Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 3778-3787
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138360

Hans汉斯

非恰当微分方程三类对称式积分因子

张子诺[1]，**蒋宜蓉**[2]，**谢　海**[1,3,4*]

[1]桂林理工大学数学与统计学院，广西 桂林
[2]广西民族大学数学与物理学院，广西 南宁
[3]广西高校应用统计重点实验室，广西 桂林
[4]桂林理工大学大数据处理与算法技术研究中心，广西 桂林

收稿日期：2024年7月13日；录用日期：2024年8月7日；发布日期：2024年8月14日

摘　要

利用积分因子把非恰当微分方程转化为恰当微分方程是求解非恰当微分方程的重要手段。如何寻找合适的积分因子是转化问题关键之所在。首先，给出非恰当微分方程存在三种类型积分因子的充要条件。然后，给出相应的例子说明这些充要条件的应用。最后，对这些充要条件进行简单总结并提出一些研究展望。

关键词

非恰当微分方程，恰当微分方程，积分因子

Three Symmetric Form Integrating Factors of Non-Exact Differential Equations

Zinuo Zhang[1], **Yirong Jiang**[2], **Hai Xie**[1,3,4*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi
[2]School of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning Guangxi
[3]Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Applied Statistics, Guilin Guangxi
[4]Center for Data Analysis and Algorithm Technology, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi

Received: Jul. 13th, 2024; accepted: Aug. 7th, 2024; published: Aug. 14th, 2024

Abstract

It is an important means to solve non-exact differential equations by transforming them to exact

*通讯作者。

文章引用: 张子诺, 蒋宜蓉, 谢海. 非恰当微分方程三类对称式积分因子[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3778-3787.
DOI: 10.12677/aam.2024.138360

differential equations using integral factors. How to find the appropriate integrating factors is the key to the transformation problem. Firstly, we present the sufficient and necessary conditions for the existence of three types of integral factors for non-exact differential equations. Then, some examples are given to illustrate the application of these necessary and sufficient conditions. Finally, these necessary and sufficient conditions are summarized briefly and some research prospects are put forward.

Keywords

Non-Exact Differential Equations, Exact Differential Equations, Integrating Factors

1. 引言

在一阶常微分方程的可解类型中，可以利用变量分离法[1]和常系数变易法[2]等对一些特殊的方程进行求解计算。但是绝大多数一阶常微分方程的解还是很难给出的。恰当微分方程(即全微分方程)是一类十分常见且非常重要的一阶常微分方程，但并不是所有一阶常微分方程都是恰当微分方程。对于非恰当微分方程往往需要借助积分因子将其转化为恰当微分方程，再进一步进行求解。因此，求解非恰当微分方程的关键是寻找合适的积分因子。文[3]对积分因子的基本性质进行了梳理汇总，并介绍了待定指数法、分组组合法以及变量代换法等求非恰当微分方程积分因子的常见方法。文[4]则介绍了一类乘积型积分因子的存在性定理及其应用。崔晓棋和杨高翔[5]探讨了一类非恰当微分方程积分因子的求解方法及其应用。国内外学者对不同类型的微分方程积分因子的求解方法进行了不同角度和不同层面的探讨[5]-[8]。常见的积分因子法中，所得的因子往往局限于 x 或 y 的单变量依赖，这显然会给实际应用带来一定的局限性。实际上，探讨多元复合积分因子的求解策略在实际问题中至关重要。本文给出了三类同时依赖于 x 和 y 的非恰当微分方程积分因子 x^a+y^b 、 a^x+b^y 和 a^xb^y 。这三类积分因子具有对称形式，结构优美，简洁明了，方便记忆。首先，给出这三类积分因子存在的充要条件。然后，对这些充要条件进行证明。最后，通过实例说明这些充要条件的应用。通过探讨这些充要条件，为寻找合适的非恰当微分方程积分因子提供新的思路和新视野。

2. 预备知识

首先介绍恰当微分方程、非恰当微分方程和积分因子等相关概念。

定义 1 [9] 对于给定的关于 x 和 y 的连续且可导函数 $M(x,y)$、 $N(x,y)$，若存在一个定义在区域 D 内的二元函数 $u(x,y)$，满足在该区域 D 内对所有变量 x 和 y，有等式

$$\mathrm{d}u(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$$

恒成立，那么我们称方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为一个恰当的微分方程。在这种情况下，该方程的通用解即为 $u(x,y)=c$ ，其中 $u(x,y)$ 是满足上述条件的一个解。

不满足该式的微分方程则称为非恰当微分方程。

定义 2 [9] 在区域 D 内，如果存在一个连续可微的函数 $\mu=\mu(x,y)$，它使得

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

成为恰当微分方程，那么这个函数 $\mu(x,y)$ 就被称为方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的一个积分因子。

3. 主要结果

由定义 2 可以看出，利用积分因子是把非恰当微分方法转化为恰当微分方程的重要手段。接下来，将阐述非恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 存在特定形式 x^a+y^b 、 a^x+b^y 和 a^xb^y 的积分因子的充要条件。

定理 1 非恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=x^a+y^b$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{ax^{a-1}N-by^{b-1}M}{x^a+y^b}\text{ 。}$$

证明 首先证明其必要性。假设方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=x^a+y^b$ 的积分因子，根据定义 2，可以推断出方程

$$\left(x^a+y^b\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(x^a+y^b\right)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是一个恰当微分方程.进一步地，根据定义 1，确认存在一个二元可微函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=\left(x^a+y^b\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(x^a+y^b\right)N(x,y)\mathrm{d}y\text{ 。}$$

因此，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^a+y^b\right)M\text{ ，}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^a+y^b\right)N\text{ 。}$$

然后分别对 y 和 x 求偏导数，可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=by^{b-1}M+\left(x^a+y^b\right)\frac{\partial M}{\partial y}\text{ ，}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=ax^{a-1}N+\left(x^a+y^b\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{ 。}$$

鉴于 $M(x,y)$、 $N(x,y)$ 关于 x 和 y 的连续可微特性，由微积分中的基本定理可知，其二阶混合偏导数必然相等，从而有

$$by^{b-1}M+\left(x^a+y^b\right)\frac{\partial M}{\partial y}=ax^{a-1}N+\left(x^a+y^b\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{ ，}$$

进而可得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{ax^{a-1}}{x^a+y^b}N-\frac{by^{b-1}}{x^a+y^b}M\text{ 。}$$

接下来证明充分性。假设

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{ax^{a-1}}{x^a+y^b}N-\frac{by^{b-1}}{x^a+y^b}M\text{ 。}$$

要证明方程

$$\left(x^a+y^b\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\left(x^a+y^b\right)N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$$

为恰当微分方程，即令 $\mu=x^a+y^b$，需要证明

$$\frac{\partial\left(\mu M\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu N\right)}{\partial x}。$$

即证明

$$N\frac{\partial\left(\mu\right)}{\partial x}-M\frac{\partial\left(\mu\right)}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu。$$

为此，设 $z=x^a+y^b$，有

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}ax^{a-1}，\quad\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}by^{b-1}，$$

代入式子 $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$ 中得

$$\left(ax^{a-1}N-by^{b-1}M\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{ax^{a-1}N-by^{b-1}M}\mathrm{d}z。$$

利用已知条件 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{ax^{a-1}}{x^a+y^b}N-\frac{by^{b-1}}{x^a+y^b}M$，可以得到

$$ax^{a-1}N-by^{b-1}M=\left(x^a+y^b\right)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{1}{x^a+y^b}\mathrm{d}z=\frac{1}{z}\mathrm{d}z，$$

从而 $\mu=z=x^a+y^b$ 为方程 $M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子，由定义 1 可知，此函数 $u\left(x,y\right)$ 满足条件

$$\mathrm{d}u\left(x,y\right)=\left(x^a+y^b\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\left(x^a+y^b\right)N\left(x,y\right)\mathrm{d}y。$$

方程的通解公式为

$$\int\left(x^a+y^b\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int\left(\left(x^a+y^b\right)N\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(x^a+y^b\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c。$$

依据该定理，求解微分方程的步骤中，只需通过计算得出一个特定的表达式 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$，将其与 $\frac{ax^{a-1}}{x^a+y^b}N-\frac{by^{b-1}}{x^a+y^b}M$ 进行对比，这样便能确定积分因子的确切形式，进而可以借助这个形式将原方程转化为恰当微分方程，从而顺利求解。

推论 1 当方程中的 a、b 满足 $a=b=1$ 时，非恰当微分方程 $M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=x+y$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{N-M}{x+y}，$$

并且在此情况下，方程的通解可以表示为

$$\int(x+y)M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left((x+y)N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int(x+y)M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c\text{。}$$

推论 2 当方程中的 a 满足 $a=0$ 时，非恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=y^b+1$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{by^{b-1}}{y^b+1}M\text{，}$$

并且在此情况下，方程的通解可以表示为

$$\int\left(y^b+1\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left(\left(y^b+1\right)N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(y^b+1\right)M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c\text{。}$$

推论 3 当方程中的 b 满足 $b=0$ 时，非恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=x^a+1$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{ax^{a-1}}{x^a+1}N\text{，}$$

并且在此情况下，方程的通解可以表示为

$$\int\left(x^a+1\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left(\left(x^a+1\right)N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(x^a+1\right)M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c\text{。}$$

定理 2 非恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=a^x+b^y$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}{a^x+b^y}\text{。}$$

证明 首先证明其必要性。假设方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=a^x+b^y$ 的积分因子。根据定义 2，可以推断出该方程

$$\left(a^x+b^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(a^x+b^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是一个恰当微分方程。进一步地，根据定义 1，确认存在一个二元可微函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=\left(a^x+b^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(a^x+b^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y\text{。}$$

因此，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(a^x+b^y\right)M\text{，}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\left(a^x+b^y\right)N\text{。}$$

然后分别对 y 和 x 求偏导数，可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=Mb^y\ln b+\left(a^x+b^y\right)\frac{\partial M}{\partial y}\text{，}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=Na^x\ln a+\left(a^x+b^y\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{。}$$

鉴于 $M(x,y)$、$N(x,y)$ 关于 x 和 y 的连续可微特性，由微积分中的基本定理可知，其二阶混合偏导数必然相等，从而有

$$Mb^y\ln b+\left(a^x+b^y\right)\frac{\partial M}{\partial y}=Na^x\ln a+\left(a^x+b^y\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{，}$$

进而可得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}{a^x+b^y}。$$

接下来证明充分性。假设

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}{a^x+b^y}。$$

要证明方程

$$\left(a^x+b^y\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\left(a^x+b^y\right)N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$$

为恰当微分方程，即令 $\mu=\mu\left(a^x+b^y\right)$，需要证明

$$\frac{\partial\left(\mu M\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu N\right)}{\partial x},$$

即证明

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu。$$

为此，设 $z=a^x+b^y$，有

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}a^x\ln a,\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}b^y\ln b,$$

代入式子 $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$ 中得

$$\left(Na^x\ln a-Mb^y\ln b\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}\mathrm{d}z。$$

利用已知条件 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}{a^x+b^y}$，可以得到

$$Na^x\ln a-Mb^y\ln b=\left(a^x+b^y\right)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{1}{a^x+b^y}\mathrm{d}z=\frac{1}{z}\mathrm{d}z,$$

从而 $\mu=z=a^x+b^y$ 为方程 $M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子，由定义 1 可知，此函数 $u\left(x,y\right)$ 满足条件

$$\mathrm{d}u\left(x,y\right)=M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y。$$

方程的通解公式为

$$\int\left(a^x+b^y\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int\left(\left(a^x+b^y\right)N\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(a^x+b^y\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c。$$

依据该定理，求解微分方程的步骤中，只需要通过计算得出一个特定的表达式 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$，将其与 $\frac{Na^x\ln a-Mb^y\ln b}{a^x+b^y}$ 进行对比，这样便能确定积分因子的确切形式，进而可以借助这个形式将原方程转化为恰当微分方程，从而顺利求解。

定理 3 非恰当微分方程 $M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=a^xb^y$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\ln a-M\ln b\text{ 。}$$

证明 首先证明其必要性。假设方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有特定形式 $\mu=a^x b^y$ 的积分因子，根据定义 2，可以推断出该方程

$$\left(a^x b^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(a^x b^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是一个恰当微分方程。进一步地，根据定义 1，确认存在一个二元可微函数 $u(x,y)$，使得

$$du(x,y)=\left(a^x b^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(a^x b^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y\text{，}$$

因此，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(a^x b^y\right)M\text{，}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\left(a^x b^y\right)N\text{ 。}$$

然后分别对 y 和 x 求偏导数，可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=Ma^x b^y\ln b+\left(a^x b^y\right)\frac{\partial M}{\partial y}\text{，}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=Na^x b^y\ln a+\left(a^x b^y\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{ 。}$$

鉴于 $M(x,y)$、$N(x,y)$ 关于 x 和 y 的连续可微特性，由微积分中的基本定理可知，其二阶混合偏导数必然相等，从而有

$$Ma^x b^y\ln b+\left(a^x b^y\right)\frac{\partial M}{\partial y}=Na^x b^y\ln a+\left(a^x b^y\right)\frac{\partial N}{\partial x}\text{，}$$

进而可得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\ln a-M\ln b\text{ 。}$$

接下来证明充分性。假设

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\ln a-M\ln b\text{ 。}$$

要证明方程

$$\left(a^x b^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x+\left(a^x b^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为恰当微分方程，即令 $\mu=\mu\left(a^x b^y\right)$，需要证明

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\text{，}$$

即证明

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu\text{ 。}$$

为此，设 $z=a^x b^y$，有

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}a^x b^y\ln a\text{，}\quad\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}a^x b^y\ln b\text{，}$$

代入式子 $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$ 中得

$$\left(Na^xb^y\ln a - Ma^xb^y\ln b\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Na^xb^y\ln a - Ma^xb^y\ln b}\mathrm{d}z\text{。}$$

利用已知条件 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\ln a - M\ln b$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{1}{a^xb^y}\mathrm{d}z = \frac{1}{z}\mathrm{d}z\text{，}$$

从而 $\mu = z = a^xb^y$ 为方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子，由定义 1 可知，此函数 $u(x,y)$ 满足条件

$$\mathrm{d}u(x,y) = \left(a^xb^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x + \left(a^xb^y\right)N(x,y)\mathrm{d}y\text{。}$$

方程的通解公式为

$$\int\left(a^xb^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x + \int\left(\left(a^xb^y\right)N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(a^xb^y\right)M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = c\text{。}$$

依据该定理，求解微分方程的步骤中，只需通过计算得出一个特定的表达式 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$，将其与 $N\ln a - M\ln b$ 进行对比，这样便能确定积分因子的确切形式，进而可以借助这个形式将原方程转化为恰当微分方程，从而顺利求解。

4. 例子

例 1 求解方程 $x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0$。

解 设 $M = x^2$、 $N = y^2$。计算得

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0\text{，}\quad \frac{ax^{a-1}N - by^{b-1}M}{x^a + y^b} = \frac{ax^{a-1}y^2 - by^{b-1}x^2}{x^a + y^b}\text{。}$$

根据上述定理 1，令

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{ax^{a-1}N - by^{b-1}M}{x^a + y^b}\text{，}$$

即

$$0 = ax^{a-1}y^2 - by^{b-1}x^2\text{。}$$

容易看出， $a = b = 3$，故方程的积分因子为 $\mu = x^3 + y^3$。应用通解公式

$$\int\left(x^a + y^b\right)M(x,y)\mathrm{d}x + \int\left(\int\left(x^a + y^b\right)N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(x^a + y^b\right)M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int\left(x^3 + y^3\right)x^2\mathrm{d}x + \int\left(\int\left(x^3 + y^3\right)y^2 - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(x^3 + y^3\right)x^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = c\text{。}$$

求得方程通解为 $\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3y^3 + y^5 = c$，其中 c 为任意常数。

例 2 求解方程 $\left(3^x + 2^y\right)\left(\cos x\mathrm{d}x + \sin y\mathrm{d}y\right) = 0$。

解 设 $M = 3^x\cos x$、 $N = 2^y\sin y$。计算得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2^{y}\ln 2\cos x-3^{x}\ln 3\sin y\frac{Na^{x}\ln a-Mb^{y}\ln b}{a^{x}+b^{y}}$$
$$=\frac{\left(3^{x}+2^{y}\right)\sin ya^{x}\ln a-\left(3^{x}+2^{y}\right)\cos xb^{y}\ln b}{a^{x}+b^{y}}。$$

根据上述定理 2，令

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{Na^{x}\ln a-Mb^{y}\ln b}{a^{x}+b^{y}}。$$

容易看出，$a=3$、$b=2$，故方程的积分因子为 $\mu=-\left(3^{x}+2^{y}\right)$。应用通解公式

$$\int\left(a^{x}+b^{y}\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int\left(\left(a^{x}+b^{y}\right)N\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(a^{x}+b^{y}\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c，$$

求得方程通解为

$$\frac{2^{2y}\cos y}{4\log(2)^{2}+1}-\frac{3^{2x}\sin x}{4\log(3)^{2}+1}+\frac{2^{y}\left(3^{x}\sin x+3^{x}\log 3\cos x\right)}{\log(3)^{2}+1}-\frac{2^{y}3^{x}\sin x}{\log(3)^{2}+1}$$
$$-\frac{2\cdot 3^{2x}\log 3\cos x}{4\log(3)^{2}+1}-\frac{2\cdot 2^{2y}\log 2\sin y}{4\log(2)^{2}+1}\frac{2^{y}\cos y\left(3^{x}\log(3)^{2}+3^{x}\right)}{\left(\log(2)^{2}+1\right)\left(\log(3)^{2}+1\right)}$$
$$-\frac{2^{y}3^{x}\log 3\cos x}{\log 3+1}-\frac{2^{y}\log 2\sin y(3^{x}\log(3)^{2}+3^{x})}{\left(\log(2)^{2}+1\right)\left(\log(3)^{2}+1\right)}=c,$$

其中 c 为任意常数。

例 3 求解方程 $2^{y}dy+3^{x}dy=0$。

解 设 $M=2^{y}$、$N=3^{x}$。计算得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2^{y}\ln 2-3^{x}\ln 3M\ln b-N\ln a=2^{y}\ln b-3^{x}\ln a。$$

根据上述定理 3，令

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=M\ln b-N\ln a。$$

容易看出，$a=3$、$b=2$，故方程的积分因子为 $\mu=3^{x}2^{y}$。应用通解公式

$$\int\left(a^{x}b^{y}\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int\left(\left(a^{x}b^{y}\right)N\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(a^{x}b^{y}\right)M\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=c。$$

求得方程通解为 $\dfrac{2^{2y}3^{x}}{\log 3}+\dfrac{2^{y}3^{x}\left(3^{x}\log 3-2^{y}\log 2\right)}{\log 2\log 3}=c$，其中 c 为任意常数。

5. 结束语

非恰当微分方程是一类特殊的微分方程，本文主要讨论了非恰当微分方程的积分因子求解问题。首先，给出了三类形如 $x^{a}+y^{b}$、$a^{x}+b^{y}$ 和 $a^{x}b^{y}$ 的非恰当微分方程积分因子的充要条件及相应的推论。这三类积分因子比形如 $\dfrac{y^{b}}{x^{a}}$ 和 $\dfrac{1}{y}e^{\int f(x)dx}$ 等其他类型的非恰当微分方程积分因子更加简洁，求解方法更加简便，

拓展了非恰当微分方程的求解范围，丰富了非恰当微分方程的求解方法。然后，就这些积分因子予以举例分析。最后，以本文类型对应的方程及相应的结论进行求解。但是寻找非恰当微分方程合适的积分因子是十分困难的，因此，方便快捷找出合适实用的积分因子，为求解非恰当微分方程提供更加有效的方法是值得今后努力探索的课题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12161028)，广西自然科学基金资助项目(GuikeAD20159017)，广西科技基地和人才专项(桂科 AD20159017)。

参考文献

[1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[2] 魏明彬. 一阶线性微分方程的几种解法和思路分析[J]. 成都师范学院学报, 2014, 30(7): 122-124.

[3] 赵莉莉. 积分因子与积分因子法[J]. 高等数学研究, 2023, 26(3): 19-22+25.

[4] 李中杰, 范志勇. 一类乘积型积分因子的存在性定理及其应用[J]. 湖州师范学院学报, 2019, 41(2): 22-25.

[5] 崔晓祺, 杨高翔. 一类非恰当微分方程积分因子的求解及应用[J]. 高师理科学刊, 2019, 39(3): 27-28+36.

[6] Zhang, H., Yan, J., Qian, X. and Song, S. (2023) Temporal High-Order, Unconditionally Maximum-Principle-Preserving Integrating Factor Multi-Step Methods for Allen-Cahn-Type Parabolic Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **186**, 19-40. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.12.020

[7] Wu, C., Feng, X., He, Y. and Qian, L. (2023) A Second-Order Strang Splitting Scheme with Exponential Integrating Factor for the Allen-Cahn Equation with Logarithmic Flory-Huggins Potential. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **117**, Article 106983. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106983

[8] Lovisetto, M., Clamond, D. and Marcos, B. (2024) Integrating Factor Techniques Applied to the Schrödinger-Like Equations. *Comparison with Split-Step Methods. Applied Numerical Mathematics*, **197**, 258-271. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.11.016

[9] 郭三刚. 全微分方程与积分因子定义的修正[J]. 高等数学研究, 2018, 21(3): 7-9.