Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(8), 3936-3944**
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138375

黎曼流形上一类非线性薛定谔方程的曲线集中现象

席芳娟

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2024年7月21日；录用日期：2024年8月13日；发布日期：2024年8月22日

摘 要

本文主要考虑如下非线性薛定谔方程

$$\varepsilon^2\Delta_g u - V(y)u + Q(y)u^p = 0, \quad u>0,\ u\in H^1(\mathcal{M})$$

其中$p>1$, $\varepsilon>0$ 足够小，$(\mathcal{M},g)$ 是$\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ 中二维无边界的紧致黎曼流形。假设Γ 是相对于加权泛函$\int_\Gamma V^\sigma Q^{\frac{1}{2}-\sigma}$ 静止和非退化的闭合曲线，这里$\sigma=\frac{p+1}{p-1}-\frac{1}{2}$，在对函数$V(y)$ 和$Q(y)$ 加上某些限制的情况下，当$\varepsilon\to 0$ 且远离某些特定值时，方程的解存在且集中在曲线Γ 附近，并且在曲线的任何领域外是指数衰减的。

关键词

非线性薛定谔方程，黎曼流形，集中现象

Concentration Phenomena on Curves for Nonlinear Schrödinger Equations on Riemannian Manifolds

Fangjuan Xi

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

文章引用: 席芳娟. 黎曼流形上一类非线性薛定谔方程的曲线集中现象[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3936-3944.
DOI: 10.12677/aam.2024.138375

Received: Jul. 21^{st}, 2024; accepted: Aug. 13^{th}, 2024; published: Aug. 22^{nd}, 2024

Abstract

In this paper, we mainly consider the following nonlinear Schrödinger Equation

$$\varepsilon^2\Delta_g u - V(y)u + Q(y)u^p = 0, \quad u > 0,\ u \in H^1(\mathcal{M}),$$

where $p > 1$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $(\mathcal{M}, g)$ is a compact smooth 2-dimensional Riemannian manifold without boundary in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. Let Γ be a closed curve, nondegenerate geodesic relative to the weighted arc length $\int_\Gamma V^\sigma Q^{\frac{1}{2}-\sigma}$, where $\sigma = \frac{p+1}{p-1} - \frac{1}{2}$. Under some constraints for V (y) and Q (y), we prove the existence of a solution u_ε concentrating along the whole of Γ, exponentially small in ε at any positive distance from it, provided that ε is small and away from certain critical numbers.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Riemannian Manifolds,

Concentration Phenomena

1. 引言

近些年, 非线性薛定谔方程的集中现象在偏微分方程领域广受关注, 具有很大的研究价值. 非线性薛定谔方程的一般形式如下:

$$-i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta\psi - K(y)\psi + |\psi|^{p-1}\psi, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

其中$p > 1$, 方程的驻波解具有$\psi(t,y) = \exp(i\lambda\varepsilon^{-1})u(y)$ 形式. 假设振幅$u(y)$ 是正的, 并且在无穷远

处衰减为0, 则ψ 满足方程(1) 等价于u 是如下方程的解:

$$\varepsilon^2\Delta u - Vu + u^p = 0, \quad u > 0,\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2}$$

这里$V(x) = K(y) + \lambda$. 我们假设V 光滑函数且$\inf\limits_{y\in\mathbb{R}^N} V(y) > 0$.

在过去几十年, 方程(2) 的集中现象被广泛研究. 在开拓性工作 [1]中, Floer 和Weinstein 构造了方程(2) 的正解, 当$p = 3$ 和$N = 1$ 时, 驻波解集中在$V(y)$ 的非退化临界点y_0 附近，并且在y_0 的任何邻域之外是指数衰减的. 更准确地说, 他们证明了u_ε 的存在性, 以及$u_\varepsilon \sim V(y_o)^{\frac{1}{p-1}} w(V(y_o)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-1}(y-y_0))$, 其中$w$ 是下面方程的唯一解：

$$w'' - w + w^p = 0, \quad w > 0,\ w'(0) = 0,\ w(\pm\infty) = 0. \tag{3}$$

之后, 许多作者将这一结果扩展到更高的维度上, 并假设在各种势能和非线性的条件下，研究空间上驻波解在单点或多点附近的集中现象，如 [2–8]所述.

更进一步地, 当$N = 2$ 和Γ 相对于加权泛函$\int_\Gamma V^\sigma$ 是静止和非退化的曲线时, Del Pino, Kowalczyk 和Wei 在文献 [9]中证明了当$\varepsilon \to 0$ 且远离某些特定值时方程(2) 的解集中在曲线Γ 附近, 并且在曲线的任何领域$B_\varepsilon(\Gamma)$ 外是指数衰减的.

受论文 [9]启发, 我们将在$(\mathcal{M}, g)$ 上研究带有势能函数$Q(y)$ 的非线性薛定谔方程:

$$-i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta_g\psi - K(y)\psi + Q(y)\left|\psi\right|^{p-1}\psi, \quad y \in \mathcal{M}, \tag{4}$$

其中$p > 1$, $(\mathcal{M}, g)$ 是$\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ 中二维无边界的紧致黎曼流形, 方程的驻波解具有$\psi(t, y) = \exp(i\lambda\varepsilon^{-1})u(y)$ 形式. 同理, 我们得到$u(x)$ 满足方程

$$\varepsilon^2\Delta_g u - V(y)u + Q(y)u^p = 0, \quad u > 0,\ u \in H^1(\mathcal{M}). \tag{5}$$

假设Γ 是黎曼流形$\mathcal{M}$ 上的光滑闭合曲线以及其弧长为ℓ. 我们考虑$\gamma(\theta)$ 是曲线Γ 带有正方向的自然参数方程, 这里θ 表示曲线Γ 的弧长参数. $\{\nu(\theta), \gamma'(\theta)\}$ 是切平面$T_{\gamma(\theta)}\mathcal{M}$ 的标准正交基, 则曲线Γ 附近的点y 可以表示为

$$y = \exp_{\gamma(\theta)}(t\nu(\theta)) \tag{6}$$

的形式, 这里$|t| < \delta_0,\ \theta \in [0, \ell)$.

根据文献 [3]中的定义, Γ 相对于加权泛函$J(\Gamma) = \int_\Gamma V^\sigma Q^{\frac{1}{2}-\sigma}$ 是静止和非退化的曲线等价于在Γ 上的一阶变分等于0, 以及二阶变分是非奇异的. 设$k(\theta)$, $K(\theta)$ 分别表示曲线Γ 的曲率, 黎曼流形$\mathcal{M}$ 的高斯曲率. 为方便起见, $V(y), Q(y)$ 分别记为$V(t, \theta)$ 与$Q(t, \theta)$, 点y 按照(6) 定义给出. 同时我们对函数$Q(y)$ 加上限制$Q_t(0, \theta) = 0$.

因而, 一阶变分等于0 等价于

$$\sigma V_t(0, \theta) = -k(\theta)V(0, \theta). \tag{7}$$

二阶变分是非奇异的等价于微分方程

$$h'' + [\sigma V^{-1}V_\theta + (\frac{1}{2}-\sigma)Q^{-1}Q_\theta]h' - [\sigma V^{-1}V_{tt} + (\frac{1}{2}-\sigma)Q^{-1}Q_{tt} - (\sigma^{-1}+1)k^2 - K(\theta)]h = 0, \quad (8)$$

$$h(0) = h(\ell), \quad h'(0) = h'(\ell) \quad (9)$$

只有零解.

2. 主要结果

假设函数$V(y)$ 和$Q(y)$ 满足以下条件:

(a) $V(y) \in C^\infty(\mathcal{M})$ 且 $\inf\limits_{y\in\mathcal{M}} V(y) > 0$;

(b) $Q(y) \in C^\infty(\mathcal{M})$ 且 $\inf\limits_{y\in\mathcal{M}} Q(y) > 0$;

(c) $Q_t(0,\theta) = 0$;

(d) 存在$0 < \delta \ll 1$ 使得

$$Q(y) \le Ce^{\delta|y|}.$$

下面给出本文的主要结果:

定理1. $\mathcal{M}$ 是$\mathbb{R}^N$ $(N \ge 3)$ 中二维无边界的紧致黎曼流形. 假定Γ 是相对于加权泛函

$$\int_\Gamma V^\delta Q^{\frac{1}{2}-\delta}$$

静止和非退化的曲线, 函数V 满足(a) 以及Q 满足$(b)-(d)$, 并且存在常数$\lambda_* > 0$, 对给定的$c > 0$, 存在$\varepsilon_0 > 0$ 使对一切$\varepsilon < \varepsilon_0$, 满足间距条件:

$$\left|k^2\varepsilon^2 - \lambda_*\right| \ge c\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

则方程(5) 在曲线Γ 附近具有局部正解u_ε, 对于按照(6) 定义的y, $u_\varepsilon(y)$ 的表达形式可写作

$$u_\varepsilon(y) = (\frac{V(0,\theta)}{Q(0,\theta)})^{\frac{1}{p-1}} w(V(0,\theta)^{\frac{1}{2}}\frac{t}{\varepsilon})(1+o(1)). \quad (11)$$

此外, 存在$c_0 > 0$, 使$u_\varepsilon(y)$ 在全局上满足

$$u_\varepsilon(y) \le \exp(-c_0\varepsilon^{-1}\mathrm{dist}(\mathrm{y},\Gamma)).$$

3. 预备知识

定义1. (黎曼流形) 设M 是一个n 维光滑流行. 对每点$p \in M$, 在点p 的切空间T_pM 上定义一个对称正定双线性形$\langle \cdot, \cdot \rangle$. 这个对应在下列意义下是光滑的: 存在点$p$ 附近的坐标领域U. 它的坐标是$(x_1, \cdots, x_n)$, 以$\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, m$, 表示坐标曲线的切向量. 定义它们间的内积为$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$. 光滑性意味着所有$g_{ij}$ 在U 中是光滑的. 这就在M 中定义了Remannian 度量, 从而它成为了一个Remannian 流行.

命题1. (指数映射) 设$p \in M$, 且对$v \in T_p(M)$, $\exp_p(v)$ 是有意义的. 则存在充分小的$\delta_0 > 0$, 使得对于任意$t \in (-\delta_0, \delta_0)$, $\exp_p(tv)$是有定义的. 并且$\gamma(t) = \exp_p tv$ 是测地线, 它满足条件:

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v.$$

注意, 给定$p \in M$, 则存在$\varepsilon > 0$, 使得映射$\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to M$ 是$B_\varepsilon(0)$ 与M 上的一个开子集间的微分同胚.

引理1. w 是满足方程(3) 的唯一解, 则下面等式恒成立:

$$\int_{\mathbb{R}} w^2 dx = 2\sigma \int_{\mathbb{R}} w_x^2 \mathrm{d}x, \quad 其中\ \sigma = \frac{p+1}{p-1} - \frac{1}{2}. \tag{12}$$

证明. 因为w 满足(2)式, 所以有

$$w_x^2 = w^2 - \frac{2}{p+1} w^{p+1},$$

即

$$\int_{\mathbb{R}} (w_x^2 + \frac{2}{p+1} w^{p+1}) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} w^2 \mathrm{d}x.$$

对(2)式左右两边乘上w, 两边积分后再分部积分后得到

$$\int_{\mathbb{R}} (w_x^2 + w^2) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} w^{p+1} \mathrm{d}x.$$

由上两式可消除w^{p+1}, 得

$$\int_{\mathbb{R}} w^2 dx = \frac{p+3}{p-1} \int_{\mathbb{R}} w_x^2 \mathrm{d}x.$$

证毕.

4. 主要结果的证明

首先, 我们构造方程的局部逼近解, 逼近解中含有一些可调整的参数函数. 将定义在曲线Γ 附近的局部变量(t, θ) 拉伸为$(s, z) = \varepsilon^{-1}(t, \theta)$, 则方程(5) 转化为

$$u_{zz} + u_{ss} + B_1(u) - V(\varepsilon s, \varepsilon z) u + Q(\varepsilon s, \varepsilon z) u^p = 0, \tag{13}$$

其中$|s| \le \frac{\delta}{\varepsilon}$, u 关于变量z 是以$\ell\varepsilon^{-1}$ 为周期的, 另外

$$B_1(u) = \left[\frac{1}{(1+\varepsilon k(\varepsilon z)s)^2 - \varepsilon^2 K(\varepsilon z)s^2 + O(\varepsilon^3)} - 1\right] u_{zz}$$

$$+ \frac{\varepsilon k(\varepsilon z)(1+\varepsilon k(\varepsilon z)s) - \varepsilon^2 K(\varepsilon z)s + O(\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon k(\varepsilon z)s)^2 - \varepsilon^2 K(\varepsilon z)s^2 + O(\varepsilon^3)} u_s$$

$$- \frac{2\varepsilon^2 k'(\varepsilon z)(1+\varepsilon k(\varepsilon z)s)s - \varepsilon^3 K'(\varepsilon z)s^2 + O(\varepsilon^4)}{2\left[(1+\varepsilon k(\varepsilon z)s)^2 - \varepsilon^2 K(\varepsilon z)s^2 + O(\varepsilon^3)\right]^2} u_z.$$

接下来, 我们再次进行变量替换: 给定一个以ℓ 为周期的函数$f(\theta)$, 令

$$u(s,z) = \alpha(\varepsilon z)v(x,z), \quad x = \beta(\varepsilon z)(s - f(\varepsilon z)), \tag{14}$$

这里

$$\alpha(\theta) = \left(\frac{V(0,\theta)}{Q(0,\theta)}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \beta(\theta) = V(0,\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

于是, 方程(13) 变为

$$S(v) = B_2(v) + \beta^{-2}v_{zz} + v_{xx} + v^p - v = 0. \tag{15}$$

这里$B_2(v)$ 是一个线性微分算子, 它是由B_1 中关于新变量的导函数, $V(\varepsilon s, \varepsilon z) - V(0, \varepsilon z)$ 和$Q(\varepsilon s, \varepsilon z) - Q(0, \varepsilon z)$ 三部分组成. 容易看出算子B_2 的所有项至少含有ε 的一次因子. 在新的坐标系(x, z) 中, 我们取$w(x)$ 作为第一次逼近, 得到误差$E_0 = S(w) = O(\varepsilon)$. 在减小误差之前, 我们精确地得到$E_0$ 中含有ε 的一次项

$$E_1 = \varepsilon\beta^{-1}[kw_x - \beta^{-2}V_t(0,\varepsilon z)xw] - \varepsilon\beta^{-2}V_t(0,\varepsilon z)fw.$$

结合条件(7) 和引理1 推导出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_1 w_x(x)\mathrm{d}x = 0.$$

根据Fredholm 定理, 如下方程有唯一解$\phi = \varepsilon w_1$:

$$-\phi_{xx} + \phi - pw^{p-1}\phi = E_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w_x\phi\mathrm{d}x = 0.$$

显然, $S(w + \varepsilon w_1) = O(\varepsilon^2)$. 为了构造一个完整的逼近, 我们需要再引进一个参数. 我们考虑一个新的周期函数$e(\theta)$ 和曲线附近的逼近

$$\mathrm{w} = w + \varepsilon w_1 + \varepsilon e(\varepsilon z)Z.$$

这里Z 是特征值问题

$$Z'' + pw^{p-1}Z - Z = \lambda_0 Z, \quad Z \in L^2(\mathbb{R})$$

的主特征函数. 我们研究方程(13) 的解具有$v=\phi+\mathrm{w}$ 形式. 假设(f,e) 的配置空间为

$$\Lambda:=\left\{(f,e)\left|\begin{array}{l}\|f\|_a\equiv\|f\|_{L^\infty(0,\ell)}+\|f'\|_{L^\infty(0,\ell)}+\|f''\|_{L^2(0,\ell)}\leq\varepsilon^{\frac{1}{2}},\\ \|e\|_b\equiv\varepsilon^2\|e''\|_{L^2(0,\ell)}+\varepsilon\|e'\|_{L^2(0,\ell)}+\|e\|_{L^\infty(0,\ell)}\leq\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{array}\right.\right\}. \tag{16}$$

原则上, 上述表达式只有当$|x|<2\delta\varepsilon^{-1}$ 时有意义. 然而, 借助截断函数我们可以将w 和ϕ 定义在整个带形区域$\mathcal{S}=\mathbb{R}\times[0,\ell\varepsilon^{-1}]$. 现设$\chi\left(|x|\,\varepsilon^{-1}\right)$ 是一个光滑的截断函数, 并且满足$\chi(t)=1,\ t<\delta$, $\chi(t)=0,\ t>2\delta$. 下面研究关于ϕ 的周期边界问题:

$$L(\phi)=\chi E+N(\phi),\quad \phi\in H^2(\mathcal{S}). \tag{17}$$

这里

$$\begin{aligned}&L(\phi)=\beta^{-2}\phi_{zz}+\phi_{xx}+p\mathrm{w}^{p-1}\phi-\phi+\chi B_2(\phi),\\ &N(\phi)=\chi\left[(\mathrm{w}+\phi)^p-\mathrm{w}^p-p\mathrm{w}^{p-1}\phi\right].\end{aligned} \tag{18}$$

当$|x|<\delta\varepsilon^{-1}$ 时, 上述周期边界问题归结为(13) 式. 当然, 在全空间上方程(17) 并不等价于原方程, 但是运用gluing 优化方法可以使之等价(gluing 优化方法参考文献1001[9]) .

现考虑如下的投影问题: 给定参数$(f,e)\in\Lambda$, 存在$\phi\in H^2(\mathcal{S})$, $c,d\in L^2(0,\ell)$ 使得

$$L(\phi)=\chi E+N(\phi)+c(\varepsilon z)\chi w_x+d(\varepsilon z)\chi Z\quad \phi\in\ H^2(S), \tag{19}$$

$$\phi(x,0)=\phi(x,\ell/\varepsilon),\quad \phi_z(x,0)=\phi_z(x,\ell/\varepsilon),\quad -\infty<x<+\infty, \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z)w_x(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z)Z(x)dx=0,\quad 0<z<\frac{\ell}{\varepsilon}. \tag{21}$$

这里$E=S(\mathrm{w})$. 正交条件使得算子L 在$L^2(\mathcal{S})-H^2(\mathcal{S})$ 下具有一致有界的逆. 通过分析误差的大小及形式和运用压缩映射原理知, 存在$D>0$, 使得对于任意足够小的ε 和任意满足$(f,e)\in\Lambda$, 问题(19), (20) 有唯一解$\phi=\phi(f,e)$, 并且$\|\phi\|_{H^2(\mathcal{S})}\leq D\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. 最后, 建立关于$(f,e)$ 的方程使得系数c,d 恒等于0. 这仅需分别对方程(19) 乘上w_x 和Z, 再关于变量x 分部积分. 分部积分后, 利用ϕ 的正交条件, 我们得到$(c,d)\equiv0$ 等价于(f,e) 满足如下形式:

$$\mathcal{L}_1(f):\equiv f''+\gamma_1f'+\gamma_2f=\gamma_3e+\varepsilon^2\gamma_4e''+\varepsilon M_{1\varepsilon}(f,e), \tag{22}$$

$$\mathcal{L}_2(e):\equiv\varepsilon^2\left(\beta^{-2}e''+\gamma_6e'\right)+\lambda_0e=\varepsilon^3\mu\gamma_5e''+\varepsilon\gamma_7+\varepsilon^2M_{2\varepsilon}(f,e). \tag{23}$$

这里$\gamma_i(\theta)$ 是以ℓ 为周期的光滑函数. 对于$(f,e)\in\Lambda$, 算子$M_{1\varepsilon}$ 和$M_{2\varepsilon}$ 在$L^2(0,\ell)$ 上是一致有界的. 此外, 固定ε, $M_{1\varepsilon}$ 和$M_{2\varepsilon}$ 定义为紧算子. 计算$\gamma_1(\theta)$ 和$\gamma_2(\theta)$, 我们发现$\gamma_1(\theta)$, $\gamma_2(\theta)$ 分别对应等式(8) 左边的系数. 因此算子$\mathcal{L}_1$ 在周期边界条件下是可逆的, 并且在$L^2(\mathcal{S})-H^2(\mathcal{S})$ 下具有有界的逆. 算子$\mathcal{L}_2(e)$ 在周期边界条件下也是可逆的: 假设$\lambda_*=\lambda_0\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^\ell V(0,\theta)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\theta\right)^2$, 根据(10) 和周期

性Sturm-Liouvile 算子特征值的渐近分析(可参考文献 [10]), 可推导出算子$\mathcal{L}_2$ 的可逆性. 更准确地说, 对于$e = \mathcal{L}_2^{-1}(d)$, 下面估计式是成立的:

$$\varepsilon^2 \|e''\|_2 + \varepsilon \|e'\|_2 + \|e\|_2 \leq C\varepsilon^{-1} \|d\|_2, \quad \|e\|_\infty \leq C [\|d\|_2 + \|d'\|_2].$$

运用这些估计式, 对于可逆算子$\mathcal{L}_1$ 和$\mathcal{L}_2$, 我们可以构造一个包含(16) 的不变区域. 根据Schauder 不动点定理, 我们完成了主要结果的证明.

5. 总结和展望

关于集中问题已有较为丰富的结果, 特别是在欧式空间上. 为此, 本文在二维黎曼流行上研究普遍的薛定谔方程的集中现象, 更具挑战性. 笔者将进一步研究关于非线性耦合方程组的集中现象.

参考文献

[1] Floer, A. and Weinstein, A. (1986) Nonspreading Wave Packets for the Cubic Schrödinger Equation with a Bounded Potential. *Journal of Functional Analysis*, **69**, 397-408. https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90096-0

[2] Ambrosetti, A., Badiale, M. and Cingolani, S. (1997) Semiclassical States of Nonlinear Schrödinger Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **140**, 285-300. https://doi.org/10.1007/s002050050067

[3] Ambrosetti, A., Malchiodi, A. and Secchi, S. (2001) Multiplicity Results for Some Nonlinear Schrödinger Equations with Potentials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **159**, 253-271. https://doi.org/10.1007/s002050100152

[4] Byeon, J. and Wang, Z.-Q. (2002) Standing Waves with a Critical Frequency for Nonlinear Schrödinger Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **165**, 295-316. https://doi.org/10.1007/s00205-002-0225-6

[5] Cingolani, S. and Lazzo, M. (2000) Multiple Positive Solutions to Nonlinear Schrödinger Equations with Competing Potential Functions. *Journal of Differential Equations*, **160**, 118-138. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3662

[6] del Pino, M. and Felmer, P. (1996) Local Mountain Passes for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **4**, 121-137. https://doi.org/10.1007/s005260050031

[7] del Pino, M. and Felmer, P.L. (1997) Semi-Classical States for Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Functional Analysis*, **149**, 245-265. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3085

[8] Gui, C. (1996) Existence of Multi-Bump Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations via Variational Method. *Communications in Partial Differential Equations*, **21**, 787-820. https://doi.org/10.1080/03605309608821208

[9] Del Pino, M., Kowalczyk, M. and Wei, J.-C. (2007) Concentration on Curves for Nonlinear Schrödinger Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 113-146. https://doi.org/10.1002/cpa.20135

[10] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. (1991) Sturm-Liouville and Dirac Operators. In: *Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*, Vol. 59, Kluwer Academic Publishers Group. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3748-5