

理想磁流体方程的MUSCL-型熵相容格式研究

任潇潇, 封建湖*, 任书锐

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2024年7月19日; 录用日期: 2024年8月11日; 发布日期: 2024年8月20日

摘要

针对磁流体动力学方程, 本文提出了一种基于MUSCL-Hancock方法求解MHD方程的熵相容格式(EC-MHM格式), 获得了一种求解理想磁流体动力学方程的高分辨率熵相容格式。该格式在解的光滑区域具有高精度; 在解的间断区域可以合理地控制耗散, 使抹平现象得到改善, 还可有效避免非物理现象的产生。文中还证明了熵相容格式的收敛性。采用熵稳定格式、熵相容格式和新的分辨率熵相容格式对理想磁流体动力学方程进行数值模拟。结果表明: 新格式能准确地捕捉解的结构, 且具有无振荡、高分辨、鲁棒等特性。

关键词

磁流体方程, 熵相容格式, 高分辨率

The Research of MUSCL-Type Entropy Consistent Schemes for Ideal Magnetohydrodynamics Equations

Xiaoxiao Ren, Jianhu Feng*, Shurui Ren

College of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Jul. 19th, 2024; accepted: Aug. 11th, 2024; published: Aug. 20th, 2024

Abstract

Focusing on the idea magnetohydrodynamic (MHD) equations, this paper presents an entropy-consistent scheme based on the MUSCL-Hancock method for solving MHD equations, termed the Entropy Consistent MUSCL-Hancock (EC-MHM) scheme, and thus achieving a high-resolution entropy-consistent formulation for solving ideal MHD equations. This scheme exhibits high accuracy in smooth regions of the solution and effectively controls dissipation in discontinuous zones, leading to

*通讯作者。

文章引用: 任潇潇, 封建湖, 任书锐. 理想磁流体方程的 MUSCL-型熵相容格式研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3871-3884. DOI: 10.12677/aam.2024.138369

an improvement in the smearing phenomenon and efficiently preventing the emergence of non-physical oscillations. The convergence of the entropy consistent scheme is also proved. The ideal MHD equations are numerically simulated by entropy stable scheme, entropy consistent scheme and the new high resolution entropy consistent scheme. The results show that the new scheme can accurately capture the structure of the solution, and has the characteristics of no oscillation, high resolution and robustness.

Keywords

MHD Equations, Entropy Consistent Schemes, High Resolution

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

磁流体动力学(Magnetohydrodynamics, MHD)是将经典流体力学和电动力学的方法结合起, 针对导电流体和磁场之间的相互作用进行研究的一门学科。常应用于等离子体物理学、受控热核聚变、天体物理研究和电磁推进等领域。虽然 MHD 方程并不是严格的双曲型方程, 但其波的特征结构与流体力学方程类似, 因此可以将双曲型守恒律方程组的数值求解方法推广应用于 MHD 方程组的数值求解当中, 以获得求解理想磁流体动力学方程的高效、稳定的数值方法。

对于一般双曲守恒律方程, “熵”一直是一个备受重视的量, 它在解的光滑区域保持不变, 但在激波等间断区域会有所增加(数学模型中表现为熵减, 即熵耗散), 物理上对应着发生熵增, 因此对于“熵”的研究是一个非常重要的课题。Lax 在 1954 年提出了弱解的概念[1], 允许间断解存在, 然而弱解并不惟一。随后又在文献[2]中提出熵稳定条件, 并证明了满足熵稳定条件的 Cauchy 问题的数值解在任何时刻惟一且具有物理意义。1987 年, Tadmor [3]构造了一类二阶的熵守恒格式, 同时提出一种精确量化数值黏性的方法, 即: 比熵守恒格式含有更多黏性的三点格式是熵稳定的。2006 年, Roe [4]提出在熵守恒格式的基础上添加 Roe 格式的数值黏性项, 得到了一类熵稳定格式。该格式对激波具有良好的捕捉效果。近年来, 国内外发展了一系列求解 MHD 方程的数值方法[5]-[8], 但使用熵稳定格式求解的方法很少。直至 2016 年, Winters 等[9]提出了一种针对理想 MHD 方程的熵守恒通量, 并加入适当的耗散得到熵稳定格式。然而该格式对于间断的捕捉效果并不理想, 整体精度只有一阶。

Van Leer 提出的 MUSCL 数据重构方法[10]是求解双曲守恒律方程的一种高阶方法, 通过 MUSCL 数据重构得到了许多高阶格式, 如 MUSCL-Hancock 方法, 广义黎曼问题法和斜率限制中心格式等; 2021 年, 任璇、封建湖[11]提出了一种以 MUSCL 数据重构为基础的斜率限制器方法, 有效地提高了熵相容格式的精度和分辨率; 之后沈亚玲[12]利用该斜率限制器, 获得了一种求解理想磁流体动力学方程的高分辨率熵相容格式。本文进一步研究熵相容格式, 利用 MUSCL-Hancock 方法构造一种在时间和空间上全离散的二阶高分辨率熵相容格式, 数值结果表明新格式具有稳健性、高精度性和无振荡性等良好特征并且能够提高计算效率。

2. 一维理想磁流体动力学方程

2.1. 一维理想磁流体动力学方程

磁流体动力学(Magnetohydrodynamics, MHD)方程是通过流体力学中的 Navier-Stokes 方程和电动力学中的 Maxwell 方程耦合而成, 其写成守恒律的形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

该式中,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 - B_1^2 \\ \rho uv - B_1 B_2 \\ \rho uw - B_1 B_3 \\ u \left(\rho e + p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 \right) - B_1 (u \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \\ u B_2 - v B_1 \\ u B_3 - w B_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

ρ 、 p 分别为流体密度和压力, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 为流体速度矢量, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ 为磁感应强度矢量, ρe 表示总能量, 即

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2, \quad (3)$$

式中 γ 为比热比, $\|\mathbf{B}\|^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$ 。对于理想 MHD 方程而言, 一个额外的无散度条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 需要被满足, 否则在进行数值模拟时会出现数值不稳定[13]; 又由于 $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, 则根据散度的向量形式以及空间变量 x 可知, 此时有 $\partial B_1 / \partial x = 0$ 成立, 即 B_1 为常数。

方程(1)的 Jacobi 矩阵 $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ 的特征值系统在文献[14]中有详细叙述: 包含一条散度波, 波速为 $\lambda_D = u$; 一条熵波, 波速为 $\lambda_E = u$; 两条快波, 波速为 $\lambda_{\pm f} = u \pm c_f$; 两条慢波, 波速为 $\lambda_{\pm s} = u \pm c_s$; 两条 Alfvén 波, 波速为 $\lambda_{\pm a} = u \pm c_a$, 其中

$$c_a^2 = \frac{B_1^2}{\rho}, \quad c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \rho + \|\mathbf{B}\|^2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma \rho + \|\mathbf{B}\|^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma \rho B_1^2}{\rho^2}} \right). \quad (4)$$

与之对应的 Jacobi 矩阵的右特征向量矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & \rho & 1 & 0 & \rho & 0 & \rho \\ -c_f & 0 & -c_s & 0 & 0 & c_s & 0 & c_f \\ \frac{c_f b_1 b_2}{c_f^2 - b_1^2} & B_3 & \frac{c_s b_1 b_2}{c_s^2 - b_1^2} & 0 & 0 & -\frac{c_s b_1 b_2}{c_s^2 - b_1^2} & -B_3 & \frac{c_f b_1 b_2}{c_f^2 - b_1^2} \\ \frac{c_f b_1 b_3}{c_f^2 - b_1^2} & -B_2 & \frac{c_s b_1 b_3}{c_s^2 - b_1^2} & 0 & 0 & -\frac{c_s b_1 b_3}{c_s^2 - b_1^2} & B_2 & -\frac{c_f b_1 b_3}{c_f^2 - b_1^2} \\ \rho a^2 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & \rho a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\rho} c_f^2 b_2}{c_f^2 - b_1^2} & -\sqrt{\rho} B_3 & \frac{\sqrt{\rho} c_s^2 b_2}{c_s^2 - b_1^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\rho} c_s^2 b_2}{c_s^2 - b_1^2} & -\sqrt{\rho} B_3 & \frac{\sqrt{\rho} c_f^2 b_2}{c_f^2 - b_1^2} \\ \frac{\sqrt{\rho} c_f^2 b_3}{c_f^2 - b_1^2} & \sqrt{\rho} B_2 & \frac{\sqrt{\rho} c_s^2 b_3}{c_s^2 - b_1^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\rho} c_s^2 b_3}{c_s^2 - b_1^2} & \sqrt{\rho} B_2 & \frac{\sqrt{\rho} c_f^2 b_3}{c_f^2 - b_1^2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = \mathbf{B}/\sqrt{\rho}$, $a^2 = \gamma p/\rho$ 。

根据文献[3]的理论, 可以通过定义熵函数、熵通量函数和熵变量等, 构造出保持熵守恒的数值格式; 再根据[3] [4] [17]的理论, 在熵守恒格式的基础上, 适当加上一定量的数值耗散, 即可得到熵稳定格式, 从而更准确地模拟这些物理过程[3]。因此, 为了方便一维 MHD 方程熵相容格式的构造, 我们对一维 MHD 方程的熵函数、熵通量函数和熵变量进行定义。

定义熵函数 $E(\mathbf{U}) = -\rho s/(\gamma - 1)$, 熵通量函数 $Q(\mathbf{U}) = -\rho u s/(\gamma - 1)$, 其中物理熵 $s = \ln(p) - \gamma \ln(\rho)$, 相应的熵变量 \mathbf{v} 和熵势 φ 为

$$\mathbf{v} = E'(\mathbf{U}) = \left[\frac{\gamma - s}{\gamma - 1}, \frac{\rho \|\mathbf{u}\|^2}{2p}, \frac{\rho u}{p}, \frac{\rho v}{p}, \frac{\rho w}{p}, -\frac{\rho}{p}, \frac{\rho B_1}{p}, \frac{\rho B_2}{p}, \frac{\rho B_3}{p} \right]^T, \quad (6)$$

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} - Q = \rho u + \frac{\rho u \|\mathbf{B}\|^2}{2p} - \frac{\rho B_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{p}. \quad (7)$$

2.2. 熵稳定条件

熵是热力学中表征物质状态的参量之一, 其物理意义是系统混乱程度的度量。在双曲守恒律系统中, 当解连续时, 熵在整个系统中保持不变, 称为熵守恒; 但当出现间断解时, 熵会增加, 从而熵守恒格式的数值解会出现伪振荡, 因此需要对总熵进行耗散。如果熵耗散过程满足熵稳定条件, 则称它是熵稳定的。

设 (E, Q) 为双曲守恒律方程(1)的一组熵对, 将(1)式的两端同时乘 $E'(\mathbf{U})^T$, 得到

$$E(\mathbf{U})_t + E'(\mathbf{U})^T \mathbf{F}'(\mathbf{U}) \mathbf{U}_x = 0, \quad (8)$$

如果 $Q'(\mathbf{U})^T = E'(\mathbf{U})^T \mathbf{F}'(\mathbf{U})$, 则有

$$E(\mathbf{U})_t + Q(\mathbf{U})_x = 0, \quad (9)$$

我们称(9)式为熵等式。

当间断发生时, 熵会有所增加, 熵等式(9)不再成立。为此, 我们从弱解的角度出发, 将 \mathbf{U}^ε 作为带有粘性机制的双曲守恒律方程[12]:

$$\mathbf{U}_t^\varepsilon + \mathbf{F}(\mathbf{U}^\varepsilon)_x = \varepsilon \mathbf{U}_{xx}^\varepsilon, \quad (10)$$

的极限解。假设 (E, Q) 为双曲守恒律方程(1)的一组熵对, 对方程(10)的两端同时左乘 $E'(\mathbf{U}^\varepsilon)^T$, 由于熵函数 $E(\mathbf{U})$ 为凸函数[15]可以得到:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{U}^\varepsilon)_t + Q(\mathbf{U}^\varepsilon)_x &= \varepsilon E'(\mathbf{U}^\varepsilon) \mathbf{U}_{xx}^\varepsilon \\ &= \varepsilon \left(E(\mathbf{U}^\varepsilon)_{xx} - (\mathbf{U}_x^\varepsilon)^T E''(\mathbf{U}^\varepsilon) \mathbf{U}_x^\varepsilon \right), \\ &\leq \varepsilon E(\mathbf{U}^\varepsilon)_{xx} \end{aligned} \quad (11)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 得到熵不等式

$$E(\mathbf{U})_t + Q(\mathbf{U})_x \leq 0, \quad (12)$$

我们称上述不等式为熵稳定条件。

3. 熵相容格式

3.1. 熵相容格式

熵守恒格式，即保持总熵不变，在离散的情况下满足离散熵等式：

$$\frac{d}{dx} E(U_i(t)) + \frac{1}{\Delta x} (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}) = 0, \quad (13)$$

式中， $E(U_i(t))$ 为凸的熵函数， $Q_{i+1/2}$ 为与熵通量函数 Q 相容的数值熵通量函数[3]。2015 年，Winters 等[16]在 Tadmor 提出的逐段分解显式构造方法的基础上，通过引入参数向量

$$z = [z_1, z_2, \dots, z_8] = \left[\sqrt{\frac{\rho}{p}}, \sqrt{\frac{\rho}{p}}u, \sqrt{\frac{\rho}{p}}v, \sqrt{\frac{\rho}{p}}w, \sqrt{\rho p}, B_1, B_2, B_3 \right], \quad (14)$$

和 Ismail 公式

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\} z_5^{\ln}, \quad \hat{p}_1 = \frac{\left\{ \left\{ z_5 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\}}, \quad \hat{p}_2 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{z_5^{\ln}}{z_1^{\ln}} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\left\{ \left\{ z_5 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\}}, \\ \hat{u}_1 &= \frac{\left\{ \left\{ z_2 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\}}, \quad \hat{v}_1 = \frac{\left\{ \left\{ z_3 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\}}, \quad \hat{w}_1 = \frac{\left\{ \left\{ z_4 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1 \right\} \right\}}, \quad \hat{u}_2 = \frac{\left\{ \left\{ z_1 z_2 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1^2 \right\} \right\}}, \quad \hat{v}_2 = \frac{\left\{ \left\{ z_1 z_3 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1^2 \right\} \right\}}, \quad \hat{w}_2 = \frac{\left\{ \left\{ z_1 z_4 \right\} \right\}}{\left\{ \left\{ z_1^2 \right\} \right\}}, \\ \hat{B}_1 &= \left\{ \left\{ z_6 \right\} \right\}, \quad \hat{B}_2 = \left\{ \left\{ z_7 \right\} \right\}, \quad \hat{B}_3 = \left\{ \left\{ z_8 \right\} \right\}, \quad \hat{B}_1 = \left\{ \left\{ z_6^2 \right\} \right\}, \quad \hat{B}_2 = \left\{ \left\{ z_7^2 \right\} \right\}, \quad \hat{B}_3 = \left\{ \left\{ z_8^2 \right\} \right\}, \\ &\quad \widehat{B_1 B_2} = \left\{ \left\{ z_6 z_7 \right\} \right\}, \quad \widehat{B_1 B_3} = \left\{ \left\{ z_6 z_8 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

推导出 MHD 方程的熵守恒通量：

$$F_{i+1/2}^C = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \hat{u}_1 \\ \hat{p}_1 + \hat{\rho} \hat{u}_1^2 + \frac{1}{2} (\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3) - \hat{B}_1 \\ \hat{\rho} \hat{u}_1 \hat{v}_1 - \widehat{B_1 B_2} \\ \hat{\rho} \hat{u}_1 \hat{w}_1 - \widehat{B_1 B_3} \\ \frac{\gamma \hat{u}_1 \hat{p}_2}{\gamma - 1} + \frac{\hat{\rho} \hat{u}_1}{2} (\hat{u}_1^2 + \hat{v}_1^2 + \hat{w}_1^2) + \hat{u}_2 (\hat{B}_2^2 + \hat{B}_3^2) - \hat{B}_1 (\hat{v}_2 \hat{B}_2 + \hat{w}_2 \hat{B}_3) \\ 0 \\ \hat{u}_2 \hat{B}_2 - \hat{v}_2 \hat{B}_1 \\ \hat{u}_2 \hat{B}_3 - \hat{w}_2 \hat{B}_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\text{其中 } \left\{ \left\{ \bullet \right\} \right\} = \frac{\binom{\bullet}{i+1} + \binom{\bullet}{i}}{2}, \quad (\bullet)^{\ln} = \frac{\binom{\bullet}{i+1} - \binom{\bullet}{i}}{\ln(\bullet)_{i+1} - \ln(\bullet)_i}.$$

由于 Euler 方程的解在跨过激波时产生密度跳跃的立方级的熵增[17]，熵守恒格式在激波处会出现伪振荡现象。因此需要构造满足熵稳定条件的数值格式。首先用熵增推导出的耗散项去修正熵守恒格式，得到熵稳定格式；对熵稳定格式的熵增进一步精确估计，即可得到 Ismail 和 Roe 定义的熵相容格式[17]，即对熵增估计更精确的熵稳定格式格式。

对于双曲守恒律方程组来说，选择路径积分

$$U = (1 - \xi)U_i + \xi U_{i+1}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (16)$$

来连接左状态 U_i 和右状态 U_{i+1} 时, 解在跨越激波时产生的熵增[17]为:

$$\dot{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_{i+1/2}^T \int_0^1 (2\xi - 1) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} d\xi [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (17)$$

我们知道, 熵增总是正的, 即 $\dot{E} > 0$ 。由于熵变量 $\mathbf{v} = E'(\mathbf{U})$ 且 E 为凸函数, 则有

$$[\mathbf{v}]_{i+1/2} = E''(\xi) [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (18)$$

式中 $E''(\xi) > 0$, 表明 $[\mathbf{v}]_{i+1/2}$ 和 $[\mathbf{U}]_{i+1/2}$ 具有相同的正负号, 因此要使式(17)满足 $\dot{E} > 0$, 只需保持中间矩阵 $\int_0^1 (2\xi - 1) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} d\xi$ 的正定性, 为此本文做出如下修正:

$$\dot{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_{i+1/2}^T \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} d\xi \right| [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (19)$$

其对应的数值耗散为

$$\mathbf{D}^{EP} = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} d\xi \right| [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (20)$$

在计算过程中, 由于矩阵积分 $\int_0^1 (2\xi - 1) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} d\xi$ 计算量大且形式复杂, 为了简便计算, 使用 Gauss-Legendre 积分公式进行近似, 得到

$$\mathbf{D}^{EP} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} \left| \sum_{k=1}^n \omega_k (2S_k - 1) \mathbf{A} (S_k \mathbf{U}_{i+1} + (1 - S_k) \mathbf{U}_i) \right| \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (21)$$

其中 S_k 是高斯点, ω_k 是与高斯点对应的系数, 整个积分区间为 $[0, 1]$ 。通常情况下我们采用三点 Gauss-Legendre 积分公式进行积分, 此时

$$S_{1,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad S_2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_{1,3} = \frac{5}{9}, \quad \omega_2 = \frac{8}{9}. \quad (22)$$

在求解理想 MHD 方程的过程中, 将熵耗散项 \mathbf{D}^{EP} 添加到熵稳定格式的数值通量[4]

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{ES} = \mathbf{F}_{i+1/2}^C - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} |\mathbf{A}| \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (23)$$

中, 从而产生足够的熵耗散来抵消熵增, 得到一种 MHD 方程的新的熵相容格式的数值通量:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC} = \mathbf{F}_{i+1/2}^C - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} \left(|\mathbf{A}| + \left| \sum_{k=1}^n \omega_k (2S_k - 1) \mathbf{A} (\mathbf{U}(S_k)) \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} [\mathbf{U}]_{i+1/2}, \quad (24)$$

式中, 特征值对角矩阵

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\hat{u}_1 - c_f, \hat{u}_1 - c_a, \hat{u}_1 - c_s, \hat{u}_1, \hat{u}_1, \hat{u}_1 + c_s, \hat{u}_1 + c_a, \hat{u}_1 + c_f). \quad (25)$$

$|\mathbf{A}| = \text{diag}(|\hat{u}_1 - c_f|, |\hat{u}_1 - c_a|, |\hat{u}_1 - c_s|, |\hat{u}_1|, |\hat{u}_1|, |\hat{u}_1 + c_s|, |\hat{u}_1 + c_a|, |\hat{u}_1 + c_f|)$, $\mathbf{R}_{i+1/2}$ 是与之对应的右特征向量矩阵, $\mathbf{R}_{i+1/2}^{-1}$ 是矩阵 $\mathbf{R}_{i+1/2}$ 的逆矩阵。

3.2. 熵相容格式的稳定性论证

首先引入关于守恒型差分格式的如下的定理 3.1。

定理 3.1 [3] 若与 \mathbf{F} 相容的数值通量 $\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ 关于 $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}$ Lipschits 连续, 那么一定存在一个矩阵 $\mathbf{K}_{i+1/2}$ 使得 $\mathbf{F}_{i+1/2}$ 可以写成如下形式:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1})) - \frac{1}{2} \mathbf{K}_{i+1/2} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i). \quad (26)$$

由上述定理可知, 守恒型熵守恒格式的数值通量 $\mathbf{F}_{i+1/2}^C$ 为

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^C = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1})) - \frac{1}{2}\mathbf{K}_{i+1/2}^C(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i), \quad (27)$$

其中, $\mathbf{K}_{i+1/2}^C$ 是与之相对应的数值粘性矩阵。

定理 3.2 熵相容格式满足熵稳定条件。

证明: 本文中提到的熵格式都是守恒型三点格式, 因此熵相容格式的数值通量可以写为带有粘性的形式:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1})) - \frac{1}{2}\mathbf{K}_{i+1/2}^{EC}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i), \quad (28)$$

其中 $\mathbf{K}_{i+1/2}^{EC} = \mathbf{K}_{i+1/2}^C + \mathbf{R}_{i+1/2} \left(|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1}$, 根据 Barth 在文献[18]中证明的 $\mathbf{U}_v \approx \mathbf{R}\mathbf{R}^T$, \mathbf{v} 为熵变量 $\mathbf{v} = \mathbf{E}'(\mathbf{U})$, (28)式可以写为

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1})) - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{K}}_{i+1/2}^{EC}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i), \quad (29)$$

其中 $\tilde{\mathbf{K}}_{i+1/2}^{EC} = \mathbf{K}_{i+1/2}^C + \mathbf{R}_{i+1/2} \left(|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^T$ 。

令 $\mathbf{P}_{i+1/2}^{EC} = \tilde{\mathbf{K}}_{i+1/2}^{EC} - \mathbf{K}_{i+1/2}^C = \mathbf{R}_{i+1/2} \left(|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^T$, 则有:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)_{i+1/2}^T \mathbf{P}_{i+1/2}^{EC} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \\ &= (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)_{i+1/2}^T \mathbf{R}_{i+1/2} \left(|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^T (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i), \\ &= (\mathbf{R}_{i+1/2}^T (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i))_{i+1/2}^T \left(|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right| \right) \mathbf{R}_{i+1/2}^T (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \end{aligned} \quad (30)$$

我们知道, $\mathbf{R}_{i+1/2}^T$ 为可逆矩阵, $(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)$ 为非零向量, $|\Lambda_{i+1/2}| + \left| \int_0^1 (2\xi - 1) \Lambda(\mathbf{U}(\xi)) d\xi \right|$ 为对角矩阵。

因此, 由(30)式可以得到 $(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)_{i+1/2}^T \mathbf{P}_{i+1/2}^{EC} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) > 0$, 也就是 $(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)_{i+1/2}^T \tilde{\mathbf{K}}_{i+1/2}^{EC} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) > (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)_{i+1/2}^T \mathbf{K}_{i+1/2}^C (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)$, 这表明熵相容格式比熵守恒格式包含更多的数值粘性。由定理 3.1 可知, 熵相容格式满足熵稳定条件。

4. 基于 MUSCL-Hancock 方法的熵相容格式

采用 MUSCL-Hancock 方法[12]来更新下一时间层的物理量, 是一个全离散过程。计算过程如下:

第一步: 在 t_n 层利用 MUSCL 重构方法, 重构 $\mathbf{U}_i(x)$ 在单元交界面处的左右极限值, 详见[12], 结果为 \mathbf{U}_i^L , \mathbf{U}_i^R ;

第二步: 利用下式将 t_n 层的边界外推值 \mathbf{U}_i^L , \mathbf{U}_i^R 推进到 $t_{n+1/2}$ 层得到相应的边界外推值:

$$\bar{\mathbf{U}}_i^L = \mathbf{U}_i^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(\mathbf{U}_i^R) - f(\mathbf{U}_i^L)], \quad \bar{\mathbf{U}}_i^R = \mathbf{U}_i^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(\mathbf{U}_i^R) - f(\mathbf{U}_i^L)]. \quad (31)$$

第三步: 利用上述所得边界外推值, 得出熵相容数值通量 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC-MHM}$:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC-MHM} = \bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^C - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_{i+1/2} \left(|\bar{\Lambda}| + \left| \sum_{k=1}^n \omega_k (2S_k - 1) \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{U}}(S_k)) \right| \right) \bar{\mathbf{R}}_{i+1/2}^{-1} [\bar{\mathbf{U}}]_{i+1/2}, \quad (32)$$

其中 “ $\bar{\cdot}$ ” 是重构后的取值。

第四步: 利用上述得到的熵相容通量 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC-MHM}$ 代入以下守恒型格式:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC-MHM} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{EC-MHM}), \quad (33)$$

更新 t_{n+1} 时刻的单元平均值。我们把格式(33)称为高分辨率熵相容格式。

实际重构的过程是：将守恒型变量 U 转换为原始变量，即

$$[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e, B_1, B_2, B_3] \rightarrow [\rho, u, v, w, p, B_1, B_2, B_3], \quad (34)$$

对原始变量进行上述的数据重构，重构完成后，恢复变量值，将重构后的变量值代入数值通量中再进行计算，从而得到具有高分辨率的熵相容格式。

5. 数值算例

对熵稳定格式(ES) (数值通量表达式为式(23))，熵相容格式(EC) (数值通量表达式为式(24))和高分辨率熵相容格式(EC-MHM) (数值通量表达式为式(32))进行数值模拟，对比说明三种格式的表现。除算例 5.1. 和 5.5. 在计算时采用周期性边界条件外，其余的数值算例均采用 Neumann 边界条件，Ref. 代表参考解，由选取 5000 个均匀网格的熵稳定格式[19]计算得到。

5.1. 一维光滑 Alfvén 波问题

光滑 Alfvén 波算例经常用来计算理想 MHD 方程数值格式的精度。本文考虑一维情况下的光滑 Alfvén 波的如下初值问题：

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) = 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0.1 \sin(2\pi x), \quad w(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 0.1, \quad B_1(x, 0) = 1, \\ B_2(x, 0) = v(x, 0), \quad B_3(x, 0) = 0.1 \cos(2\pi x). \end{aligned}$$

该算例的精确解为：

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = 1, \quad u(x, t) = 0, \quad v(x, t) = 0.1 \sin(2\pi(x+t)), \quad w(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 0.1, \quad B_1(x, t) = 1, \\ B_2(x, t) = v(x, t), \quad B_3(x, t) = 0.1 \cos(2\pi(x+t)). \end{aligned}$$

在计算时采用周期性边界条件，计算区间为 $[0, 1]$ ，绝热指数 $\gamma = 5/3$ 。

见表 1 展示了计算该算例到 $t = 5$ 时刻的不同网格数下变量 v 的数值误差以及收敛阶。见表 1 结果来看，EC-MHM 格式在 L^1 、 L^2 范数意义下收敛阶均超过二阶，具有高精度特性。

Table 1. L^1, L^2 errors in v at $t = 5$ and corresponding convergence rates for different mesh numbers

表 1. $t = 5$ 时不同网格数下 v 的 L^1, L^2 误差以及对应的收敛阶

网格数	L^1 范数	收敛阶	L^2 范数	收敛阶
25	3.6000e-2	-	1.3900e-2	-
50	7.7500e-3	2.2157	2.4365e-3	2.5122
100	1.6518e-3	2.2302	4.1581e-4	2.5508
200	3.5292e-4	2.2266	6.5096e-5	2.6753
400	6.8964e-5	2.3554	1.1032e-5	2.5609
800	1.2976e-5	2.4100	1.7013e-6	2.6970

5.2. Brio-Wu 激波管问题

控制方程为式(1)、(2)，在计算区域 $\Omega = [-1, 1]$ 上给定初始条件

$$[\rho, u, v, w, p, B_1, B_2, B_3] = \begin{cases} [1, 0, 0, 0, 1, 0.75, 1, 0], & x \leq 0.5, \\ [0.125, 0, 0, 0, 0.1, 0.75, -1, 0], & x > 0.5. \end{cases}$$

其中 $\gamma = 5/3$ ，空间网格数为 500，计算至 $t = 0.12$ 。计算结果与参考解见图 1。将 EC-MHM 格式与 ES 格式和 EC 格式进行比较，可发现 EC-MHM 格式对每个间断都能准确地捕捉，跨越间断所需的单元个数也明显减少，提高了解分辨率。从图中可以看出，ES 格式和 EC 格式的总熵耗散大致相同，EC-MHM 格式相较于 ES 格式而言熵耗散更小，既有效地抑制抹平现象，还避免了间断附近的伪振荡，数值解更加贴近参考解。

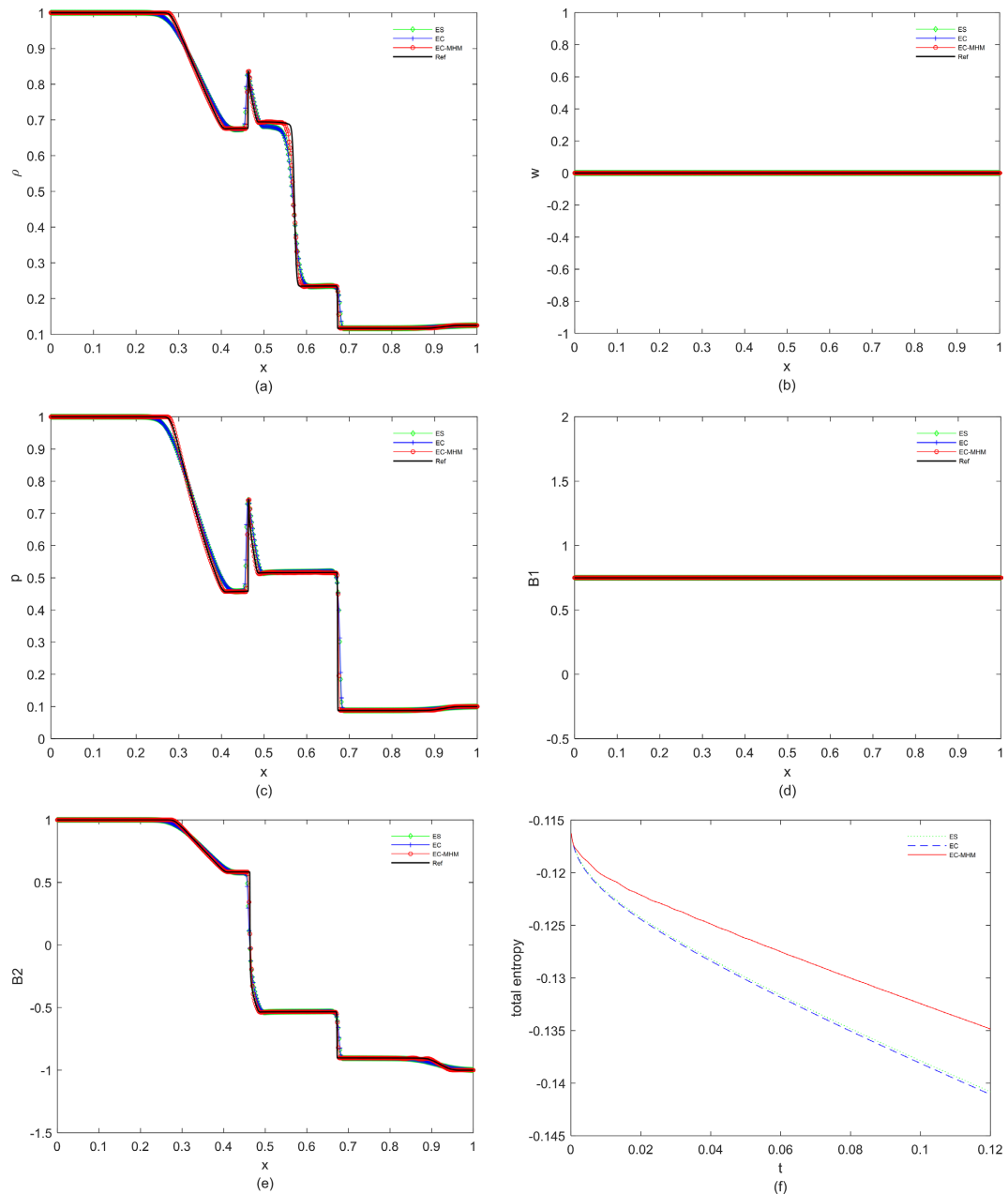


Figure 1. Calculation results of the Brio-Wu shock tube problem

图 1. Brio-Wu 激波管问题的计算结果

5.3. Torrihon 黎曼问题

控制方程为式(1)、(2)，在计算区域 $\Omega = [-1, 1.5]$ 上给定初始条件

$$[\rho, u, v, w, p, B_1, B_2, B_3] = \begin{cases} [3, 0, 0, 0, 1, 1.5, 1, 0], & x \leq 0; \\ [1, 0, 0, 0, 1, 1.5, \cos(1.5), \sin(1.5)], & x > 0. \end{cases}$$

其中 $\gamma = 5/3$ ，空间网格数为 500，计算至 $t = 0.4$ 。计算结果与精确解见图 2。可以看出，相较 ES 格式和 EC 格式而言，EC-MHM 格式能够准确地捕捉到解的结构，解的分辨率明显提高，使得数值结果更加贴近参考解。通过总熵的变化来看，随着时间的推移，ES 格式和 EC 格式的耗散较多，表明其数值结果在间断处抹平现象严重；相较而言，EC-MHM 格式对总熵耗散控制地更加合理，说明其数值结果对解的捕捉更加锐利。

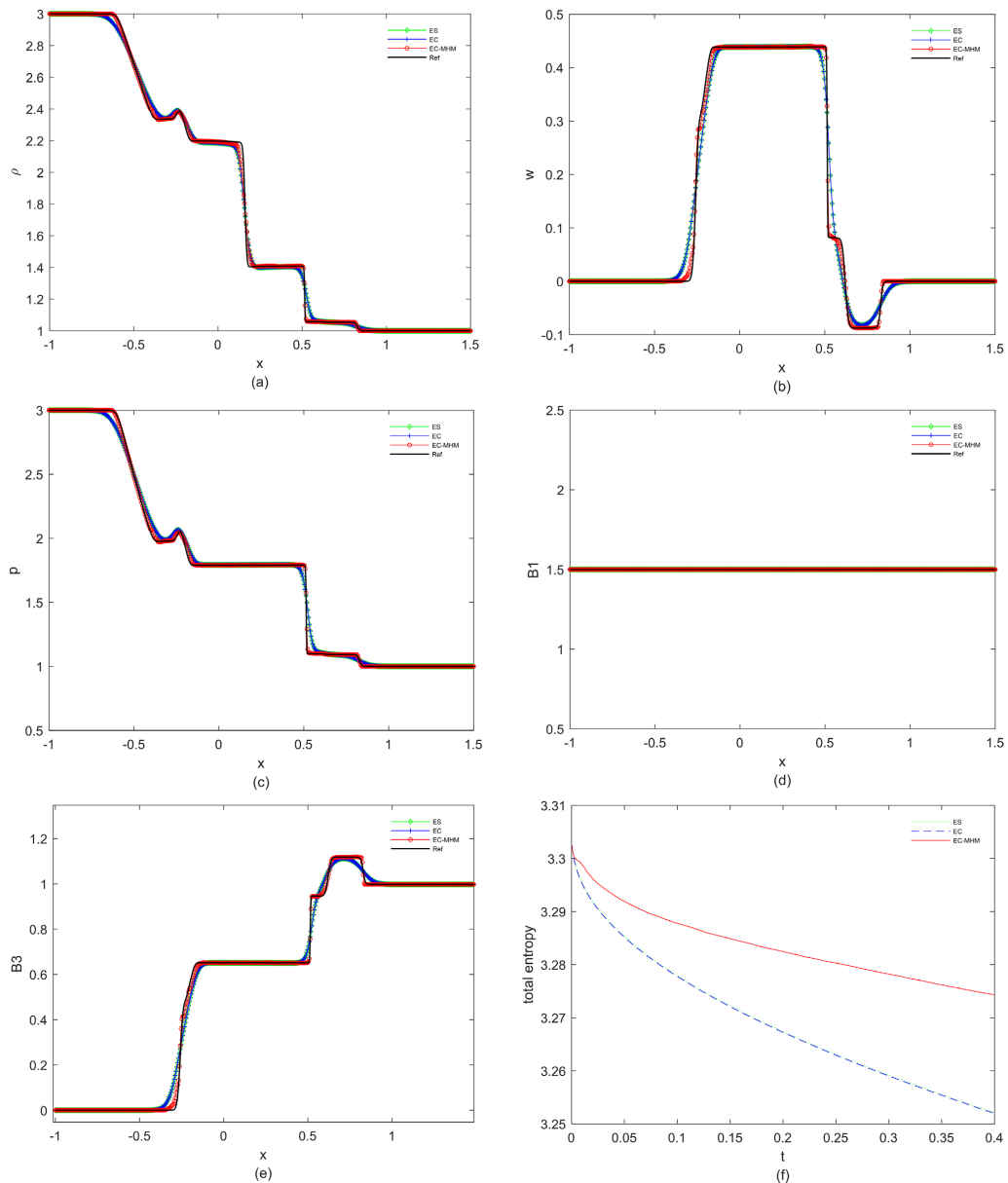


Figure 2. Calculation results of the Torrihon Riemann problem

图 2. Torrihon 黎曼问题的计算结果

5.4. Ryu and Jones 黎曼问题

控制方程为式(1)、(2)，在计算区域 $\Omega = [-1, 1]$ 上给定初始条件

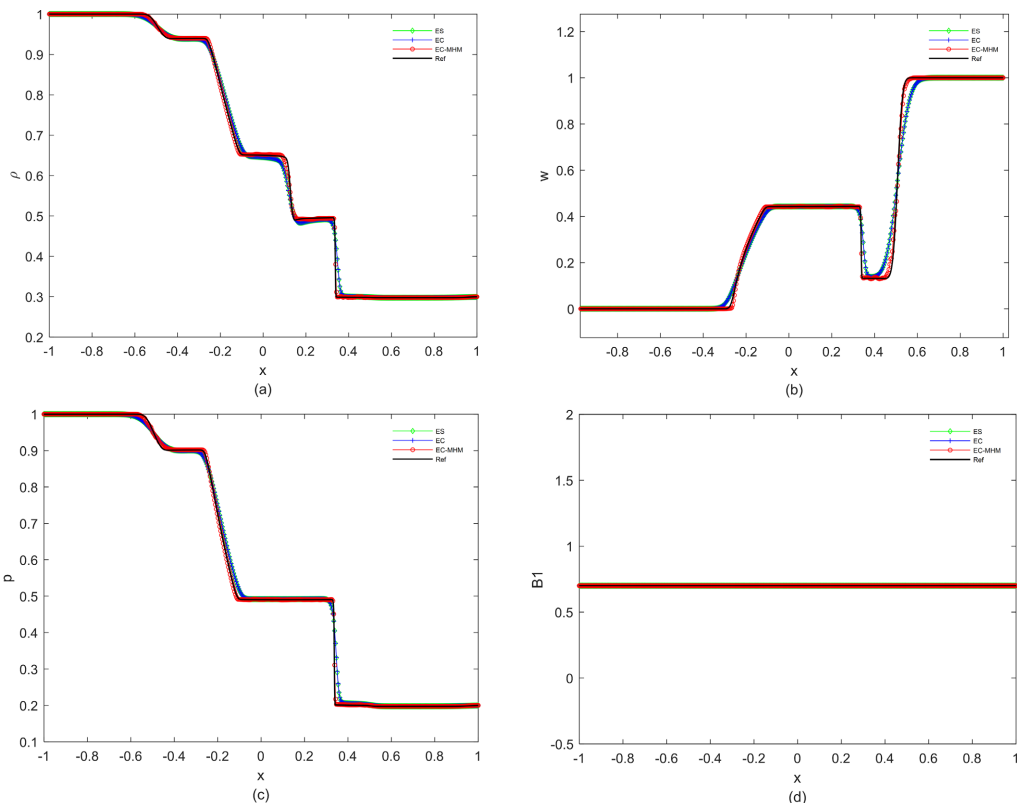
$$[\rho, u, v, w, p, B_1, B_2, B_3] = \begin{cases} [1, 0, 0, 0, 1, 0.7, 0, 0], & x \leq 0, \\ [0.3, 0, 0, 0, 1, 0.2, 0.7, 1, 0], & x > 0. \end{cases}$$

其中 $\gamma = 2$ ，空间网格数为 500，计算至 $t = 0.4$ 。计算结果与精确解见图 3。此问题的解包括：稀疏波、慢速稀疏波、接触间断、慢速激波和快速稀疏波。结果表明，ES 格式的计算结果和 EC 格式的计算结果几乎相同，在间断处的抹平现象比较严重；而 EC-MHM 格式对每个间断捕捉更加准确，跨越间断时所需的单元个数也明显减少。从总熵图来看，ES 格式和 EC 格式的总熵耗散大致相同，EC-MHM 格式的总熵耗散比 EC 格式小，对总熵耗散控制的更加合理，有效改善了严重的抹平现象，从侧面说明新构造的高分辨率熵相容格式的优良性质。

5.5. First Rotor 问题

计算区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ， $\gamma = 1.4$ ，记 $r = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$ ， $r_0 = 0.1$ ， $r_1 = 0.115$ ， $u_0 = 2$ ，初始条件为：

$$\begin{cases} \rho = 10, & (u, v) = \frac{u_0}{r_0}(-[y-0.5], [x-0.5]), & r < r_0, \\ \rho = 1 + 9f, & (u, v) = \frac{fu_0}{r_0}(-[y-0.5], [x-0.5]), & f = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0}, & r_0 < r < r_1, \\ \rho = 1, & (u, v) = (0, 0), & r > r_1, \\ w = 0, & p = 1, & \mathbf{B} = 5/\sqrt{4\pi}(1, 0, 0)^T. \end{cases}$$



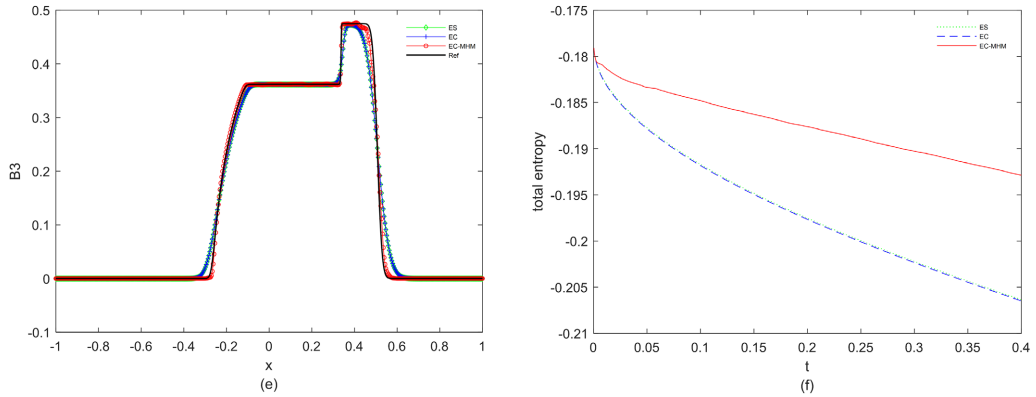


Figure 3. Calculation results of the Ryu and Jones Riemann problem
图 3. Ryu and Jones 黎曼问题的计算结果

在本算例中选用周期性边界条件，计算至 $t=0.15$ ，空间网格数为 200×200 。采用逐维推广的方法将熵相容格式和高分辨率熵相容格式分别应用于 First Rotor 问题数值模拟中，计算结果的云图见图 4 和图 5。其中 $Ma = \|\mathbf{u}\|/a$ 表示马赫数， $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ 。

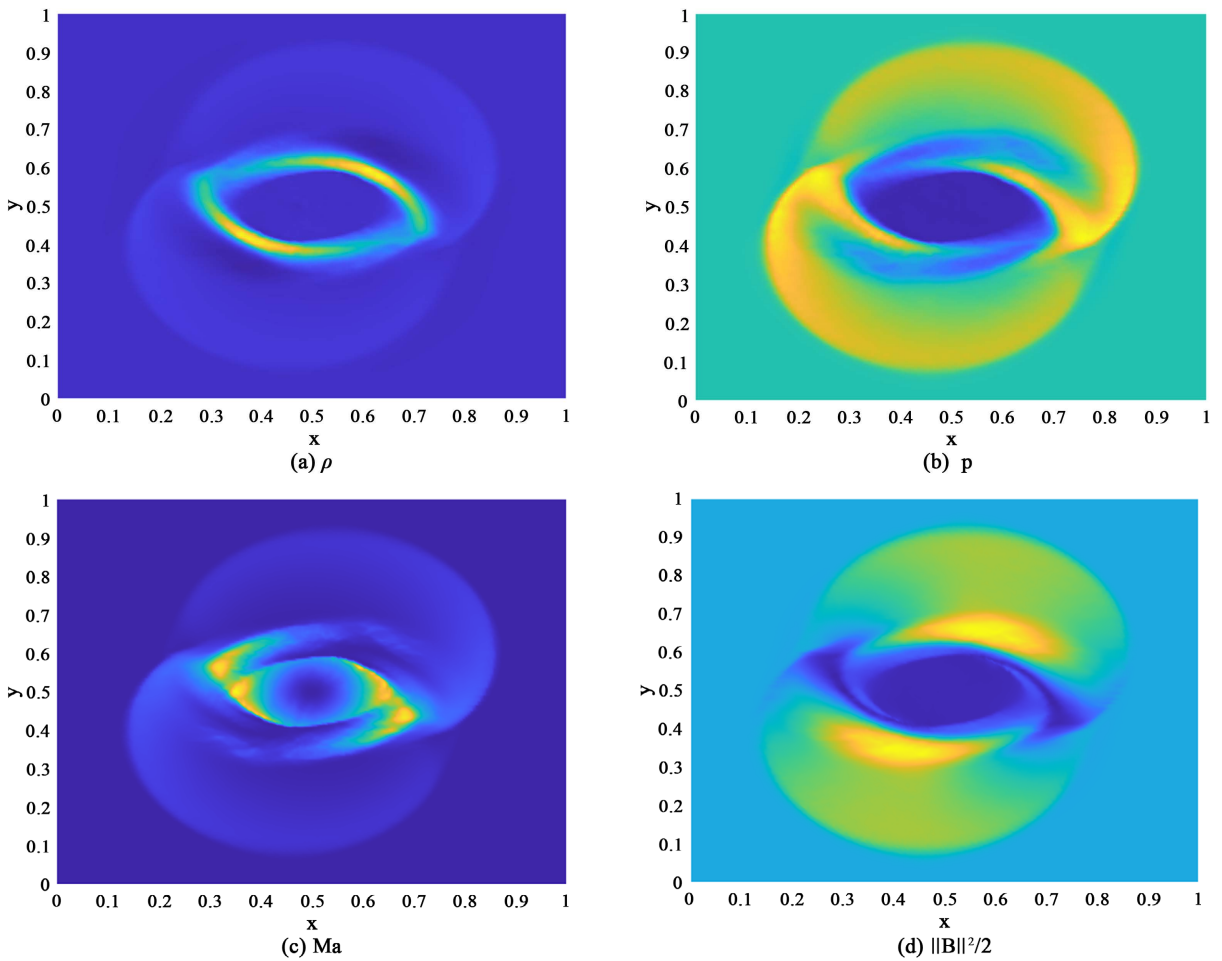


Figure 4. The result of the entropy stable scheme calculation of the First Rotor problem
图 4. First Rotor 问题的熵稳定格式计算结果

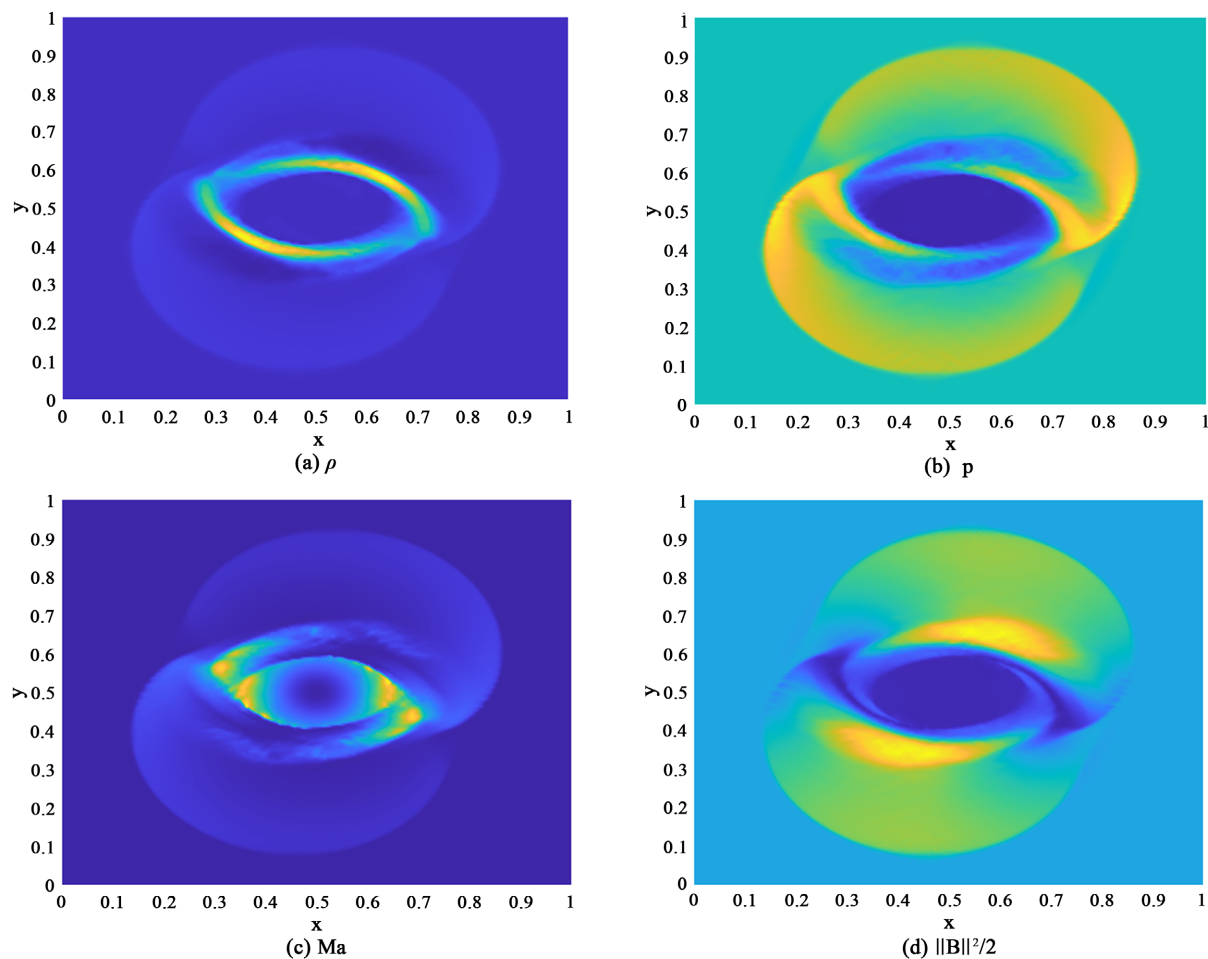


Figure 5. The result of the high-resolution entropy consistent scheme calculation of the First Rotor problem

图 5. First Rotor 问题的高分辨率熵相容格式计算结果

见图 4 与图 5 比较可知, 高分辨率熵相容格式对激波等间断的捕捉效果较为清晰锐利; 验证了运用新型斜率限制器得到的高分辨率熵相容格式具有一定的优良特性。

6. 结论

由于理想磁流体动力学方程波的特征结构与流体力学方程类似, 因此将求解一般双曲守恒律的方法推广应用于理想磁流体方程中, 在此基础上加入新构造的 MUSCL-型斜率限制器, 并对其采用 MUSCL-Hancock 方法来更新下一时间层的物理量, 获得了理想磁流体动力学方程的高分辨率熵相容格式。数值结果表明, 该格式具有高精度、无振荡、高分辨率、鲁棒等特性, 是模拟理想磁流体方程较为理想的方法。

参考文献

- [1] Lax, P.D. (1954) Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7**, 159-193. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112>
- [2] Lax, P.D. (1973) *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1-48. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970562.ch1>
- [3] Tadmor, E. (1987) The Numerical Viscosity of Entropy Stable Schemes for Systems of Conservation Laws. I. *Mathematics of Computation*, **49**, 91-103. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1987-0890255-3>

-
- [4] Roe, P.L. (2006) Entropy Conservation Schemes for Euler Equations. Talk at HYP, Lyon.
- [5] 邹世俊. 拉氏框架下理想磁流体方程组的间断有限元方法研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国工程物理研究院, 2020.
- [6] 徐骁, 高志明, 戴自换. 三维拉氏理想磁流体数值模拟方法[J]. 计算物理, 2020, 37(4): 403-412.
- [7] Kim, J. (2018) Local Existence and Blow-Up Criterion of 3D Ideal Magnetohydrodynamics Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **38**, 1759-1766. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(18\)30844-0](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(18)30844-0)
- [8] 曹启伟, 肖德龙, 杨显俊, 等. 磁瑞利-泰勒不稳定性非线性演化数值模拟[J]. 计算物理, 2021, 38(1): 5-15.
- [9] Winters, A.R. and Gassner, G.J. (2016) Affordable, Entropy Conserving and Entropy Stable Flux Functions for the Ideal MHD Equations. *Journal of Computational Physics*, **304**, 72-108. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.09.055>
- [10] Toro, E.F. (2009) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer, Berlin.
- [11] 任璇. 基于斜率限制器的高分辨率熵相容格式研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 长安大学, 2021.
- [12] 沈亚玲, 封建湖, 郑素佩, 等. 一种基于新型斜率限制器的理想磁流体方程的高分辨率熵相容格式[J]. 计算物理, 2022, 39(3): 297-308.
- [13] 张成治, 郑素佩, 陈雪, 张蕊. 求解理想磁流体方程的四阶 WENO 型熵稳定格式[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(11): 1398-1412.
- [14] Jeffrey, A. and Taniuti, A. (1964) Non-Linear Wave Propagation. Academic Press, New York.
- [15] Friedrichs, K.O. and Lax, P.D. (1971) Systems of Conservation Equations with a Convex Extension. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **68**, 1686-1688. <https://doi.org/10.1073/pnas.68.8.1686>
- [16] Tadmor, E. (2003) Entropy Stability Theory for Difference Approximations of Nonlinear Conservation Laws and Related Time-Dependent Problems. *Acta Numerica*, **12**, 451-512. <https://doi.org/10.1017/s0962492902000156>
- [17] Ismail, F. and Roe, P.L. (2009) Affordable, Entropy-Consistent Euler Flux Functions II: Entropy Production at Shocks. *Journal of Computational Physics*, **228**, 5410-5436. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.04.021>
- [18] Barth, T.J. (1999) Numerical Methods for Gasdynamic Systems on Unstructured Meshes. In: Kroner, M.O.D. and Rhode, C., Eds., *An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws*, Springer, Berlin, 195-285. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58535-7_5
- [19] 李雪. 理想磁流体方程的高分辨率熵稳定格式研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 长安大学, 2018.