

# 具有状态反馈脉冲控制的叶螨 - 捕植螨系统的动力分析

杨韶宇\*, 张 蒙

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年5月17日; 录用日期: 2024年6月11日; 发布日期: 2024年6月18日

## 摘 要

叶螨取食重要农业植物的叶和果实, 是田间农作物的一大害虫, 人们利用捕植螨对其进行控制。本文建立了Smith增长且具有Beddington-DeAngelis型功能反应的叶螨 - 捕植螨系统, 并对该系统的有界性, 极限环不存在以及平衡点的类型和其稳定性进行了分析。同时, 基于这个模型又建立了具有脉冲控制的状态反馈脉冲模型, 证明了其阶一周解的存在性。

## 关键词

叶螨, 捕植螨, Smith增长, Beddington-DeAngelis型功能反应, 阶一周解

# The Dynamic Analysis of the Spider Mite-Phytoseiid Mite System with State-Feedback Impulse Control

Shaoyu Yang\*, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: May 17<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jun. 11<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 18<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

The spider mites feed on leaves and fruits of important agricultural plants and are a major pest to crops in the field. People use phytoseiidae mites to control them. In this paper, a Smith increased spider mite-phytoseiidae mites system with Beddington-Deangelis functional response is established. The boundedness, the existence of the limit cycle, the types of equilibrium points and their

\*通讯作者。

stability of the system are analyzed. At the same time, based on the model, a state feedback impulse model is established to prove the existence of its order-1 periodic solution.

## Keywords

Spider Mite, Phytoseiidae Mite, Smith Growth, Beddington-DeAngelis Functional Response, Order-1 Periodic Solution

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

叶螨是一类植食性螨，主要取食重要农业植物(包括果树)的叶和果实，具有发育快，适应性强，抗药性强等特点，是世界五大害虫之一。1971年，在加利福尼亚的果园里发现植绥螨是叶螨的有效捕食者[1]；[2]中也证明了一种捕食性螨可以控制欧洲的红叶螨。

很多研究者认为在更大的时间和空间尺度上，功能反应更加依赖于捕食者，比率依赖功能反应作为捕食者功能反应的一个重要形式[3]，很好地描述了捕食者之间相互干扰的影响。但它存在“低密度问题”[4]，1975年，Beddington和DeAngelis各自独立提出了一个新的捕食者依赖的功能反应[5][6]，后世称为Beddington-DeAngelis功能反应。该功能反应在保持了比率依赖功能反应的某些特性的同时避免了“低密度问题”[7]。此外，由于Smith增长比常用的Logistic增长更能描述真实的生物生长[8][9]，因此本文建立了一个食饵具有Smith增长且与捕食者之间的相互作用为Beddington-DeAngelis功能反应的食饵-捕食者模型。

陈等人提出了关于“半连续动力系统”的基本概念[10]；Meng和Jiao等人研究了具有状态反馈脉冲的SI传染病模型[11][12]。

我们建立了一个具有Smith增长且食饵与捕食者之间的相互作用为Beddington-DeAngelis功能反应的食饵-捕食者模型，并对其进行了动力学分析；在第三部分，在原模型的基础上加入单边脉冲构成新的模型，进而证明新模型阶一周解的存在性。

## 2. 无脉冲分析

以Smith增长为食饵叶螨的内禀增长函数，其与捕食者之间相互作用为Beddington-DeAngelis型功能反应建立如下模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{kmy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $m$  表示消耗率， $\alpha$  为食饵的饱和常数， $\beta$  捕食者的干扰， $\gamma$  另一个饱和常数， $k$  转化率，这里所有的参数都是正的。

垂直等倾线：

$$x = 0; y = \frac{(a-bx)(\alpha + \beta x)}{(1+cx)m - (a-bx)\gamma}.$$

水平等倾线:

$$y = 0; y = \frac{(km-d\beta)x-d\alpha}{d\gamma}.$$

因此边界平衡点有  $E_0(0,0)$ ,  $E_1\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ 。

**定理 1** 当参数满足条件 H1 时, 系统有唯一的正平衡点  $E_2(x^*, y^*)$ , 其中  $x^*, y^*$  满足

$$\begin{cases} \frac{a-bx^*}{1+cx^*} - \frac{my^*}{\alpha+\beta x^*+\gamma y^*} = 0, \\ \frac{kmx^*}{\alpha+\beta x^*+\gamma y^*} - d = 0. \end{cases} \quad (2)$$

于是  $y^* = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( \frac{km}{d} - \beta \right) x^* - \alpha \right]$ , 这里满足  $km-d\beta > 0$  才有可能存在正平衡点, 因此下述讨论均在条件  $km-d\beta > 0$  下进行。

$x^*$  为方程  $(ckm-c\beta d+kby)x+(km-\beta d-c\alpha d-ka\gamma)x-\alpha d=0$  的根。

令  $A_1 = bk\gamma + c(km-d\beta)$ ,  $A_2 = km-d\beta-c\alpha d-ka\gamma$ ,  $A_3 = -d\alpha$ , 显然  $A_1 > 0$ ,  $A_3 < 0$ 。

于是有  $A_2^2 - 4A_1A_3 > 0$ , 此时方程有两个根, 其中有一个正根  $x^* = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}$ , 因此当

$\left( \frac{km}{d} - \beta \right) \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1} + \alpha < 0$  (H1) 时, 系统有唯一的正平衡点  $E_2(x^*, y^*)$ 。

**定理 2** 平衡点  $E_0$  为鞍点; 当  $\frac{akm}{b\alpha+a\beta} > d$  时, 平衡点  $E_1$  是鞍点, 当  $\frac{akm}{b\alpha+a\beta} < d$  时, 平衡点  $E_1$  是稳定的结点。

证明 系统的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{a-bx}{1+cx} - \frac{my}{\alpha+\beta x+\gamma y} + x \left[ -\frac{b+ac}{(1+cx)^2} + \frac{\beta my}{(\alpha+\beta x+\gamma y)^2} \right] & -\frac{(\alpha+\beta x)mx}{(\alpha+\beta x+\gamma y)^2} \\ \frac{(\alpha+\gamma y)kmy}{(\alpha+\beta x+\gamma y)^2} & \frac{(\alpha+\beta x)kmx}{(\alpha+\beta x+\gamma y)^2} - d \end{pmatrix}$$

对于边界平衡点  $E_0(0,0)$ ,

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

于是平衡点  $E_0$  为鞍点。

对于边界平衡点  $E_1\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ ,

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{(b+ac)\frac{a}{b}}{\left(1+\frac{ac}{b}\right)^2} & -\frac{m\frac{a}{b}}{\alpha+\beta\frac{a}{b}} \\ 0 & \frac{km\frac{a}{b}}{\alpha+\beta\frac{a}{b}} - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{ab}{b+ac} & -\frac{am}{b\alpha+a\beta} \\ 0 & \frac{akm}{b\alpha+a\beta} - d \end{pmatrix},$$

$$D = -\frac{ab}{b+ac} \left( \frac{akm}{\alpha b + a\beta} - d \right), \quad T = -\frac{ab}{b+ac} + \frac{akm}{\alpha b + a\beta} - d。$$

$$\begin{aligned} T^2 - 4D &= \left( -\frac{ab}{b+ac} + \frac{akm}{\alpha b + a\beta} - d \right)^2 - 4 \left( -\frac{ab}{b+ac} \left( \frac{akm}{\alpha b + a\beta} - d \right) \right) \\ &= \left( \frac{ab}{b+ac} + \frac{akm}{\alpha b + a\beta} - d \right)^2 \end{aligned}$$

于是有当  $\frac{akm}{b\alpha + a\beta} > d$  时, 平衡点  $E_1$  是鞍点; 当  $\frac{akm}{b\alpha + a\beta} < d$  时, 平衡点  $E_1$  是稳定的结点。

**定理 3** 当  $\frac{(b+ac)x^*}{(1+cx^*)^2} - \frac{m(\beta-k\gamma)x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} > 0$  时,  $E_2$  是稳定的结点或焦点; 当

$\frac{(b+ac)x^*}{(1+cx^*)^2} - \frac{m(\beta-k\gamma)x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} < 0$  时,  $E_2$  是不稳定的结点或焦点。

证明  $E_2(x^*, y^*)$  的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} x^* \left[ -\frac{b+ac}{(1+cx^*)^2} + \frac{\beta m y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} \right] & -\frac{m(\alpha+\beta x^*)x^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} \\ \frac{km(\alpha+\gamma y^*)y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} & -\frac{km\gamma x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} \end{pmatrix},$$

于是

$$D = \frac{kmx^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} \left[ \frac{(b+ac)\gamma x^*}{(1+cx^*)^2} + \frac{m\alpha}{\alpha+\beta x^*+\gamma y^*} \right],$$

$$T = -\frac{(b+ac)x^*}{(1+cx^*)^2} + \frac{m(\beta-k\gamma)x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2},$$

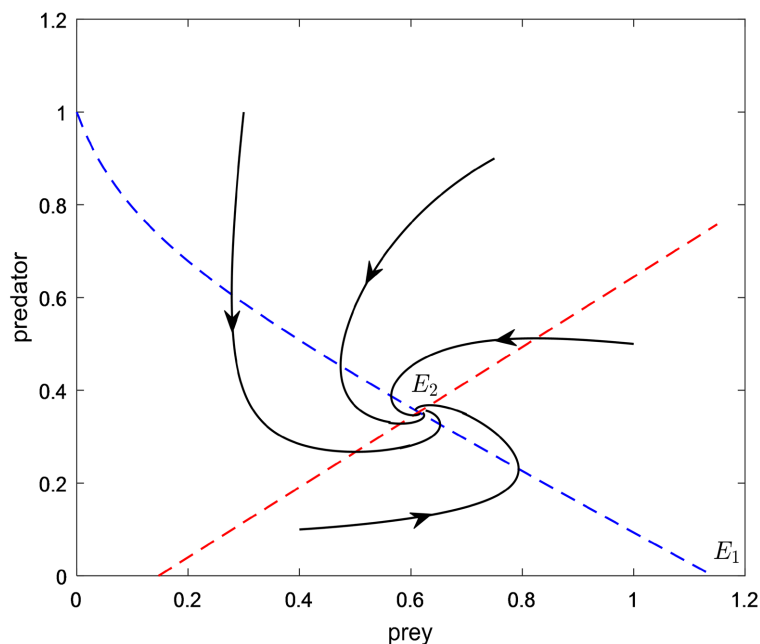
$$\begin{aligned} T^2 - 4D &= \frac{(b+ac)^2 x^{*2}}{(1+cx^*)^4} + \frac{m^2(\beta-k\gamma)^2 x^{*2}y^{*2}}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^4} - \frac{4km^2\alpha x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^3} \\ &\quad - \frac{2m(b+ac)(\beta+k\gamma)x^{*2}y^*}{(1+cx^*)^2(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2}. \end{aligned}$$

因此有

当  $\frac{(b+ac)x^*}{(1+cx^*)^2} - \frac{m(\beta-k\gamma)x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} > 0$  时,  $E_2$  是稳定的结点或焦点;

当  $\frac{(b+ac)x^*}{(1+cx^*)^2} - \frac{m(\beta-k\gamma)x^*y^*}{(\alpha+\beta x^*+\gamma y^*)^2} < 0$  时,  $E_2$  是不稳定的结点或焦点。

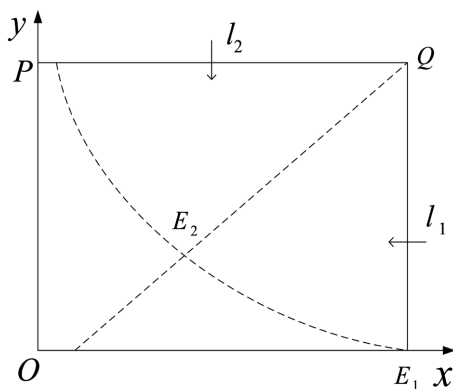
接下来, 我们只考虑  $k\gamma - \beta > 0$  的情况, 此时  $E_2$  是稳定的结点或焦点(系统(1)的轨线图如图 1 所示)。



**Figure 1.** The trajectory diagram of system (1)  
**图 1.** 系统(1)的轨线图

**定理 4** 系统(1)是一致有界的。

证明 过  $E_1\left(\frac{a}{b}, 0\right)$  点垂直于  $x$ -轴作直线  $l_1: x = x_1 = \frac{a}{b}$ , 其交水平等倾线  $y = \frac{(km - d\beta)x - d\alpha}{d\gamma}$  于点  $Q\left(\frac{a}{b}, \frac{akm}{bd\gamma} - \frac{a\beta}{b\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ , 过点  $Q$  作垂直于  $y$ -轴的直线  $l_2: y = y_1 = \frac{akm}{bd\gamma} - \frac{a\beta}{b\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}$ , 与  $y$ -轴相交于点  $P$ , 于是  $OPQE_1$  构成一个 Bendixson 环(如图 2 所示)。



**Figure 2.** Region  $\Omega$   
**图 2.** 有界域  $\Omega$

对  $y > 0$ , 有  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_1} = -\frac{mx_1 y}{\alpha + \beta x_1 + \gamma y} < 0$ , 于是轨线从  $l_1$  的右端穿向  $l_1$  的左端;

对  $0 < x < \frac{a}{b}$ , 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=y_1} &= y_1 \left( \frac{kmx}{\alpha + \beta x + \gamma y_1} - d \right) \\ &= y_1 \frac{(km - d\beta)x - d\gamma y_1 - d\alpha}{\alpha + \beta x + \gamma y_1} \\ &\leq \frac{y_1}{\alpha + \beta x + \gamma y_1} \left[ (km - d\beta) \frac{a}{b} - d\gamma \left( \frac{akm}{bd\gamma} - \frac{a\beta}{b\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} \right) - d\alpha \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

此时轨线从  $l_2$  的上方穿到  $l_2$  的下方。

此外  $x = 0, y = 0$  是系统的轨线, 因此系统在第一象限的一致有界性得证。

**定理 5** 系统(1)的极限环不存在。

证明 定义 Dulac 函数  $D = \frac{1}{xy}$ , 则

$$PD = \frac{a - bx}{(1 + cx)y} - \frac{m}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \quad QD = \frac{km}{\alpha + \beta x + \gamma y} - \frac{d}{x},$$

于是有 
$$\frac{\partial(PD)}{\partial x} + \frac{\partial(QD)}{\partial y} = -\frac{b + ac}{(1 + cx)^2 y} - \frac{m(k\gamma - \beta)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} < 0,$$

根据 BendixonDulac 定理知, 系统(1)无极限环。

### 3. 状态脉冲分析

在系统(1)中, 当  $x = h_1$  时加入状态反馈脉冲控制, 得到如下模型(3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(a - bx)}{1 + cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{kmy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy \end{aligned} \right\} x > h_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= px^* \\ \Delta y &= -\delta_1 y \end{aligned} \right\} x = h_1, 0 < y < \frac{mh_1(1 + ch_1) - (a - bh_1)(\alpha + \beta h_1)}{(a - bh_1)\gamma}. \quad (3)$$

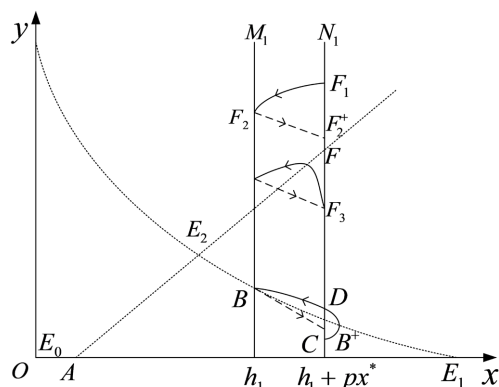
水平等倾线交  $x$ -轴于点  $A$ , 脉冲集  $M_1$  与垂直等倾线的交点为  $B$ , 过  $B$  的轨线与相集  $N_1$  的第一个交点为  $C$ , 第二个交点为  $D$ ; 相集  $N_1$  与水平等倾线远离  $x$ -轴的交点为  $F$ 。脉冲映射  $\varphi_1$  将  $B$  映射到  $N_1$  上的  $B^+$  处, 若  $B^+$  与  $C$  重合, 则显然  $CDBB^+$  构成一个阶一周解, 下面讨论两点不重合的情况。

**定理 6** 当  $y_{B^+} > y_C$  时, 系统(3)存在阶一周解。

证明 此时  $C$  点的后继函数为  $f(C) = y_{B^+} - y_C > 0$ ; 在  $N_1$  上  $F$  的上方取一点  $F_1$ , 过  $F_1$  的轨线交  $M_1$  于点  $F_2$ , 根据系统轨线的走势知  $y_{F_2} < y_{F_1}$ ,  $\varphi_1$  将  $F_2$  映射到  $F_2^+$  处, 且有  $y_{F_2^+} = (1 - \delta_1)y_{F_2}$ , 于是有  $y_{F_2^+} < y_{F_1}$ , 即  $F_1$  的后继函数  $f(F_1) = y_{F_2^+} - y_{F_1} < 0$ ; 因此根据后继函数的连续性得到在点  $C$  与  $F_1$  之间存在一点  $F_3$  使其后继函数为零, 阶一周解的存在性得证(如图 3 所示)。

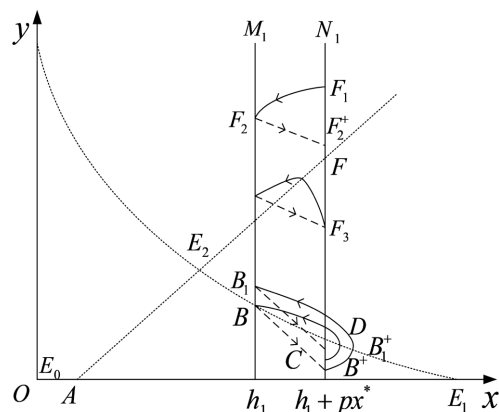
**定理 7** 当  $y_{B^+} < y_C$  时, 系统(3)存在阶一周解。

证明 过  $B^+$  的轨线交  $M_1$  于  $B_1$ , 由轨线的性质知  $B_1$  一定在  $B$  的上方, 脉冲映射  $\varphi_1$  将  $B_1$  映射到  $B_1^+$ , 且有  $y_{B_1^+} = (1 - \delta_1)y_{B_1}$ , 又因  $y_{B^+} = (1 - \delta_1)y_B$ , 于是得到  $y_{B_1^+} > y_{B^+}$ , 即  $B^+$  的后继函数  $f(B^+) = y_{B_1^+} - y_{B^+} > 0$ ; 后面的步骤与上述定理相同, 因此系统存在阶一周解(如图 4 所示)。



**Figure 3.** System (3) exists an unilateral order-1 solution for the case  $y_{B^+} > y_c$

**图 3.**  $y_{B^+} > y_c$  时, 系统(3)存在阶一周期解



**Figure 4.** System (3) exists an unilateral order-1 solution for the case  $y_{B^+} < y_c$

**图 4.**  $y_{B^+} < y_c$  时, 系统(3)存在阶一周期解

在系统(1)中, 当  $x = h_2$  时加入状态反馈脉冲控制, 得到如下模型(4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{kmxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy \end{aligned} \right\} x < h_2, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -qx^* \\ \Delta y &= \delta_2 y \end{aligned} \right\} x = h_2, y > \frac{mh_1(1+ch_1) - (a-bh_1)(\alpha + \beta h_1)}{(a-bh_1)\gamma}$$

$y = \frac{(km-d\beta)x-d\alpha}{d\gamma}$  交  $x$ -轴于点  $A$ ,  $B$  为脉冲集  $M_2$  与  $y = \frac{(km-d\beta)x-d\alpha}{d\gamma}$  的交点, 过  $B$  的轨线与相

集  $N_2$  的第一个交点为  $C$ , 第二个交点为  $D$ , 脉冲函数  $\phi_2$  将  $B$  映射到点  $B^+$ . 若  $y_{B^+} = y_D$  或  $y_{B^+} = y_C$  时, 显然系统(4)存在阶一周期解, 下面说明  $y_{B^+} < y_D$ ,  $y_D < y_{B^+} < y_C$  和  $y_{B^+} > y_C$  三种情况。

**定理 8** 当  $y_{B^+} < y_D$  时, 系统(4)存在周期解。

证明 过  $B^+$  的轨线交脉冲集  $M_2$  于点  $B_1$ , 由系统轨线的性质知  $B_1$  在的下方  $B$ , 脉冲映射  $\phi_2$  将其映射

到相集  $N_2$  上的  $B_1^+$ , 显然  $B_1^+$  也在  $B^+$  的下方, 于是有后继函数  $f(B^+) = y_{B_1^+} - y_{B^+} < 0$ ; 在  $N_2$  上取一点  $B_2$  满足  $0 < y_{B_2} < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$ , 过  $B_2$  的轨线交  $M_2$  于点  $B_3$  且有  $y_{B_3} > y_{B_2}$ ,  $\varphi_2$  将其映射到  $N_2$  上的点  $B_3^+$  处, 显然  $y_{B_3^+} > y_{B_2}$ , 于是有后继函数  $f(B_2) = y_{B_3^+} - y_{B_2} > 0$ ; 因此根据后继函数的连续性, 在  $B^+$  与  $B_2$  之间一定存在一点使得在该点处的后继函数为零, 阶一周期解的存在行得证(如图 5 所示)。

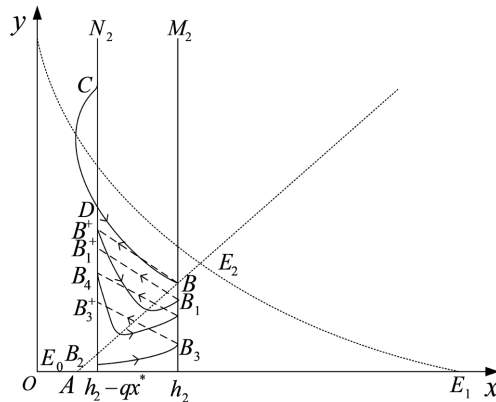


Figure 5. System (4) exists an unilateral order-1 solution for the case  $y_D > y_{B^+}$

图 5.  $y_D > y_{B^+}$  时, 系统(4)存在阶一周期解

**定理 9** 当  $y_D < y_{B^+} < y_C$  时, 以 C 为研究点, 与上述证明类似可以同样可以得到系统(4)存在阶一周期解。

**定理 10** 当  $y_{B^+} > y_C$  时, 系统(4)存在阶一周期解。

证明 过  $B^+$  的轨线与脉冲集  $M_2$  相交于点  $B_1$ , 根据系统(4)的轨线走势知  $y_{B_1} < y_{B^+}$ , 接着脉冲映射  $\varphi_2$  将其映射到  $N_2$  上的  $B_1^+$ , 有  $y_{B_1^+} = (1 + \delta_2)y_{B_1}$ , 而  $y_{B^+} = (1 + \delta_2)y_{B^+}$ , 因此有  $f(B^+) = y_{B_1^+} - y_{B^+} < 0$ ; 在  $N_2$  上取一点  $B_2$  满足  $0 < y_{B_2} < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$ , 过  $B_2$  的轨线交  $M_2$  于点  $B_3$  且有  $y_{B_3} > y_{B_2}$ ,  $\varphi_2$  将其映射到  $N_2$  上的点  $B_3^+$  处, 显然  $y_{B_3^+} > y_{B_2}$ , 于是  $B_2$  的后继函数  $f(B_2) = y_{B_3^+} - y_{B_2} > 0$ 。

因此由后继函数的连续性得到, 在  $B^+$  与  $B_2$  之间一定存在一点  $B_4$ , 满足  $f(B_4) = 0$ , 于是系统(4)阶一周期解的存在性得证(如图 6 所示)。

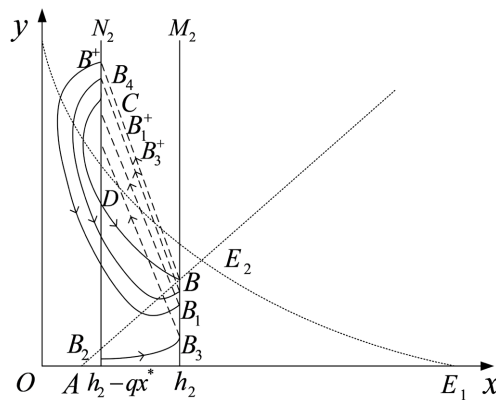


Figure 6. System (4) exists an unilateral order-1 solution for the case  $y_{B^+} > y_C$

图 6.  $y_{B^+} > y_C$  时, 系统(4)存在阶一周期解



## 4. 结论

本文构建了一个食饵具有 Smith 增长且与捕食者之间的相互作用为 Beddington-DeAngelis 功能反应的模型来描述叶螨和捕植螨的这对食饵 - 捕食者关系, 同时也通过加入状态反馈脉冲控制来人为干预它们, 并证明了状态反馈脉冲控制系统阶一周期解的存在性, 于是得到当食饵增加到一定规模时, 捕杀叶螨, 当食饵减小到一定规模时, 收获捕植螨, 以此使系统达到平衡状态。

## 参考文献

- [1] Hoyt, S.C. and Caltagirone, L.E. (1971) The Developing Programs of Integrated Control of Pests of Apples in Washington and Peaches in California. Springer, 1-11.
- [2] Hoy, M.A., Roush, R.T. and Smith, K.B. (1979) Spider Mites and Predators in San Joaquin Valley Almond Orchards. *California Agriculture*, **33**, 11-13.
- [3] McMurtry, J.A. and van de Vrie, M. (1973) Predation By *amblyseius Potentillae* (Garman) On *panonychus ulmi* (Koch) in Simple Ecosystems (Acarina: Phytoseiidae, Tetranychidae). *Hilgardia*, **42**, 17-33.
- [4] Rabbinge, R and Vrie, M.V.D. (1977) Application of the Process Simulation Technique in Biological Control of the Fruit Tree Red Spider Mite, *Panonychus ulmi* (Koch).
- [5] Beddington, J.R. (1975) Mutual Interference between Parasites or Predators and Its Effect on Searching Efficiency. *The Journal of Animal Ecology*, **44**, 331-340. <https://doi.org/10.2307/3866>
- [6] DeAngelis, D.L., Goldstein, R.A. and O'Neill, R.V. (1975) A Model for Tropic Interaction. *Ecology*, **56**, 881-892. <https://doi.org/10.2307/1936298>
- [7] Morozov, A. and Arashkevich, E. (2008) Patterns of Zooplankton Functional Response in Communities with Vertical Heterogeneity: A Model Study. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, **3**, 131-148. <https://doi.org/10.1051/mmnp:2008061>
- [8] Zhang, H., Georgescu, P. and Chen, L. (2008) On the Impulsive Controllability and Bifurcation of a Predator-Pest Model of IPM. *Biosystems*, **93**, 151-171. <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2008.03.008>
- [9] Sivakumar, M., Sambath, M. and Balachandran, K. (2015) Stability and Hopf Bifurcation Analysis of a Diffusive Predator-prey Model with Smith Growth. *International Journal of Biomathematics*, **8**, 1550013. <https://doi.org/10.1142/s1793524515500138>
- [10] 陈兰荪, 程惠东. 害虫综合防治建模驱动“半连续动力系统理论”兴起[J]. 数学建模及其应用, 2021, 10(1): 1-16.
- [11] Meng, X., Song, Z. and Chen, L. (2007) A New Mathematical Model for Optimal Control Strategies of Integrated Pest Management. *Journal of Biological Systems*, **15**, 219-234. <https://doi.org/10.1142/s0218339007002143>
- [12] Jiao, J., Chen, L. and Luo, G. (2008) An Appropriate Pest Management SI Model with Biological and Chemical Control Concern. *Applied Mathematics and Computation*, **196**, 285-293. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.05.072>