Equations. In: Everitt, W.N., Ed., *Spectral Theory and Differential Equations*, Springer, Berlin, 25-70. https://doi.org/10.1007/bfb0067080

[14] Kato, T. and Ponce, G. (1988) Commutator Estimates and the Euler and Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**, 891-907. https://doi.org/10.1002/cpa.3160410704

[15] Iorio Jr, R.J. and Iorio, V.d.M. (2001) Fourier Analysis and Partial Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/cbo9780511623745

[16] Evans, L.C. (1998) Partial Differential Equations. *Journal of Symbolic Logic*, *American Mathematical Society*, **19**, 623-624.

[17] Fu, Y. and Qu, C. (2009) Well Posedness and Blow-Up Solution for a New Coupled Camassa-Holm Equations with Peakons. *Journal of Mathematical Physics*, **50**. https://doi.org/10.1063/1.3064810