

# 具有双边状态反馈脉冲控制的食饵 - 捕食者模型的动力分析

杨韶宇\*, 张 蒙

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年5月21日; 录用日期: 2024年6月15日; 发布日期: 2024年6月21日

## 摘 要

为进行害虫的防治, 本文在具有Smith增长且具有Beddington-DeAngelis型功能反应的食饵 - 捕食者系统的基础上加入双边状态反馈脉冲控制, 从而得到新的模型, 并证明了其双边阶一周期解的存在性。同时, 也对所得的理论结果通过数值模拟进行验证。

## 关键词

食饵, 捕食者, 双边状态反馈脉冲控制, 阶一周期解

## Dynamic Analysis of Prey-Predator Model with Two State-Feedback Impulse Controls

Shaoyu Yang\*, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: May 21<sup>st</sup>, 2024; accepted: Jun. 15<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 21<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

In order to control insect pests, a model with two state-feedback impulse controls is applied to the predator-prey system with Smith growth function and Beddington-DeAngelis type functional response. We also prove the existence of order-1 periodic solution. At the same time, the theoretical results are verified by numerical simulation.

\*通讯作者。

## Keywords

### Prey, Predator, Two State-Feedback Impulse Controls, Order-1 Periodic Solution

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

食饵与捕食者之间的关系是自然界中物种间最常见的一种关系[1], 因此研究食饵 - 捕食者模型能够帮助我们了解种群, 了解大自然, 从而更好地保护和利用自然。害虫与其天敌就是一对食饵与捕食者关系[2] [3], 人们通过引入天敌来对害虫进行生物防治, 本文通过对食饵捕食者模型加入双边脉冲控制来使得两种群可以动态平衡发展, 避免因一方占优势而使另一方灭绝, 此时既能保证害虫不会泛滥成灾, 又能节省经济成本。

为了保护农作物免受害虫的危害, 许多学者通过固定时刻脉冲来进行控制[4]-[7], 但固定时刻脉冲在实际生活中有一些不足之处, 比如害虫的生长并不一定符合周期规律[8], 因此通过固定时间来进行农药的喷洒在除虫效果上并不显著, 同时也造成了资源的浪费, 而状态反馈脉冲控制则是通过设置阈值, 害虫满足某一阈值再采取相应措施[9]-[12], 这大大节省了物力和人力, 同时也能够有效地进行害虫的防治。陈提出了“半连续动力系统”的基本概念[13], 通过对模型加入单边或双边状态反馈脉冲控制来达到防治害虫的目的。

## 2. 状态反馈脉冲模型的动力分析

### 2.1. 无脉冲模型

本文考虑食饵种群的增长为 Smith 增长, 食饵与捕食者之间的相互作用关系为更加依赖捕食者的 Beddington-DeAngelis 型功能反应。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{kmy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $m$  表示消耗率,  $\alpha$  为食饵的饱和常数,  $\beta$  捕食者的干扰,  $\gamma$  另一个饱和常数,  $k$  转化率, 这里所有的参数均为正。

该系统的平衡点有  $E_0(0,0)$ ,  $E_1\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ ,  $E_2(x^*, y^*)$ , 这里  $x^*, y^*$  分别为

$$x^* = \frac{-(km - d\beta - cd\alpha - ak\gamma) + \sqrt{(km - d\beta - cd\alpha - ak\gamma)^2 + 4d\alpha(bk\gamma + ckm - cd\beta)}}{2(bk\gamma + ckm - cd\beta)},$$

$$y^* = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( \frac{km}{d} - \beta \right) x^* - \alpha \right].$$

### 2.2. 双边状态反馈脉冲系统

当害虫数量减小到  $h_1$ , 其对农作物的影响很小, 可以忽略不计, 因此为了经济效应或综合考虑, 我们收走一部分天敌; 当害虫的数量增长到  $h_2$  时, 释放其天敌以免对害虫成灾对农作物造成损害, 于是得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha+\beta x+\gamma y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{kmy}{\alpha+\beta x+\gamma y} - dy \end{aligned} \right\} h_1 < x < h_2, \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= px^* \\ \Delta y &= -\delta_1 y \end{aligned} \right\} x = h_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -qx^* \\ \Delta y &= \delta_2 y \end{aligned} \right\} x = h_2.$$

其中  $p, q > 0, 0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ 。

垂直等倾线与脉冲集  $M_1, M_2$  的交点分别为  $F_1, F_2$ , 过其的轨线交相集  $N$  分别于点  $F_1', F_2'$ ; 脉冲映射  $\varphi_1$  将  $F_1$  映射到  $F_1'$ ,  $M_1$  上存在一点  $F_3$  可被  $\varphi_1$  映射到  $F_2'$ ;  $\varphi_2$  将  $F_2$  映射到  $F_2'$ ,  $M_2$  上存在一点  $F_4$  可被  $\varphi_2$  映射到  $F_1'$ 。

1) 当  $p = 1 - \frac{h_1}{x^*}, q = \frac{h_2}{x^*} - 1$  时

定理 1 当  $1 - \frac{y_{F_2}}{y_{F_1}} \ll \delta_1 < 1, \delta_2 \gg \frac{y_{F_1}}{y_{F_2}} - 1$  时, 系统(2)有阶一周期解。

证明 在  $N$  上取一点  $B_1$  满足  $0 < y_{F_2} - y_{B_1} < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$ , 过其轨线交  $M_2$  于点  $B_2$ , 此外由轨线的性质知  $B_2$  在  $F_2$  下方且无限靠近  $F_2$ ,  $\varphi_2$  将  $B_2$  映射到  $N$  上  $B_3$  处, 显然  $B_3$  在  $F_2'$  下方, 过  $B_3$  的轨线交  $M_1$  于  $B_4$  处, 根据  $\delta_2 \gg \frac{y_{F_1}}{y_{F_2}} - 1$  及轨线的性质知  $B_4$  在  $F_3$  上方, 接着被  $\varphi_1$  映射到  $B_5$  处, 显然  $B_5$  在  $F_2'$  的上方, 于是  $B_1$  的后继函数  $f(B_1) = y_{B_5} - y_{B_1} > 0$ 。

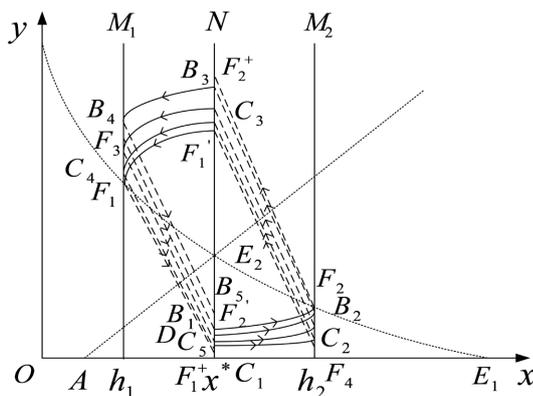


Figure 1. System (2) exists a bilateral order-1 periodic solution with  $p = 1 - \frac{h_1}{x^*}, q = \frac{h_2}{x^*} - 1$

图 1. 当  $p = 1 - \frac{h_1}{x^*}, q = \frac{h_2}{x^*} - 1$  时, 系统(2)存在阶一周期解

在  $N$  上取一点  $C_1$ , 过其轨线交  $M_2$  于点  $C_2$ , 满足  $0 < y_{C_2} - y_{F_4} < \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 接着  $\varphi_2$  将  $C_2$  映射到  $N$  上  $C_3$  处, 显然  $C_3$  在  $F_1'$  上方且靠近  $F_1'$ , 过  $C_3$  的轨线交  $M_1$  于  $C_4$  处, 由轨线的性质知  $C_4$  在  $F_1$  上方且靠近  $F_1$ , 接着  $\varphi_1$  将  $C_4$  映射到  $C_5$ , 其在  $F_1^+$  上方并靠近  $F_1^+$ , 由  $1 - \frac{y_{F_2}}{y_{F_1}} \ll \delta_1 < 1$  知  $C_5$  在  $C_1$  的下方, 于是  $C_1$  的后继函数  $f(C_1) = y_{C_5} - y_{C_1} < 0$ 。

根据后继函数的连续性, 知存在一点  $D$  使得其后继函数  $f(D) = 0$ , 即系统(2)存在阶一周期解(如图 1 所示)。

2) 当  $p < \frac{h_2 - h_1}{x^*} - q$  时

定理 12 当  $1 - \frac{y_{F_2}}{y_{F_1}} \ll \delta_1 < 1$ ,  $\delta_2 \gg \frac{y_{F_1}}{y_{F_2}} - 1$  时, 系统(2)有阶一周期解。

证明 在  $N_1$  上取一点  $B_1$  满足  $0 < y_{B_1} - y_{F_2} < \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 过其轨线交  $M_2$  于点  $B_2$ , 由系统(2)轨线的性质知  $B_2$  在  $F_2$  下方且无限靠近  $F_2$ ,  $\varphi_2$  将  $B_2$  映射到  $N_2$  上  $B_3$  处, 显然  $B_3$  在  $F_2^+$  下方, 过  $B_3$  的轨线交  $M_1$  于点  $B_4$ , 根据  $\delta_2 \gg \frac{y_{F_1}}{y_{F_2}} - 1$  及轨线的性质知  $B_4$  在  $F_3$  上方,  $\varphi_1$  将其映射到  $B_5$  处, 显然  $B_5$  在  $F_2'$  的上方, 于是  $B_1$  的后继函数  $f(B_1) = y_{B_5} - y_{B_1} > 0$ 。

在  $N_1$  上取一点  $C_1$ , 使得过其轨线交  $M_2$  于  $C_2$  满足  $0 < y_{C_2} - y_{F_4} < \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 接着  $\varphi_2$  将  $C_2$  映射到  $N_2$  上  $C_3$  处, 显然  $C_3$  在  $F_1'$  上方且靠近  $F_1'$ , 过  $C_3$  的轨线交  $M_1$  于  $C_4$  处, 由轨线的性质知  $C_4$  在  $F_1$  上方且靠近  $F_1$ , 接着  $\varphi_1$  将  $C_4$  映射到靠近  $F_1^+$  的  $C_5$  处, 由  $1 - \frac{y_{F_2}}{y_{F_1}} \ll \delta_1 < 1$  知  $C_5$  在  $C_1$  的下方, 于是  $C_1$  的后继函数  $f(C_1) = y_{C_5} - y_{C_1} < 0$ 。

根据后继函数的连续性知存在一点  $D$  使得其后继函数  $f(D) = 0$ , 即系统(2)存在双边的阶一周期解(如图 2 所示)。

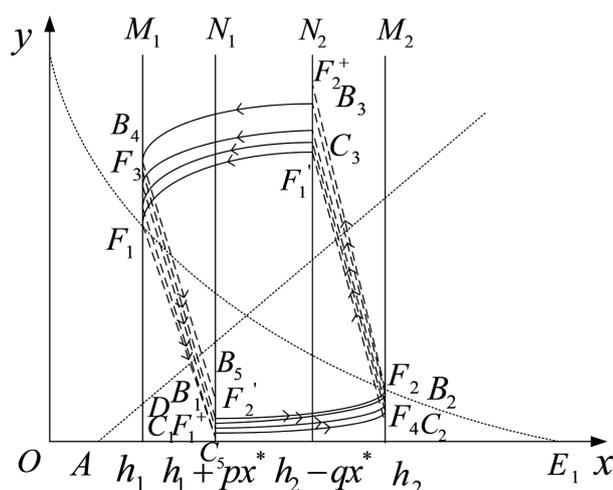


Figure 2. System (2) exists a bilateral order-1 periodic solution with  $p < \frac{h_2 - h_1}{x^*} - q$

图 2. 当  $p < \frac{h_2 - h_1}{x^*} - q$  时, 系统(2)存在阶一周期解

### 3. 数值模拟

#### 3.1. 单边状态反馈脉冲

根据模型(2)中加入的脉冲, 我们分别对食饵在满足  $h_1$  和  $h_2$  时的单边状态反馈脉冲(3)和(4)进行数值模拟。

$x = h_1$  时, 加入脉冲得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{kmxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy \end{aligned} \right\} x > h_1, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= px^* \\ \Delta y &= -\delta_1 y \end{aligned} \right\} x = h_1, 0 < y < \frac{mh_1(1+ch_1) - (a-bh_1)(\alpha + \beta h_1)}{(a-bh_1)\gamma}.$$

$x = h_2$  时, 加入脉冲得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(a-bx)}{1+cx} - \frac{mxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{kmxy}{\alpha + \beta x + \gamma y} - dy \end{aligned} \right\} x < h_2, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -qx^* \\ \Delta y &= \delta_2 y \end{aligned} \right\} x = h_2, y > \frac{mh_1(1+ch_1) - (a-bh_1)(\alpha + \beta h_1)}{(a-bh_1)\gamma}.$$

我们让脉冲集  $M_1$  为  $h_1 = 0.7$ , 其他参数为  $a = 0.8, b = 0.7, c = 0.05, d = 0.5, k = 0.8, \alpha = 0.1, \beta = 0.6, \gamma = 0.9, p = 0.1, \delta_1 = 0.0034$ . 于是脉冲集  $M_1$  和相集  $N_1$  都在平衡点  $E_2$  的右侧, 此时模型为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(0.8-0.7x)}{1+0.05x} - \frac{0.8xy}{0.1+0.6x+0.9y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{0.64xy}{0.1+0.6x+0.9y} - 0.5y \end{aligned} \right\} x > 0.7, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= 0.06141 \\ \Delta y &= -0.0034y \end{aligned} \right\} x = 0.7, 0 < y < \frac{2092}{1395}.$$

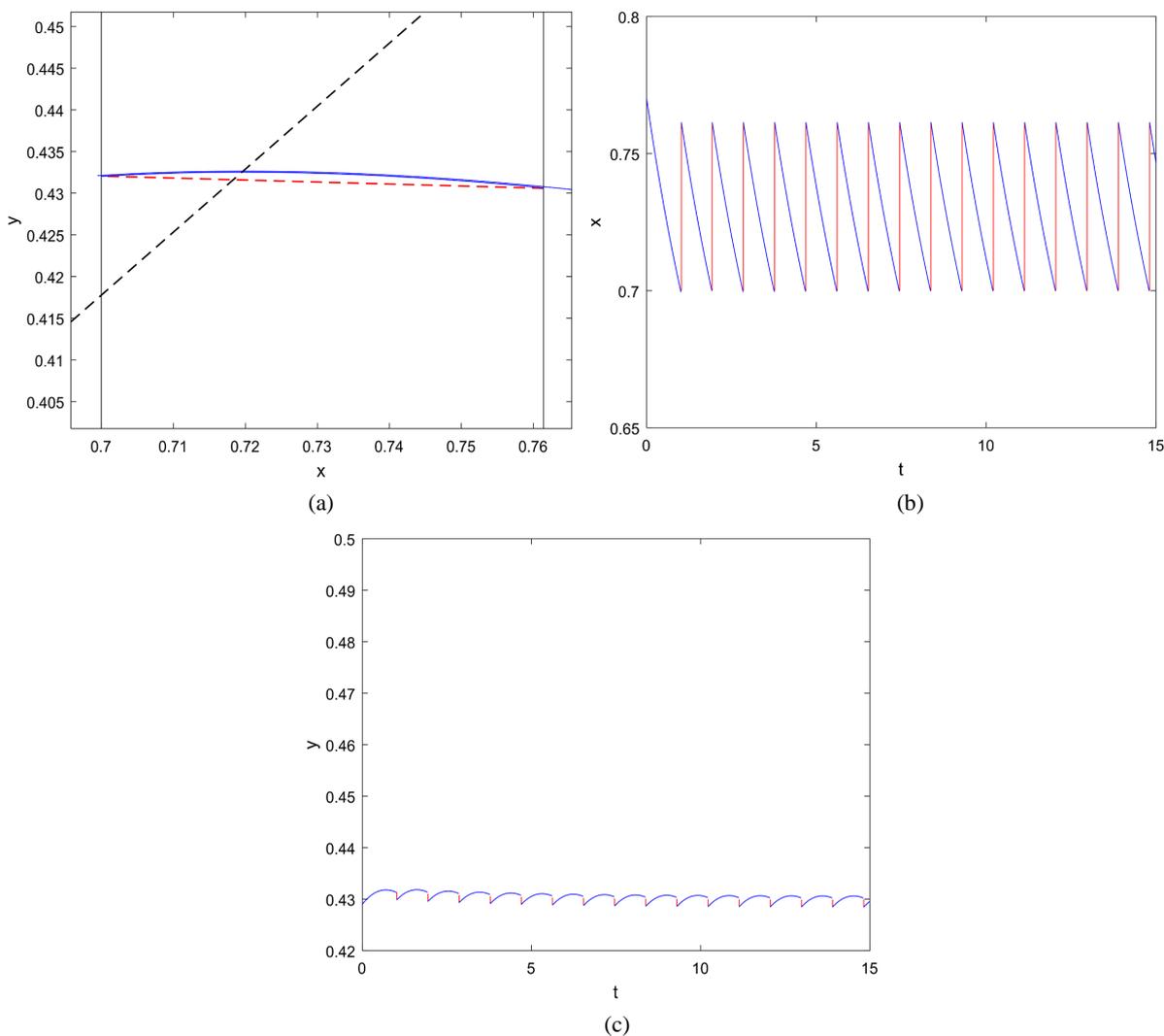
通过 Matlab 进行数值模拟, 得到系统(5)在初值为  $x_0 = 0.77, y_0 = 0.43$  时存在单边的阶一周解且位于平衡点  $E_2$  的右侧(如图 3 所示)。

对模型(4)中的参数, 我们让脉冲集  $M_2$  为  $h_2 = 0.5$ , 相关参数为  $q = 0.3, \delta_2 = 0.14$ , 其他参数与模型(5)相同, 得到模型(6)

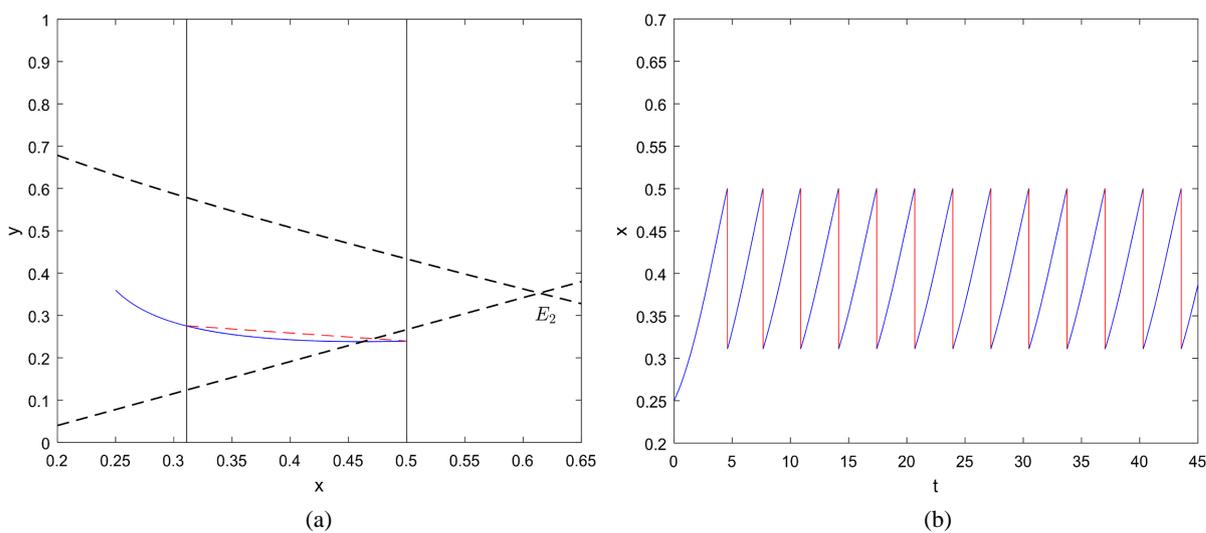
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x(0.8-0.7x)}{1+0.05x} - \frac{0.8xy}{0.1+0.6x+0.9y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{0.64xy}{0.1+0.6x+0.9y} - 0.5y \end{aligned} \right\} x < 0.5, \quad (6)$$

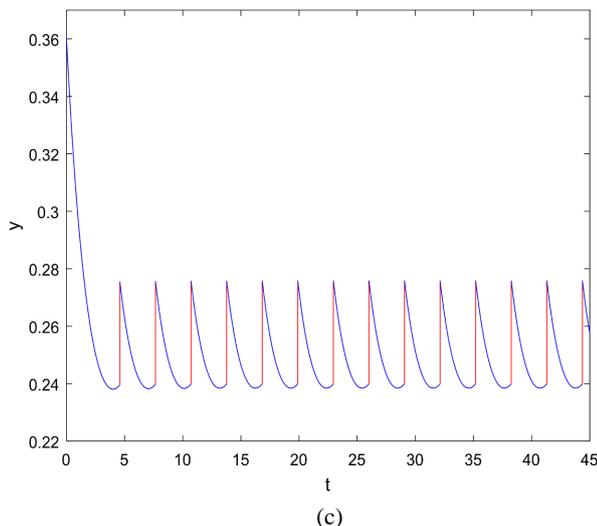
$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -0.18423 \\ \Delta y &= 0.14y \end{aligned} \right\} x = 0.5, y > \frac{2092}{1395}.$$

通过 Matlab 进行数值模拟, 得到系统(6)在初值为  $x_0 = 0.25, y_0 = 0.36$  时存在单边的阶一周解且位于平衡点  $E_2$  的左侧(如图 4 所示)。



**Figure 3.** The unilateral order-1 periodic solution of system (5) and time series of  $x$  and  $y$   
**图 3.** 模型(5)的单边阶一周期解和关于  $x$  和  $y$  的时间序列图





**Figure 4.** The unilateral order-1 periodic solution of system (6) and time series of  $x$  and  $y$   
**图 4.** 模型(6)的单边阶一周解和关于  $x$  和  $y$  的时间序列图

### 3.2. 双边状态反馈脉冲

对模型(2)中的参数,我们让脉冲集  $M_1, M_2$  分别为  $h_1 = 0.4, h_2 = 0.8$ , 相关参数为  $\delta_1 = 0.925, \delta_2 = 16.4$ , 其他参数与模型(5)相同, 得到模型(7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{x(0.8-0.7x)}{1+0.05x} - \frac{0.8xy}{0.1+0.6x+0.9y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{0.64xy}{0.1+0.6x+0.9y} - 0.5y \end{array} \right\} 0.4 < x < 0.8,$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = \frac{2141}{6141} \\ \Delta y = -0.925y \end{array} \right\} x = 0.4,$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = -\frac{1859}{6141} \\ \Delta y = 16.4y \end{array} \right\} x = 0.8. \tag{7}$$

通过 Matlab 进行数值模拟, 得到系统(7)在初值为  $x_0 = 0.7, y_0 = 0.07$  时存在双边的阶一周解(如图 5 所示)。

对模型(2)中的参数,我们让两个脉冲集  $M_1, M_2$  的值分别为  $h_1 = 0.3, h_2 = 0.9$ , 两个脉冲的相关参数为  $p = 0.5, q = 0.2, \delta_1 = 0.927, \delta_2 = 29$ , 其他参数与模型(5)相同, 于是得到模型(8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{x(0.8-0.7x)}{1+0.05x} - \frac{0.8xy}{0.1+0.6x+0.9y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{0.64xy}{0.1+0.6x+0.9y} - 0.5y \end{array} \right\} 0.3 < x < 0.9,$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = 0.30705 \\ \Delta y = -0.927y \end{array} \right\} x = 0.3,$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = -0.12282 \\ \Delta y = 29y \end{array} \right\} x = 0.9. \tag{8}$$

通过 Matlab 进行数值模拟, 得到系统(8)在初值为  $x_0 = 0.7$ ,  $y_0 = 0.06$  时存在双边的阶一周期解(如图 6 所示)。

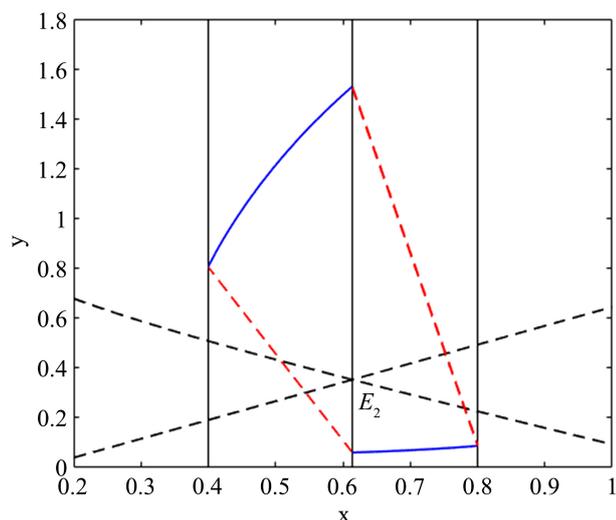


Figure 5. There exists an unilateral order-1 periodic solution of system (7)

图 5. 模型(7)存在双边阶一周期解

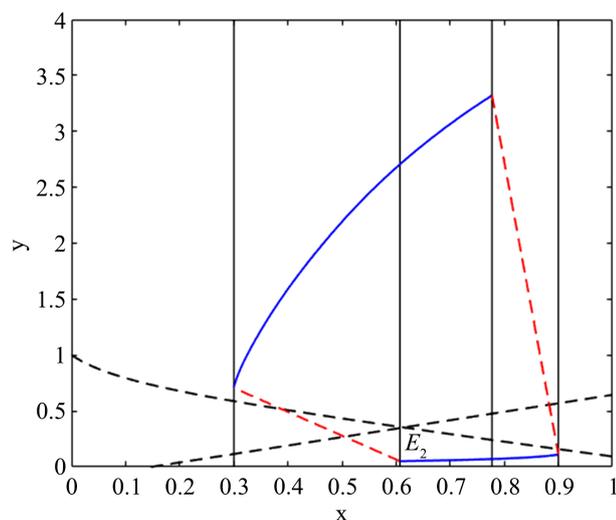


Figure 6. There exists an unilateral order-1 periodic solution of system (8)

图 6. 模型(8)存在双边阶一周期解

#### 4. 结论

害虫不仅危害农作物的生长, 给人们造成经济损失, 而且一些害虫也会有传播疾病的风险, 这大大威胁了人们的身体健康和财产安全, 因此对害虫进行防治是十分有意义的。本文通过对叶螨和其天敌捕植螨之间的关系构建的模型加入脉冲控制, 当食饵的规模减少到阈值  $h_1$  时, 此时害虫的数量对农作物产生的影响很小, 为了节省成本同时也避免其天敌会由于食物不足以维持其生长和繁殖从而危害其他动物, 造成不必要的影响, 因此收走一部分天敌; 当食饵的规模增加到阈值  $h_2$  时, 此时天敌的数量已不足以控制叶螨, 此时投放一定数量的捕植螨来对叶螨进行捕杀, 通过建立双边状态反馈脉冲模型来保证叶螨与

捕植螨能够在一定范围内达到平衡状态, 既防治了害虫又可以节省人力物力财力。同时也通过用 Matlab 进行数值模拟得到针对两组不同的脉冲系数, 系统(7)分别在  $x_0 = 0.7$ ,  $y_0 = 0.07$  和  $x_0 = 0.7$ ,  $y_0 = 0.06$  时存在阶一周周期解, 从而更好地将这个想法进行了验证。

## 参考文献

- [1] Gakkhar, S. and Singh, A. (2012) Complex Dynamics in a Prey Predator System with Multiple Delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 914-929. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.05.047>
- [2] Pimentel, D. (2007) Area-Wide Pest Management: Environmental, Economic and Food Issues. Area-Wide Control of Insect Pests: From Research to Field Implementation. Springer Netherlands, 35-47.
- [3] Yu, R., Xu, X., Liang, Y., Tian, H., Pan, Z., Jin, S., et al. (2014) The Insect Ecdysone Receptor Is a Good Potential Target for RNAi-Based Pest Control. *International Journal of Biological Sciences*, **10**, 1171-1180. <https://doi.org/10.7150/ijbs.9598>
- [4] Liu, H. (2004) Improved Singular Value Decomposition Technique for Detecting and Extracting Periodic Impulse Component in a Vibration Signal. *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition)*, **17**, 340. <https://doi.org/10.3901/cjme.2004.03.340>
- [5] Li, Y. and Yang, B. (2002) The Chaotic Detection of Periodic Short-Impulse Signals under Strong Noise Background. *Journal of Electronics (China)*, **19**, 431-433. <https://doi.org/10.1007/s11767-002-0078-z>
- [6] 刘衍胜, 基建刚, 傅希林. 具有固定时刻脉冲的微分系统的吸引性[J]. 中国学术期刊文摘, 2000, 6(11): 1378-1379.
- [7] 杨慧子. 固定时刻脉冲随机微分方程的收敛性和稳定性[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014: 5-16.
- [8] Wei, C. and Chen, L.A. (2012) Leslie-Gower Pest Management Model with Impulsive State Feedback Control. *Journal of Biomathematics*, **27**, 1-10.
- [9] Ji, X., Yuan, S. and Chen, L. (2015) A Pest Control Model with State-Dependent Impulses. *International Journal of Biomathematics*, **8**, 1550009. <https://doi.org/10.1142/s1793524515500096>
- [10] 刘娟. 具有状态脉冲效应的害虫防治模型[J]. 山西农业大学学报(自然科学版), 2017, 37(3): 173-176+188.
- [11] 程惠东, 尹佐元, 刘洪霞. 具有状态脉冲效应的阶段结构的害虫防治模型动力性分析[J]. 应用数学, 2012, 25(4): 816-823.
- [12] Yan, S., Wei, J. and Lian, Y.G. (2014) Pest Management Model with Impulsive State Feedback Control. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, **15**, 281-286.
- [13] 陈兰荪, 程惠东. 害虫综合防治建模驱动“半连续动力系统理论”兴起[J]. 数学建模及其应用, 2021, 10(1): 1-16.