Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(12), 5267-5291**
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212517

带时间依赖记忆核和非局部扩散的热传导方程解的长时间行为

黄晶朋，汪 璇*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月25日；录用日期：2023年12月19日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

本文分析了带时间依赖记忆核和非局部扩散的热传导方程解的长时间行为。当非线性项满足次临界增长条件时，在时间依赖空间 $H_0^1(\Omega) \times L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ 中，首先利用 **Galerkin** 逼近法得到了解的适定性和正则性，进而利用分解技巧和积分估计法证明了时间依赖全局吸引子的存在性。

关键词

非局部反应扩散方程，时间依赖记忆核，适定性，时间依赖全局吸引子，存在性

Long-Term Behavior of Heat Conduction Equation Solutions with Time-Dependent Memory and Non-Local Diffusion

Jingpeng Huang, Xuan Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 25^{th}, 2022; accepted: Dec. 19^{th}, 2023; published: Dec. 29^{th}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 黄晶朋, 汪璇. 带时间依赖记忆核和非局部扩散的热传导方程解的长时间行为[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 5267-5291. DOI: 10.12677/aam.2023.1212517

Abstract

In this paper,we analysize the long-time behavior of solutions for the non-local diffusion equation with time-dependent memory kernel. When nonlinear term adheres to subcritical growth condition and in the time-dependent space $H_0^1(\Omega)\times L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$, by use of the Galerkin approximation method, the well-posedness and the regularity of the solution arise achieved. And then the existence of the time-dependent global attractors is proved by applying the delicate integral estimation method and decomposition technique.

Keywords

Non-Local Reaction Diffusion Equation, Time-Dependent Memory Kernel, Well-Posed-Ness, Time-Dependent Global Attractors, Existence

1. 引言

本文研究了带时间依赖记忆核和非局部扩散热传导方程解的渐近行为:

$$\begin{cases} \partial_t u - a(l(u))\Delta u - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} h_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s + f(u) = g(x), & x\in\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,\tau)=u_\tau(x,t), & x\in\Omega,\ t\leqslant\tau, \end{cases} \tag{1.1}$$

由于动力系统的演变既取决于当前状态, 又取决于整个历史 (见文献 [1–3] 及其引用), 因此历史记忆对动力系统演变会产生显著地影响. 当方程中的记忆项依赖于时间 t 时, 表示黏弹性材料的黏性随着时间的流逝会逐渐消失, 即出现老化现象, 如橡胶, 塑胶材料等. 近些年来, 为了更好的模拟现实生活中种群的行为, 如扩散、聚集、生长及对食物和资源的竞争, 人们提出了具有非局部项的反应扩散系统. 对于非局部扩散项的研究, Chipot 在文献 [4]中探究了带有非局部项 $a(\int_\Omega u)$ 的抛物边值问题, 且利用 Brouwer 不动点定理证明了解的存在性, 在文献 [5]中将非局部项拓展到了更一般的非

局部算子 $a(l(u))$, 其中 $l \in \mathcal{L}(L^2(\Omega);\mathbb{R})$. 徐娇辉在文献 [6]中利用 Galerkin 逼近法和能量估计研究了带有时滞和记忆的非自治非局部偏微分方程的动力学行为. 以上研究工作表明动力系统中带有非局部扩散项可以更好地描述许多实际问题, 进而方程 (1.1) 引起了广大学者的研究兴趣.

在一些与记忆材料相关的物理问题的推动下, 一般具有长时间记忆的偏微分方程已经获得了丰富的研究成果. 例如, Giorig 在文献 [3]中引入了一个半线性偏微分方程:

$$\begin{cases} c_0\partial_t u - k_0\Delta u - \int_{-\infty}^{t} k(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s + f(u) = h, & x\in\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,\tau+t)=u_0(x,t), & x\in\Omega,\ t\le 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

通过研究相关的稳态问题得到了解的长时间行为. 进一步在问题 (1.2) 中, 作者对函数 $g(\cdot,\cdot)$ 重新做定义使变量 u 成为外力项的一部分进而得到下述方程:

$$\begin{cases} c_0\partial_t u - k_0\Delta u - \int_{\tau}^{t} k(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s + f(u) = g, & x\in\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>\tau, \\ u(x,\tau)=u_0(x,0), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $g(x,t)=h(x,t)+\int_{-\infty}^{\tau} k(t-s)\Delta u_0(x,s)\mathrm{d}s, x\in\Omega,\ t>\tau$.然而由于方程 (1.3) 依赖过去的历史变量且需要在时间 τ 上固定一个初值, 因此该问题不能在适当的相空间中产生一个动力系统. 为了解决此类问题, 找到了两种转换方案.

第一种是 Dafermos 在文献 [7]中提出的黏弹性的思想和其使用的方法, 首先定义新的变量:

$$u^t(x,s)=u(x,t-s),\quad s\leqslant 0,\ t\leqslant\tau$$

$$\eta^t(x,s)=\int_0^s u^t(x,r)\mathrm{d}r=\int_{t-s}^{t} u(x,r)\mathrm{d}r,\quad s\leqslant 0,\ t\leqslant\tau$$

此外, 假设 $k(\infty)=0, \mu(s)=-k'(s)$, 则通过分部积分法可得:

$$\int_{-\infty}^{t} k(t-s)\triangle u(s)\mathrm{d}r=\int_0^{\infty}\mu(s)\triangle\eta^t(s)\mathrm{d}s$$

进而使原始方程 (1.3) 变成下述不带时滞的自治系统:

$$\begin{cases} c_0\dfrac{\partial u}{\partial t} - k_0\Delta u - \int_0^{\infty}\mu(s)\triangle\eta^t(s)\mathrm{d}s + f(u) = g, & x\in\Omega,\ t>\tau, \\ \eta_t^t(s) = -\eta_s^t(s)+u(t), & x\in\Omega,\ \ t>\tau,\ \ s\in\mathbb{R}^+, \\ u(x,t)=\eta^t(x,s)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\in\mathbb{R},\ \ s\in\mathbb{R}^+, \\ u(x,\tau)=u_0(x,0), & x\in\Omega, \\ \eta^\tau(x,s)=\eta_0(s), & x\in\Omega,\ \ s\in\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.4}$$

且 (1.4) 中对应初值 $(u_0(0),\eta_0)$ 的解也是 (1.3) 的解. 其中第二分量 η_0 不一定依赖于 $u_0(\cdot)$, 因此可以在合适的相空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中构造一个动力系统, 并证明全局吸引子的存在性. 由于方程 (1.4) 是问题 (1.3) 的推广, 则不能将系统 (1.4) 中吸引子的存在性转移到问题 (1.3) 中.

第二种替代方案来自于一个简单的案例, 当核函数 (非奇异) $k(t)=e^{-d_0t}$, $d_0>0$ 时, 利用该方案证明了文献 [1]中的模型可以在由可测函数 $\varphi:(-\infty,0]$ 给定的相空间 $L^2_{H^1_0}$ 中生成一个具有回拉吸引子的非自治动力系统, 使得当 $\lambda>0$ 时, $\int_{-\infty}^0 e^{\lambda s}\|\varphi(s)\|^2_{H^1_0}\mathrm{d}s<+\infty$. 因此, 当 $k(\cdot)$ 为指数型函数时,可以利用 [1]中的方法证明问题 (1.5) 中吸引子的存在性.

$$\begin{cases} c_0\partial_t u-k_0\Delta u-\displaystyle\int_{-\infty}^t k(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s+f(u)=g, & x\in\Omega,\ \ t>0,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ \ t\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=\varphi(x,t), & x\in\Omega,\ \ t<0. \end{cases}\tag{1.5}$$

然而这种指数型函数可能对核函数 $k(\cdot)$ 以及函数 $\mu(\cdot)$ 会产生很大的限制, 因为在很多情况下后者通常具有奇点. 因此需要设计一种技术用于在相空间 $L^2(\Omega)\times L^2_{H^1_0}$ 中处理带有这种奇异核函数的情况. 即使对于更一般的非局部问题, 也可以通过徐娇辉在文献 [8]中的分析得到相应的结果. 而当文献 [8]中方程的记忆项依赖于时间 t 时, 方程中非局部扩散项, 时间依赖记忆核和时滞时给耗散性估计和紧性验证带来了极大困难, 因此在本文中先考虑不带时滞的情况.

首先, 由于记忆核函数依赖于时间, 定义变量 η^t 的时间导数与以往不同. 其次, 用于含有非时间依赖记忆项方程的经典方法和微分不等式无法进行方程 (1.1) 的耗散性估计和解过程的紧性验证. 为了克服以上困难, 我们借助文献 [9–12] 的观点, 在新的理论框架下, 利用积分估计法以及分解技巧成功克服了估计与证明过程中的实质性难题, 得到了解的适定性和正则性, 进而证明了时间依赖全局吸引子的存在性.

本文的内容框架如下: 第 2 节中回顾了一些初步内容, 符号和空间定义. 第 3 节致力于证明本文的主要结果, 首先证明了带时间依赖记忆核和非局部扩散的热传导方程解的适定性和正则性, 其次证明了时间依赖吸收集的存在性, 最后利用积分估计法证明了时间依赖吸引子的存在性.

2. 准备工作

下述带有时间依赖记忆核的非局部微分方程将是本文要研究的:

$$\begin{cases} \partial_t u-a(l(u))\Delta u-\displaystyle\int_{-\infty}^t h_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x), & x\in\Omega,\ \ t>\tau,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ \ t>\tau,\\ u(x,\tau)=u_\tau(x,t), & x\in\Omega,\ \ t\leqslant\tau, \end{cases}\tag{2.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 上带有正则边界的固定有界域. 函数 $a \in C(R, R^+)$ 是带有利普希茨常数 $L_a(R)$ 的连续利普希茨函数且

$$a(l(u_1)) - a(l(u_2)) \leqslant L_a(R)[l(u_1) - l(u_2)], \quad 0 < m \leqslant a(r), \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

设时间依赖记忆核函数 $h_t(s)$ 是非负的, 凸的且可和的, 并且满足

$$h_t(s) = \int_s^\infty \mu_t(y)\mathrm{d}y, \ \forall s \in \mathbb{R}^+, \ t \in \mathbb{R}.$$

假设 $\mu_t(s) = -\partial_s h_t(s)$, 并且映射 $(t, s) \mapsto \mu_t(s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 且与文献 [9]中 $\mu_t(s)$ 定义相同. 根据文献 [13,14] 的论述, 定义新的历史变量

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \int_0^s u(t-r)\mathrm{d}r, & 0 \leqslant s \leqslant t-\tau, \\ \eta_\tau(s-t+\tau) + \int_0^{t-\tau} u(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau. \end{cases} \tag{2.3}$$

利用 $\mu_t(s) = -\partial_s h_t(s)$ 和 $h_t(\infty) = 0$, 可将方程 (2.1) 可转化为

$$\partial_t u - a(l(u))\Delta u - \int_0^\infty \mu_t(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s + f(u) = g, \tag{2.4}$$

相应初-边值条件为:

$$\begin{cases} u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > \tau, \\ \eta^t(x,s) = 0, & (x,s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \ t > \tau, \\ u(x,\tau) = u_\tau(x,t), & x \in \Omega, \ t \leqslant \tau, \\ \eta^\tau(x,s) = \eta_\tau(x,s), & (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $u(\cdot)$ 满足: 存在两个正常数 R 和$\varrho \leqslant \delta$, 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varrho s}\|\nabla u(-s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant R.$$

假设外力项 $g \in L^2(\Omega)$, 且非线性项 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = 0$, 并且满足

$$|f'(u)| \leqslant C(1 + |u|^2), \quad f'(u) \geqslant C_1, \ \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

其中 $C_1 \geqslant 0, C$ 为正常数. 设 f 满足耗散条件

$$\liminf_{|u|\to\infty} f'(u) > -\lambda_1, \tag{2.7}$$

这里 $\lambda_1 > 0$ 为 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值. 显然, 根据 (2.7) 式知, 存在 $\theta : 0 < \theta \leqslant 1$, 使得

$$\langle f(u), u\rangle \geqslant \langle F(u), 1\rangle - \frac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2 - c_f, \tag{2.8}$$

$$\langle F(u),1\rangle \geqslant -\frac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2 - c_f, \quad \forall\, u\in H_0^1(\Omega), \tag{2.9}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)ds$, $c_f\geqslant 0$.

2.1. 函数空间及符号

参考文献 [15], 用线性算子 A 表示 $-\Delta$ 且定义域 $D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 对于 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{k}{2}})$, $k\in\mathbb{R}$, 赋予其内积与范数

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(A^{\frac{k}{2}})} = \langle A^{\frac{k}{2}}\cdot, A^{\frac{k}{2}}\cdot\rangle,\ \|\cdot\|_{D(A^{\frac{k}{2}})} = \|A^{\frac{k}{2}}\cdot\|,$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的内积与范数.

对于任意的 $k>s$, 有紧嵌入 $D(A^{\frac{k}{2}})\hookrightarrow D(A^{\frac{s}{2}})$, 以及对于所有的 $k\in[0,\frac{n}{2})$, 有连续嵌入 $D(A^{\frac{k}{2}})\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2k}}(\Omega)$.

当 $0\leqslant k\leqslant 3$时, 记 $\mathcal{H}_k=D(A^{\frac{k}{2}})$, $\|\cdot\|_k=\|\cdot\|_{\mathcal{H}_k}=\|\cdot\|_{D(A^{\frac{k}{2}})}$, 则在本文中用 $\mathcal{H}$ 表示 $L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_1$ 表示 $H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H}_2$ 表示 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 根据 $h_t(s)$ 所满足的条件, 当 $0\leqslant\sigma\leqslant 3$ 时, 定义记忆空间

$$\mathcal{M}_t^\sigma = L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_\sigma)=\{\xi^t:\mathbb{R}^+\to\mathcal{H}_\sigma \mid \int_0^\infty \mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2 \mathrm{d}s<+\infty\},$$

并赋予其内积与范数

$$\langle\eta^t,\xi^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}=\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\eta^t(s),\xi^t(s)\rangle_\sigma \mathrm{d}s, \qquad \|\xi^t\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma}=\int_0^\infty \mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s.$$

特别地, 定义时间依赖空间及其范数

$$\mathcal{E}_t^\sigma=\mathcal{H}_{\sigma-1}\times\mathcal{M}_t^\sigma, \qquad \|z\|^2_{\mathcal{E}_t^\sigma}=\|(u,\eta^t)\|^2_{\mathcal{E}_t^\sigma}=\|u\|^2_{\sigma-1}+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma}.$$

且当 $\sigma-1$ 为 0 时可省略不写.

根据条件 (M_2), 对于任意的 $\eta^t\in\mathcal{M}_\tau^\sigma$, 有

$$\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma}\leqslant K_\tau(t)\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}, \quad \forall t\geqslant\tau, \tag{2.10}$$

且有连续嵌入

$$\mathcal{M}_\tau^\sigma\hookrightarrow\mathcal{M}_t^\sigma, \quad \forall t\geqslant\tau.$$

参考文献 [9], $\mathbb{T}_t$ 是空间 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 上右平移收缩半群的无穷小算子, 因此是一个耗散算子. 且如下估计式成立:

$$\langle\mathbb{T}_t\eta^t,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \partial_s\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s, \quad \forall\eta^t\in D(\mathbb{T}_t). \tag{2.11}$$

根据条件 (M_1)可知, 对任意固定的 t, 函数 $s \mapsto \mu_t(s)$ 是可微的, 且 $\partial_s\mu_t(s) \leqslant 0$, 则

$$\langle \mathbb{T}_t\eta^t, \eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} \leqslant 0, \quad \forall \eta^t \in D(\mathbb{T}_t).$$

由 (2.10) 式, 可知

$$\mathbb{T}_\tau \subset \mathbb{T}_t, \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{2.12}$$

2.2. 预备知识

引理 2.1 [16] 设 X, Y, Z 为三个 Banach 空间. 对于 $T > 0$, 若 $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, 且

$$\mathrm{V} = \{u \in L^p([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Z)\}, \mathrm{V}_1 = \{u \in L^\infty([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Z)\},$$

其中 $r > 1$, $1 \leqslant p < \infty$. 那么,

$$V \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];Y), \ V_1 \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];Y).$$

引理 2.2 [12, 16] 设 $\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R})$ 是非负函数, 且满足: 如果存在 $s_0 \in \mathbb{R}^+$, 使得 $\mu(s_0) = 0$, 则 $\mu(s) = 0$ 对于所有的 $s \geqslant s_0$ 均成立. 此外, 设 B_0, B_1, B_2 是 Banach 空间, 其中 B_0, B_1 自反且满足

$$B_0 \hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_2,$$

其中嵌入 $B_0 \hookrightarrow B_1$ 紧. 设 $\mathfrak{C} \subset L^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_1)$ 满足:

(i) $\mathfrak{C}$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_0) \cap H^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_2)$ 中;

(ii) $\sup\limits_{\eta\in\mathfrak{C}} \|\eta(s)\|^2_{B_1} \leqslant h(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+, h(s) \in L^1_\mu(\mathbb{R}^+)$,

则 $\mathfrak{C}$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_1)$ 紧.

定义 2.3 [13, 17, 18] 设 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为一族赋范线性空间, 对于双参数算子族 $U(t,\tau)$: $\mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_t$, $t \geqslant \tau \in \mathbb{R}$, 若满足如下性质:

(i) 对于任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, $U(\tau, \tau) = Id$ 是 $\mathcal{H}_\tau$ 上的恒等映射;

(ii) 对于任意的 $t \geqslant s \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, 有 $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$,

则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

定义 2.4 [19, 20] 若一个集族 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足如下性质:

(i) 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 每一个 A_t 在 X_t 中都是紧的;

(ii) $\mathcal{A}$ 是拉回吸引的, 即 $\mathcal{A}$ 是一致有界的, 并且对每一个一致有界集族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$,

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_{X_t}(U(t,\tau)C_\tau, A_t) = 0;$$

(iii) (最小性) 若存在一个集族 $\mathcal{D} = \{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足 (i) 和 (ii), 那么 $A_t \subset D_t$,
则称 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖全局吸引子.

定理 2.5 [12] 如果过程 $U(t,\tau)$ 是渐近紧的, 即集合 $\mathbf{K} = \{\mathbb{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}} : K_t \subset X_t$ 为紧集, $\mathbb{K}$ 是拉回吸引的 $\}$ 非空紧. 那么时间依赖全局吸引子 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 存在且唯一.

定义 2.6 [12,21] 如果一个集族 $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为一致有界的, 即 $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbb{B}_t\|_{X_t} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\xi\in B_t} \|\xi\|_{X_t} < +\infty$, 且对于每一个 $R > 0$, 存在常数 $\tau_e = \tau_e(R) \geqslant 0$, 使得

$$U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathbb{B}_t, \quad \forall\, t-\tau \geqslant \tau_e,$$

则称 $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为时间依赖吸收集.

定义 2.7 [12,21] 如果对于每个 $t \in \mathbb{R}$, 都存在一个常数 $R > 0$, 使得 $C_t \subset \{z \in X_t : \|z\|_{X_t} \leqslant R\} = \mathbb{B}_t(R)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 则称有界集 $C_t \subset X_t$ 的集合族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的.

定义 2.8 [12, 21] 设 $U(t,\tau)$ 是作用于时间依赖空间 X_τ 的一个过程, 对于任意的 $t \geqslant \tau$, $U(t,\tau) : X_\tau \to X_t$ 是连续的, 且拥有时间依赖全局吸引子 $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, 则 $\mathcal{A}$ 是不变的, 即, $U(t,\tau)A_\tau = A_t, \forall t \geqslant \tau$.

定义 2.9 [12] 设函数 $t \to Z(t) \in X_t$, 若

(i) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Z(t)\|_{X_t} < \infty$;

(ii) $Z(t) = U(t,\tau)Z(\tau)$, $\forall \tau \leqslant t,\ \tau \in \mathbb{R}$,
则称 $Z(t)$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的完全有界轨道 (CBT).

定理 2.10 [12,16,22] 设 $Z(t)$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的完全有界轨道 (CBT), 如果过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖全局吸引子 $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的, 则 $\mathcal{A} = \{Z|t \to Z(t) \in X_t\}$.

3. 主要结果

3.1. 解的适定性及正则性

为了得到解的适定性并进行耗散估计, 我们需要借助以下结论.

引理 3.1 设

$$\Phi(u,\eta_\tau) = (2+t-\tau)[(t-\tau)\kappa(\tau)\|u\|^2_{L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_\sigma)}] + 2\|\eta_\tau\|^2_{\mathcal{M}^\sigma_\tau},$$

且有 $\eta^t \in \mathcal{M}^\sigma_\tau \subset \mathcal{M}^\sigma_t$, 其中

$$\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}^\sigma_\tau} \leqslant \Phi(u,\eta_\tau), \quad \forall\, t \in [\tau, T], \tag{3.1}$$

并且

$$\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}^\sigma_t} \leqslant \Phi(u,\eta_\tau)K_\tau(t) \in L^1([\tau,T]). \tag{3.2}$$

引理 3.2 [9] 假设 $\eta_\tau \in D(\mathbb{T}_\tau)$, 则对于任意的 $t \in [\tau, T]$, $\eta^t \in W^{1,\infty}([\tau, T]; \mathcal{M}_\tau^\sigma)$, 且

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_\tau \eta^t + u(t) \tag{3.3}$$

在空间 $\mathcal{M}_\tau^\sigma$ 上成立.

注 3.3 由于 $\mathcal{M}_\tau^\sigma \hookrightarrow \mathcal{M}_t^\sigma$, 由 (2.12) 式知, 对于任意固定的 t, 有

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_t \eta^t + u(t) \tag{3.4}$$

在空间 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 上成立.

注 3.4 当 $\eta^t \in D(\mathbb{T}_\tau)$, 由 (2.10) 和 (3.3) 式的证明可知

$$\|\partial_s \eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma} \leqslant \Psi(u, \eta_\tau) K_\tau(t), \quad \forall\, t \in [\tau, T], \tag{3.5}$$

其中 $\Psi(u, \eta_\tau) = \kappa(\tau)\|u\|^2_{L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}^\sigma)} + \|\partial_s \eta_\tau\|^2_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}$.

引理 3.5 [9] 记 $I = [\tau, T]$, 假设 $u \in C(I; \mathcal{H}_\sigma)$ 且 $\eta_\tau \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}_\sigma) \cap D(\mathbb{T}_\tau)$. 那么, 对于任意的 $\tau \leqslant a \leqslant b \leqslant T$, 以下不等式成立:

$$\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma} - \int_a^b \int_0^\infty [\partial_t \mu_t(s) + \partial_s \mu_t(s)] \|\eta^t(s)\|^2_\sigma \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant \|\eta^a\|^2_{\mathcal{M}_a^\sigma} + 2\int_a^b \langle u(t), \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} \mathrm{d}t.$$

推论 3.6 [9] 对于所有的 $\tau \leqslant a \leqslant b \leqslant T$, 以下估计成立:

$$\begin{aligned} &\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma} + \delta \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma} \mathrm{d}t \leqslant \|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma} - \int_a^b \int_0^\infty (\partial_t \mu_t(s) + \partial_s \mu_t(s)) \|\eta^t(s)\|^2_\sigma \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\eta^a\|^2_{\mathcal{M}_a^\sigma} + 2\int_a^b \langle u(t), \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.6}$$

定义 3.7 记 $I = [\tau, T]$. 对于任意的 $T > \tau \in \mathbb{R}$, 设 $g \in L^2(\Omega)$, 且 $z_\tau = (u_\tau, \eta_\tau) \in \mathcal{E}_\tau^1$. 如果

(i) $u(t) \in L^\infty([\tau, T]; \mathcal{H}_1)$, $\eta^t \in L^\infty([\tau, T]; \mathcal{M}_t^1)$;

(ii) η^t 满足 (2.3) 式;

(iii) 对于任意的 $\phi \in \mathcal{H}_1$ 和 a.e. $t \in I$,有

$$\langle \partial_t u, \phi \rangle + \langle a(l(u))u, \phi \rangle_1 + \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \phi \rangle_1 \mathrm{d}s + \langle f(u), \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle,$$

则称 $z(t) = (u(t), \eta^t)$ 为问题 (2.4), (2.5) 在时间区间 I 上满足初值 $z(\tau) = z_\tau$ 的弱解.

定理 3.8 (适定性和正则性) 记 $I = [\tau, T], \forall\, T > \tau$. 假设 (1.7), (1.8) 式以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g \in L^2(\Omega)$, 则对于每个 $T > \tau \in \mathbb{R}$ 和任意给定的初值 $z_\tau \in \mathcal{E}_\tau^1$, z_τ 满足 $\|z_\tau\|_{\mathcal{E}_\tau^1} \leqslant R$, 问题

(2.4), (2.5) 存在唯一弱解 $z(t)=(u(t),\eta^t)=U(t,\tau)z_\tau$. 对于任意固定的 t, 有 $\eta^t\in\mathcal{M}_t^1$, 则

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y+\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\|\partial_t u(y)\|^2\mathrm{d}y\leqslant Q,$$

其中 $Q=\max\{Q_1,Q_3,Q_4\}$. 此外,

$$\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}\leqslant Ce^{C(R,\lambda_1)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|^2_{\mathcal{E}_\tau^1},\ \ t\in[\tau,T],$$

其中 $\bar{z}(t)=z_1(t)-z_2(t)$, 且 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 是问题 (2.4), (2.5) 满足初值 $z_1=(u_{1_\tau},\eta_{1_\tau})$, $z_2=(u_{2_\tau},\eta_{2_\tau})$ 的弱解.

证明 方程 (2.4) 与 u 作内积, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)+2a(l(u))\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}+2\langle f(u),u\rangle-2\langle g,u\rangle=0,$$

其中 $L(t)=\|u\|^2$.

利用 (2.8), (2.9) 式, 可知

$$-2\langle f(u),u\rangle\leqslant 2(1-\theta)\|u\|_1^2+4c_f,$$

其中 $0<\theta\leqslant 1$. 此外,

$$2\langle g,u\rangle\leqslant 2m\|u\|_1^2+\frac{1}{2m\lambda_1}\|g\|^2.$$

因此,结合 (2.2) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)+2(1-\theta)\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}\leqslant Q_0. \tag{3.7}$$

上式中 $Q_0=\frac{1}{2m\lambda_1}\|g\|^2+4c_f$.

对 (3.7) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 得

$$L(t)+2(1-\theta)\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle u,\eta^y\rangle_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant L(\tau)+Q_0(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau. \tag{3.8}$$

根据定理 3.6, 可知

$$\begin{aligned}&L(t)+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^1}+2(1-\theta)\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\\&\leqslant L(\tau)+\|\eta_\tau\|^2_{\mathcal{M}_\tau^1}+Q_0(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

显然,

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}=\mathcal{L}(t)=L(t)+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^1}\leqslant(1+\frac{1}{\lambda_1})\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}. \tag{3.9}$$

因此,

$$\mathcal{L}(t)+2(1-\theta)\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\mathcal{L}(\tau)+Q_0(t-\tau). \tag{3.10}$$

即,

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}+\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant Q_1. \tag{3.11}$$

其中 $Q_1=C(R,T,\delta,2(1-\theta),m\lambda_1,\|g\|,c_f)$.

方程 (2.4) 与 $\partial_t u$ 作内积, 得

$$\|\partial_t u\|^2=-a(l(u))\langle\Delta u,\partial_t u\rangle-\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\Delta\eta^t(s),\partial_t u\rangle\mathrm{d}s-\langle f(u),\partial_t u\rangle+\langle g,\partial_t u\rangle.$$

由 (2.6) 式, 可得

$$|\langle f(u),\partial_t u\rangle|\leqslant\|f(u)\|_{L^{\frac{4}{3}}}\|\partial_t u\|_{L^4}\leqslant C(1+\|u(t)\|_1^3)\|\partial_t u\|,$$

并且由条件 (M_2) 得

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\Delta\eta^t(s),\partial_t u\rangle\mathrm{d}s\right|&\leqslant\|\partial_t u\|\int_0^\infty\mu_t(s)\|\Delta\eta^t(s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\|\partial_t u\|\left(\int_0^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty\mu_t(s)\|\Delta\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\\&\leqslant\|\partial_t u\|\sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}.\end{aligned}$$

因此结合 (2.2) 式得,

$$\begin{aligned}\|\partial_t u\|^2&\leqslant C(m\|\Delta u(t)\|+1+\|u(t)\|_1^3+\sqrt{\kappa(t)}\|\Delta\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}+\|g\|)\|\partial_t u\|\\&\leqslant C(1+mQ_1{}^{\frac12}+Q_1{}^{\frac{p}{2}}+\sqrt{\kappa(t)}\|\Delta\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}+\|g\|)\|\partial_t u\|\\&\leqslant\frac12\|\partial_t u\|^2+C(R,T,m,c_f,\|g\|,\theta,\delta)(1+\kappa(t)\|\Delta\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t})\\&=\frac12\|\partial_t u\|^2+Q_2(1+\kappa(t)\|\Delta\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t}),\quad\forall t\in[\tau,T].\end{aligned} \tag{3.12}$$

故

$$\int_\tau^t\|\partial_t u(y)\|^2\mathrm{d}y\leqslant 2Q_2(1+\int_\tau^t\kappa(y)\|\Delta\eta^y\|^2_{\mathcal{M}_y}\mathrm{d}y)\leqslant Q_3. \tag{3.13}$$

DOI: 10.12677/aam.2023.1212517

方程 (2.4) 与 Au作内积, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_1(t)+2a(l(u))\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^2}+2\langle f(u),Au\rangle-2\langle g,Au\rangle=0, \tag{3.14}$$

其中 $L_1(t)=\|u\|_1^2$.

由 (2.6) 式, 知

$$-2\langle f(u),Au\rangle=-2\int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_1^2,$$

且

$$2\langle g,Au\rangle\leqslant 2\|g\|\|u\|_2\leq\frac{1}{m}\|g\|^2+m\|u\|_2^2.$$

因此结合 (2.2) 得,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_1(t)+m\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^2}\leqslant C\|u\|_1^2+\frac{1}{m}\|g\|^2. \tag{3.15}$$

对 (3.15) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&L_1(t)+m\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle u,\eta^y\rangle_{\mathcal{M}_y^2}\mathrm{d}y\\&\leqslant L_1(\tau)+C\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau).\end{aligned} \tag{3.16}$$

根据定理 3.6, 可知

$$\begin{aligned}&L_1(t)+m\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^2}^2+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathcal{M}_y^2}^2\mathrm{d}y\\&\leqslant L_1(\tau)+\|\eta_\tau\|_{\mathcal{M}_\tau^2}^2+C\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.\end{aligned} \tag{3.17}$$

显然,

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_t^2}^2\doteq\mathcal{L}_1(t)=L_1(t)+\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^2}^2\leqslant(1+\frac{1}{\lambda_1})\|z(t)\|_{\mathcal{E}_t^2}^2.$$

故

$$\mathcal{L}_1(t)+m\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathcal{M}_y^2}^2\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \mathcal{L}_1(\tau)+C\int_\tau^t \|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.$$

应用 Gronwall 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^2}+\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}_y^2}\mathrm{d}y\\ &\qquad\leqslant C(\|z(\tau)\|_{\mathcal{E}_\tau^2},T,\theta,m,\delta,\|g\|,\lambda_1,c_f):=Q_4.\end{aligned}\tag{3.18}$$

假设 $\mathcal{H}_1$ 的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^\infty$, 且 $Aw_j=\lambda_j w_j,\ j=1,2,\cdots$. 设 $\{\varsigma_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 上的正交基, 且 $A\varsigma_j=\lambda_j\varsigma_j,\ j=1,2,\cdots$. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在有限维子空间:

$$H_n=\mathrm{span}\{w_1,\cdots,w_n\}\subset\mathcal{H}_1,\quad M_n=\mathrm{span}\{\varsigma_1,\cdots,\varsigma_n\}\subset L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1).$$

定义 $P_n:\mathcal{H}_1\to H_n$ 为 H_n 上的正交投影, Q_n: $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)\to M_n$ 为 M_n 上的正交投影.

设 $z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)$ 是满足序列 $\{z_{\tau_n}=(u_{\tau_n},\eta_{\tau_n})\}\subset\mathcal{E}_t^2$ 的初值, 其中 $u_{\tau_n}=P_nu_\tau\to u_\tau$ 于 $\mathcal{H}_1$, $\eta_{\tau_n}=Q_n\eta_\tau\to\eta_\tau$ 于 $\mathcal{M}_t^1$.

对于每一个 $n\in\mathbb{N}$, 设 $z_n(t)=(u_n,\eta_n^t)$ 为问题的近似解, 其中 $u_n=\Sigma_{j=1}^nT_j^n(t)w_j$, $T_j^n\in C^1([\tau,T])$, 并且 $\eta_n^t=\Sigma_{j=1}^n\Lambda_j^n(t)\varsigma_j$, $\Lambda_j^n\in C^1([\tau,T])$. 那么, 对于任意的 $\varphi\in H_n$ 和每个 $t\in[\tau,T]$, $z_n(t)=(u_n,\eta_n^t)$ 满足:

$$\langle\partial_tu_n,\varphi\rangle+\langle a(l(u_n))u_n,\varphi\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta_n^t(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u_n),\varphi\rangle=\langle g,\psi\rangle,\tag{3.19}$$

并且

$$\eta_n^t(s)=\begin{cases}\int_0^s u_n(t-y)\mathrm{d}y, & 0\leqslant s\leqslant t-\tau,\\ \eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}u_n(t-y)\mathrm{d}y, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{3.20}$$

假设 $\varphi\in H_m$ 是固定的, 则对于每个 $n\geqslant m$, (3.19) 式成立. 将 (3.19) 式乘以 $\psi\in C_0^\infty([\tau,T])$ 并在 $[\tau,T]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T\psi(\langle\partial_tu_n,\varphi\rangle+\langle al(u_n)u_n,\varphi\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta_n^t(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\\ &\qquad+\langle f(u_n),\varphi\rangle-\langle g,\varphi\rangle)\mathrm{d}y=0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

对于序列 $\{z_n\}$, (3.11), (3.13) 和 (3.18) 式成立, 则有如下结果:

∂_tu_n 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1)$ 上有界,

u_n 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_2)$ 上有界,

u_n 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_2)$ 上有界,

η_n^t 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{M}_t^2)$ 上有界.

由于 $\|f(u_n)\|_{L^{\frac{4}{3}}} \leqslant C(1+\|u_n\|_1^3) \leqslant C$, 可知

$$f(u_n) \text{ 在 } L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \text{ 上有界.}$$

运用 Galerkin 逼近方法, 可知存在 $z=(u,\eta^t) \in L^\infty([\tau,T];\mathcal{E}_t^2)$, 使得

$$\partial_t u_n \to \partial_t u \text{ 在 } L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1) \text{ 上弱收敛,} \tag{3.22}$$

$$u_n \to u \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_2) \text{ 上弱*收敛,} \tag{3.23}$$

$$u_n \to u \text{ 在 } L^2([\tau,T];\mathcal{H}_2) \text{ 上弱收敛,} \tag{3.24}$$

$$\eta_n^t \to q^t \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];\mathcal{M}_t^2) \text{ 上弱*收敛,} \tag{3.25}$$

$$f(u_n) \to f(u) \text{ 在 } L^{\frac{5}{4}}(\Omega) \text{ 上弱收敛.} \tag{3.26}$$

应用引理 2.1, 并结合 (3.22), (3.23) 式, 知

$$u_n \to u \text{ 在 } C([\tau,T];\mathcal{H}_1) \text{ 上强收敛,} \tag{3.27}$$

并且

$$u_n \to u \text{ 在 } [\tau,T]\times\Omega \text{ 上 a.e. 成立.}$$

由于 f 的连续性, 则

$$f(u_n) \to f(u) \text{ 在 } [\tau,T]\times\Omega \text{ 上 a.e. 成立.}$$

由于 $\varphi \in H_n \subset \mathcal{H}_1$, 可得 $\varphi \in P_n L^4(\Omega)$. 因此, 由 (3.27) 式, 有

$$\langle f(u_n)-f(u),\varphi\rangle \mathrm{d}y \to 0.$$

又 $f(u_n)$ 和 $f(u)$ 在 $L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ 有界, 应用控制收敛定理, 则有

$$\int_\tau^T \psi\langle f(u_n)-f(u),\varphi\rangle \mathrm{d}y \to 0.$$

下设

$$\bar{\eta}_n^t=\eta_n^t-\eta^t,\ \bar{u}_n=u_n-u,\ \bar{\eta}_{\tau_n}=\eta_{\tau_n}-\eta_\tau,\ \bar{u}_{\tau_n}=u_{\tau_n}-u_\tau.$$

结合条件 (M_2) 并利用

$$\bar{\eta}_n^t(s)=\begin{cases} \int_0^s \bar{u}_n(t-\varsigma)\mathrm{d}\varsigma, & 0<s\leqslant t-\tau, \\ \bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar{u}_n(t-\varsigma)\mathrm{d}\varsigma, & s>t-\tau, \end{cases}$$

可以得到

$$\begin{aligned} &\|\bar{\eta}_n^t\|_{\mathcal{M}_t^1}^2 \\ &\leqslant K_\tau(t)\|\bar{\eta}_n^t\|_{\mathcal{M}_\tau^1}^2 \\ &=C(T)(\int_0^{t-\tau}\mu_\tau(s)\|\int_0^s \bar{}u_n(t-\varsigma)\mathrm{d}\varsigma\|_1^2\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^\infty \mu_\tau(s)\|\bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{t-\tau}\bar{u}_n(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma\|_1^2\mathrm{d}s)\\
\leqslant& C(T)(2(T-\tau)\|\bar{u}_n\|^2_{C([\tau,T];\mathcal{H}_1)}\int_0^\infty\mu_\tau(s)\mathrm{d}s+2\int_0^\infty\mu_\tau(s+t-\tau)\|\bar{\eta}_{\tau_n}(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\
&+(T-\tau)^2\|\bar{u}_n\|^2_{C([\tau,T];\mathcal{H}_1)}\int_0^\infty\mu_\tau(s)\mathrm{d}s)\\
\leqslant& C(T)((2+T-\tau)(T-\tau)\|\bar{u}_n\|^2_{C([\tau,T];\mathcal{H}_1)}\kappa(\tau)+2\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|^2_{\mathcal{M}^1_\tau})\to 0,\quad \forall t\in[\tau,T].
\end{aligned}
$$

根据极限的唯一性, 知 $q^t=\eta^t$.

显然利用条件 (M_2) 可得,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\langle\int_0^s\bar{u}_n(t-\varsigma)\mathrm{d}\varsigma,\varphi\rangle_1\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\langle\int_0^{t-\tau}\bar{u}_n(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma,\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\int_0^s\langle\bar{u}_n(t-\varsigma),\varphi\rangle_1\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}s+\int_0^\infty\mu_t(s+t-\tau)\langle\bar{\eta}_{\tau_n}(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\int_\tau^t\langle\bar{u}_n(\varsigma),\varphi\rangle_1\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}s\\
&\leqslant\|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];\ H_1)}\|\varphi\|_1(T-\tau)K_\tau(t)\kappa(\tau)+\|\varphi\|_1K_\tau(t)\sqrt{\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|_{\mathcal{M}^1_\tau}\\
&\quad+\|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];\mathcal{H}_1)}\|\varphi\|_1(T-\tau)K_\tau(t)\kappa(\tau)\to 0,\qquad a.e.\ \ t\in[\tau,T].
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s=0,\ \ a.e.\ \ t\in(\tau,T].
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\right|&\leqslant\int_0^\infty\mu_t(s)\|\bar{\eta}_n^t(s)\|_1\|\varphi\|_1\mathrm{d}s\\
&\leqslant\|\varphi\|_1\sqrt{K_\tau(t)\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_n^t\|_{\mathcal{M}^1_t}\in L^1([\tau,T]).
\end{aligned}
$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T\psi\int_0^\infty\mu_y(s)\langle\bar{\eta}_n^y(s),\varphi\rangle_1\mathrm{d}s\mathrm{d}y=0.
$$

因此, $z=(u,\eta^t)$ 为问题 (2.4), (2.5) 的弱解.

下面证明弱解关于初值的连续依赖性. 设

$$z_1=(u_1(t),\eta_1^t),\ z_2=(u_2(t),\eta_2^t)$$

为问题 (2.4), (2.5) 的两个弱解. 那么 $\bar{z}(t)=(\bar{u}(t),\bar{\eta}^t)=z_1(t)-z_2(t)$ 满足

$$\partial_t\bar{u}+a(l(u_1))A\bar{u}+(a(l(u_1)-a(l(u_2)))Au_2+\int_0^\infty\mu_t(s)A\bar{\eta}^t(s)\mathrm{d}s=-f(u_1)+f(u_2), \tag{3.28}$$

其中

$$\bar{\eta}^t(s)=\begin{cases}\int_0^s\bar{u}(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \bar{\eta}_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar{u}(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases} \tag{3.29}$$

方程 (3.28) 与 $\bar{u}$ 作内积, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+2\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}^t(s),\bar{u}(t)\rangle_1\mathrm{d}s\\ &\le-2m\|\bar{u}\|_1^2-2L_a(R)|l||\bar{u}|\ \|u_2\|_1\|\bar{u}\|-2\langle f(u_1)-f(u_2),\bar{u}(t)\rangle\\ &\leqslant-\frac{2m}{\lambda_1}\|\bar{u}\|^2-2m\|\bar{u}\|^2-\frac{1}{2m}L_a(R)^2|l|^2|\bar{u}|^2\ \|u_2\|_1^2+C(1+\|u_1\|_{L^4}^2+\|u_2\|_{L^4}^2)\|\bar{u}\|_{L^4}^2\\ &\leqslant(-\frac{2m}{\lambda_1}-2m)\|\bar{u}\|^2+C(1+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2)\|\bar{u}\|^2\\ &\leqslant C(R,\lambda_1,m)F(t),\ \ t\in[\tau,T],\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 $F(t)=\|\bar{u}\|^2$.

对 (3.30) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 得

$$F(t)+2\int_\tau^t\langle\bar{u}(y),\bar{\eta}^y\rangle_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant F(\tau)+C(R,\lambda_1 m)\int_\tau^tF(y)\mathrm{d}y,\ \ t\in[\tau,T]. \tag{3.31}$$

由定理 3.6 可知

$$\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t^1}^2+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\bar{\eta}^y(s)\|_{\mathcal{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant\|\bar{\eta}_\tau\|_{\mathcal{M}_\tau^1}^2+2\int_\tau^t\langle\bar{u},\bar{\eta}^y\rangle_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y. \tag{3.32}$$

设 $\mathcal{F}(t)=F(t)+\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t^1}^2$, 有

$$\|\bar{z}(t)\|_{\mathcal{E}_t^1}^2=\mathcal{F}(t)\leqslant C\|\bar{z}(t)\|_{\mathcal{E}_t^1}^2.$$

结合 (3.31) 和 (3.32) 式, 得

$$\mathcal{F}(t) \leqslant \mathcal{F}(\tau) + C(R, \lambda_1, m, \delta)\int_\tau^t \mathcal{F}(y)\mathrm{d}y.$$

应用 Gronwall 不等式, 则

$$\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathcal{E}^1_t} \leqslant Ce^{C(R,\lambda_1,m,\delta)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|^2_{\mathcal{E}^1_\tau}, \ \ t \in [\tau, T].$$

同时, 问题 (2.4), (2.5) 弱解 $z = (u, \eta^t)$ 的唯一性得证. □

根据定理 3.8, 可以定义问题 (2.4), (2.5) 在 $\mathcal{E}^1_t$ 上的解过程, 即

$$U(t,\tau) : \mathcal{E}^1_\tau \to \mathcal{E}^1_t,\ U(t,\tau)z_\tau = z(t), \quad \forall\, z_\tau \in \mathcal{E}^1_\tau,\ t \geqslant \tau, \tag{3.33}$$

且 $\{U(t,\tau)\}$ 为作用于 $\mathcal{E}^1_t$ 上的过程族.

3.2. 时间依赖吸收集的存在性

定理 3.9(耗散性) 假设条件 (2.6), (2.7) 以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g \in L^2(\Omega)$. $U(t,\tau)$, $t \geqslant \tau, \tau \in \mathbb{R}$ 是 (3.33) 式所定义的解过程, 对于任意的初值 $z(\tau) \in \mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathcal{E}^1_\tau$, 存在 $\epsilon > 0,\ R_0 > 0$ 使得过程 $U(t,\tau)$ 存在时间依赖吸收集, 即族

$$\mathcal{B}_t = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

证明 运用 Poincaré 不等式和条件 (M_4), 并根据 (3.15) 式可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(t) + (1-\theta)\int_\tau^t \|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y + (1-\theta)\lambda_1\int_\tau^t \|u(y)\|^2\mathrm{d}y + \delta\int_\tau^t \kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}^1_y}\mathrm{d}y\\ &\leqslant \mathcal{L}(\tau) + Q_0(t-\tau).\end{aligned}$$

即,

$$\mathcal{L}(t) + 2\epsilon\int_\tau^t \mathcal{L}(y)\mathrm{d}y \leqslant \mathcal{L}(\tau) + \epsilon\int_\tau^t \mathcal{L}(y)\mathrm{d}y + Q_0(t-\tau),$$

其中$\epsilon = \min\{(1-\theta)\lambda_1, \delta \inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\}$. 应用文献中的积分型 Gronwall 不等式得:

$$\mathcal{L}(t) \leqslant \mathcal{L}(\tau)\mathrm{e}^{-\epsilon(t-\tau)} + \frac{Q_0\mathrm{e}^\epsilon}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon}}.$$

此外,

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}^1_t} = \mathcal{L}(t) \leqslant (1+\frac{1}{\lambda_1})\|z(\tau)\|^2_{\mathcal{E}^1_\tau}\mathrm{e}^{-\epsilon(t-\tau)} + \frac{R_0}{2},$$

这里 $R_0 = \frac{2Q_0 e^{\epsilon}}{1-e^{-\epsilon}}$. 对于每一个 $R>0$, 存在 $t_0 = t_0(R) = \frac{1}{\epsilon}\ln\frac{2(1+\frac{1}{\lambda_1})R}{R_0} \leqslant t$ 以及 $R_0>0$, 使得

$$\tau \leqslant t - t_0 \Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathbb{B}_t(R_0).$$

证毕. □

3.3. 时间依赖吸引子的存在性

为了得到解过程的渐近紧性, 需要对非线性项 f, 利用分解技巧使得:

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s),$$

这里 $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ 并且满足以下条件:

$$|f_1'(u)| \leqslant C(1+|u|^2), \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

$$f_1(u)u \geqslant 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.35}$$

$$|f_2'(u)| \leqslant C(1+|u|^2), \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.36}$$

$$\liminf_{|u|\to\infty} f_2'(u) > -\lambda_1. \tag{3.37}$$

定理 3.9 表明过程 $U(t,\tau)$ 有时间依赖吸收集 $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 对于任意的 $z_\tau = (u_\tau, \eta_\tau) \in \mathbb{B}_\tau$, 方程 (2.4), (2.5) 的解 $U(t,\tau)z_\tau$ 分解为:

$$U(t,\tau)z_\tau = U_0(t,\tau)z_\tau + U_1(t,\tau)z_\tau,$$

其中 $U_0(t,\tau)z_\tau = z_1(t)$,$U_1(t,\tau)z_\tau = z_2(t)$, 即 $z(t) = (u(t),\eta^t) = z_1(t) + z_2(t)$, 则:

$$u(t) = v(t) + w(t), \eta^t = \xi^t + \zeta^t, \qquad z_1(t) = (v(t), \xi^t), \qquad z_2(t) = (w(t), \zeta^t)$$

且 $z_1(t)$ 满足:

$$\begin{cases} \partial_t v + a(l(u))Av + \displaystyle\int_0^\infty \mu_t(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s + f_1(v) = 0, \\ \partial_t \xi^t + \partial_s \xi^t = v(t), \\ v(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x,\tau) = u_\tau(x,t), \\ \xi^t(x,s)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \xi^\tau(x,s) = \eta_\tau(x,s), \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\xi^t(s) = \begin{cases} \int_0^s v(t-r)\mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ \xi_\tau(s-t+\tau) + \int_0^{t-\tau} v(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau, \end{cases}$$

$z_2(t)$ 满足:

$$\begin{cases} \partial_t w + a(l(u))Aw + \int_0^\infty \mu_t(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s + f(u) - f_1(v) = g, \\ \partial_t \zeta^t + \partial_s \zeta^t = w(t), \\ w(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(x,\tau) = 0, \\ \zeta^t(x,s)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \zeta^\tau(x,s) = 0, \end{cases} \tag{3.39}$$

$$\zeta^t(s) = \begin{cases} \int_0^s w(t-r)\mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ \int_0^{t-\tau} w(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau. \end{cases}$$

引理 3.10 设 (3.34), (3.35) 式以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g \in L^2(\Omega)$. 那么方程 (3.39) 满足

$$\|U_0(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathcal{E}^1_t} \leqslant C(R)\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)}, \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{3.40}$$

证明 方程 (3.38) 与 v 作内积, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) + 2a(l(u))\|v\|_1^2 + 2\langle v, \xi^t\rangle_{\mathcal{M}^1_t} + 2\langle f_1(v), v\rangle = 0, \tag{3.41}$$

其中 $N(t) = \|v\|^2$.

由 (3.35) 式, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) + 2m\|v\|_1^2 + 2\langle v, \xi^t\rangle_{\mathcal{M}^1_t} \leqslant 0. \tag{3.42}$$

对 (3.42) 式在 $[\tau, t]$上积分, 有

$$N(t) + 2m\int_\tau^t \|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y + 2\int_\tau^t \langle v, \xi^y\rangle_{\mathcal{M}^1_y}\mathrm{d}y \leqslant N(\tau), \ \ \forall t \geqslant \tau.$$

根据定理 3.6, 得

$$N(t) + \|\xi^t\|^2_{\mathcal{M}^1_t} + 2m\int_\tau^t \|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y + \delta\int_\tau^t \kappa(y)\|\xi^y(s)\|^2_{\mathcal{M}^1_y}\mathrm{d}y \leqslant N(\tau) + \|\xi_\tau\|^2_{\mathcal{M}^1_\tau}, \ \ \forall t \geqslant \tau.$$

显然有

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{E}^1_t} = \mathcal{N}(t) = N(t) + \|\xi^t\|^2_{\mathcal{M}^1_t} \leqslant (1 + \frac{1}{\lambda_1})\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{E}^1_t}.$$

因此,

$$\mathcal{N}(t) + 2m\int_\tau^t \|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y + \delta\int_\tau^t \kappa(y)\|\xi^y(s)\|^2_{\mathcal{M}^1_y}\mathrm{d}y \leqslant \mathcal{N}(\tau).$$

即

$$\mathcal{N}(t)+2\epsilon_1\int_\tau^t\mathcal{N}(y)\mathrm{d}y\leqslant\mathcal{N}(\tau)+\epsilon_1\int_\tau^t\mathcal{N}(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\epsilon_1=\min\{m,\lambda_1,\delta\inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\}$. 应用文献中的积分型 Gronwall 不等式得:

$$\mathcal{N}(t)\leqslant\mathcal{N}(\tau)\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)}.$$

进一步,

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{E}^1_t}=\mathcal{N}(t)\leqslant(1+\frac{1}{\lambda_1})\|z_1(\tau)\|^2_{\mathcal{E}^1_\tau}\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)}\leqslant C(R)\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)},$$

其中 $\|z(\tau)\|^2_{\mathcal{E}^1_\tau}\leqslant R$. □

引理 3.11 设 (2.6), (2.7)和 (3.34)-(3.37) 式以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g\in L^2(\Omega)$. 对于每一个 $T>0$ 和任意初值 $z_\tau\in\mathcal{E}^1_\tau$, 存在正常数 $P=P(\|g\|,\|z_\tau\|_{\mathcal{E}^1_\tau},\lambda_1,T)$, 使得方程 (3.39) 的解满足

$$\|U_1(T+\tau,\tau)z_\tau\|^2_{\mathcal{E}^{\frac{4}{3}}_{T+\tau}}=\|z_2(T+\tau)\|^2_{\mathcal{E}^{\frac{4}{3}}_{T+\tau}}\leqslant P. \tag{3.43}$$

证明 方程 (3.39) 与 $A^{\frac{1}{3}}w$ 作内积得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t)+2a(l(u))\|w(t)\|^2_{\frac{4}{3}}+2\langle\zeta^t,w(t)\rangle_{\mathcal{M}^{\frac{4}{3}}_t}\\&=2\langle g,A^{\frac{1}{3}}w\rangle-2\langle f_2(v),A^{\frac{1}{3}}w\rangle-2\langle f(u)-f(v),A^{\frac{1}{3}}w\rangle,\end{aligned} \tag{3.44}$$

其中 $J(t)=\|w(t)\|^2_{\frac{1}{3}}$.

由 (2.6) 和 (3.36)式, 得

$$\begin{aligned}-2\langle f_2(v),A^{\frac{1}{3}}w\rangle\leqslant&C\int_\Omega(1+|v|^2)|A^{\frac{1}{3}}w|\mathrm{d}x\leqslant C(\int_\Omega(1+|v|^{\frac{36}{13}})\mathrm{d}x)^{\frac{13}{18}}(\int_\Omega|A^{\frac{1}{3}}w|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x)^{\frac{5}{18}}\\\leqslant&C(1+\|v\|^2_{L^6})\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}}\leqslant C(R)\|w\|_{\frac{4}{3}}\leqslant\frac{m}{2}\|w\|^2_{\frac{4}{3}}+C,\end{aligned} \tag{3.45}$$

并且

$$\begin{aligned}&-2\langle f(u)-f(v),A^{\frac{1}{3}}w\rangle\\&\leqslant C\int_\Omega(1+|u|^2+|v|^2)|w||A^{\frac{1}{3}}w|\mathrm{d}x\leqslant C(\|u\|^2_{L^3}+\|v\|^2_{L^3})\|w\|_{L^{18}}\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}}\\&\leqslant C(\|u\|^2_1+\|v\|^2_1)\|w\|_{L^{18}}\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}}\leqslant C_0\|w\|^2_{\frac{4}{3}},\end{aligned} \tag{3.46}$$

其中 $C_0=C_0(Q_1)$, 并使用了嵌入 $\mathcal{H}_{\frac{4}{3}}\hookrightarrow L^{18}$, $\mathcal{H}_{\frac{2}{3}}\hookrightarrow L^{\frac{18}{5}}$, 以及 $\mathcal{H}_1\hookrightarrow L^6\hookrightarrow L^3$.

此外,

$$2|\langle g,A^{\frac{1}{3}}w\rangle|\leqslant\frac{m}{2}\|w\|^2_{\frac{4}{3}}+\frac{2}{m}\frac{\|g\|^2}{\lambda_1^{\frac{2}{3}}}. \tag{3.47}$$

将 (3.45)-(3.47) 式代入 (3.44) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t)+2\langle\zeta^t,w(t)\rangle_{\mathcal{M}_t^{\frac{4}{3}}}\leqslant(C_0-m)\|w(t)\|_{\frac{4}{3}}^2+C. \tag{3.48}$$

对 (3.48) 式在 $[\tau,T+\tau]$ 上积分, 得

$$J(T+\tau)+2\int_\tau^{T+\tau}\langle\zeta^y,w(y)\rangle_{\mathcal{M}_y^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}y\leqslant J(\tau)+(C_0-m)\int_\tau^{T+\tau}\|w(y)\|_{\frac{4}{3}}^2\mathrm{d}y+CT.$$

设

$$\mathcal{J}(t)=\|w(t)\|_{\frac{1}{3}}^2+\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^{\frac{4}{3}}}^2.$$

利用定理 3.6, 可得

$$\mathcal{J}(T+\tau)+\delta\int_\tau^{T+\tau}\kappa(y)\|\zeta^y(s)\|_{\mathcal{M}_y^{\frac{4}{3}}}^2\mathrm{d}y\leqslant\mathcal{J}(\tau)+(C_0-m)\int_\tau^{T+\tau}\|w(y)\|_{\frac{4}{3}}^2\mathrm{d}y+CT.$$

故

$$\mathcal{J}(T+\tau)\leqslant\mathcal{J}(\tau)+C_2\int_\tau^{T+\tau}\mathcal{J}(y)\mathrm{d}y+CT.$$

根据 Gronwall 不等式, 有

$$\mathcal{J}(T+\tau)\leqslant\mathrm{e}^{C_2T}(\mathcal{J}(\tau)+CT)=CT\mathrm{e}^{C_2T}.$$

最后得到

$$\|z_2(T+\tau)\|_{\mathcal{E}_{T+\tau}^{\frac{4}{3}}}^2=\mathcal{J}(T+\tau)\leqslant CT\mathrm{e}^{C_2T}=P.$$

因此, (3.43) 式成立. □

对于任意的 $\zeta_\tau\in L_{\mu_\tau}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$, Cauchy 问题 (见 [13, 17, 20])

$$\begin{cases}\partial_t\zeta^t=-\partial_s\zeta^t+w, & t>\tau,\\ \zeta^\tau=\zeta_\tau,\end{cases} \tag{3.49}$$

有唯一解 $\zeta^t\in C([\tau,+\infty);L_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1))$, 并有表达式

$$\zeta^t(s)=\begin{cases}\int_0^s w(t-y)\mathrm{d}y, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \int_0^{t-\tau}w(t-y)\mathrm{d}y, & s>t-\tau.\end{cases} \tag{3.50}$$

记 $\mathcal{B}_t$ 为定理 3.9 所得到的时间依赖吸收集. 设

$$\mathcal{K}_T = \Pi U_1(T,\tau)\mathcal{B}_\tau,$$

其中 $\Pi : \mathcal{H}_1 \times L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1) \to L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 是一个投影算子.

引理 3.12 设 $z_2(t) = (w(t),\zeta^t)$ 是问题 (3.45) 的解. 假设 (2.6), (2.7) 和 (3.40) – (3.43) 式以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g \in L^2(\Omega)$. 对于任意给定的 $T > \tau$, 存在正常数 $P_1 = P_1(\|\mathcal{B}_\tau\|_{\mathcal{E}^1_\tau})$, 使得

(i) $\mathcal{K}_T$ 在$L^2_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_{\frac{4}{3}}) \cap H^1_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 上是有界的;

(ii) $\sup\limits_{\eta^T\in\mathcal{K}_T} \|\zeta^T(s)\|_1^2 \leqslant P_1$.

证明 根据表达式 (3.50), 有

$$\partial_s\zeta^t(s) = \begin{cases} w(t-s), & 0 \leqslant s \leqslant t-\tau, \\ 0, & s > t-\tau. \end{cases} \tag{3.51}$$

从而结合定理 3.11 即知 (i) 式成立.

其次, 易知

$$\|\zeta^T(s)\|_1 \leqslant \begin{cases} \int_0^s \|w(T-y)\|_1 \mathrm{d}y \leqslant \int_0^{T-\tau} \|w(T-y)\|_1 \mathrm{d}y, & 0 \leqslant s \leqslant T-\tau, \\ \int_0^{T-\tau} \|w(T-y)\|_1 \mathrm{d}y, & s > T-\tau. \end{cases} \tag{3.52}$$

从而由 (3.43) 知 (ii) 式成立. □

引理 3.13 假设引理 3.12 成立, 则对于任意给定的 $T > \tau$, $U_1(T,\tau)\mathcal{B}_\tau$ 在 $\mathcal{E}^1_T$ 上是相对紧的.

定理 3.14 设 $U(t,\tau)$ 是问题 (2.4), (2.5) 的解过程. 假设 (2.6), (2.7)和 (3.34)-(3.37) 式以及条件 (M_1)-(M_4) 成立, $g \in L^2(\Omega)$. 那么, 过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖全局吸引子 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外, 吸引子是不变的, 即, $U(t,\tau)A_\tau = A_t$, $\forall t \geqslant \tau$.

证明 定理 3.9 表明 $U(t,\tau)$ 具有时间依赖吸收集 $\mathcal{B}_t = \{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 根据引理 3.10 和 3.11, 对于足够大的正常数 R_1, 易知集族 $B_t^{\frac{1}{3}} = \{B_t^{\frac{1}{3}}(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是拉回吸引的, 其中 $B_t^{\frac{1}{3}}(R_1) = \{\zeta \| \|\zeta\|_{\mathcal{E}_t^{\frac{4}{3}}} \leqslant R_1\}$.

结合 (3.40) 和 (3.43) 式, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{\mathcal{E}^1_t}(U(t,\tau)\mathcal{B}_\tau, \mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}) &\leqslant \mathrm{dist}_{\mathcal{E}^1_t}(U_0(t,\tau)\mathcal{B}_\tau + U_1(t,\tau)\mathcal{B}_\tau, \mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}) \\ &= \mathrm{dist}_{\mathcal{E}^1_t}(U_0(t,\tau)\mathcal{B}_\tau, \mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}) \\ &\leqslant C(\|\mathcal{B}_\tau\|_{\mathcal{E}^1_\tau})e^{-\epsilon_1(t-\tau)}, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1 = \min\{m, \lambda_1, \delta \inf\limits_{y\in[\tau,t]} \kappa(y)\}$.

对于 $\mathcal{E}_\tau^1$ 上的任意有界集 $\mathcal{B}_\tau = \{\mathbb{B}_\tau(R)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, 由定理 3.9, 存在 $t_0 = t_0(R)$ 使得

$$\tau \leqslant t - t_0 \Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathbb{B}_t(R_0).$$

因此,

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{E}_t^1}(U(t,\tau)\mathcal{B}_\tau, \mathcal{B}_t) \leqslant \varpi \mathrm{e}^{\epsilon_1 t_0}\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)},$$

其中 $\varpi = \sup\limits_{0\leqslant t-\tau\leqslant t_0} \|U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau\|_{\mathcal{E}_t^1}$.

应用引理 2.4 和定理 3.8, 可得

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{E}_t^1}(U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau, \mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}) \leqslant C(\|\mathbb{B}_\tau\|_{\mathcal{E}_\tau^1})\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)}.$$

结合引理 3.13 知, 问题 (2.4), (2.5) 的解过程 $U(t,\tau)$ 在 $\mathcal{E}_t^1$ 上是渐近紧的. 应用定理 2.5, 定理 2.10 和定理 3.8 可知, 在 $\mathcal{E}_t^1$ 上存在时间依赖吸引子 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 且 $\mathcal{A}$ 是不变的, 即

$$U(t,\tau)A_\tau = A_t,$$

并且

$$\mathcal{A} = \{Z|t \to Z(t) \in \mathcal{E}_t^1 \text{ 且 } Z(t) \text{ 是过程 } U(t,\tau) \text{ 的 CBT}\}.$$

证毕. □

4. 总结与展望

本文基于 M.Conti 等学者所介绍的时间依赖吸引子理论, 探究了非局部扩散项 $a(l(u))$ 对带时间依赖记忆核的热传导方程的影响, 同时利用 Galerkin 逼近法, 分解技巧和积分估计法在时间依赖空间 $H_0^1(\Omega) \times L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ 中分析了带时间依赖记忆核和非局部扩散项的热传导方程解的长时间行为.

对于带时间依赖记忆核和非局部扩散项的系统, 近几年来也成为了广大学者的研究热点, 本文考虑的是非线性项满足次临界增长条件时的情况, 可考虑满足临界增长或超临界增长的情况. 此外还可以考虑时滞对本系统的影响.

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号：11961060; 11761062)。

参考文献

[1] Caraballo, T., Garrido-Atienza, M.J., Schmalfuß, B. and Valero, J. (2010) Global Attractor for a Non-Autonomous Integrodifferential Equation in Materials with Memory. *Nonlinear*

Analysis, **73**, 183-201. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.012

[2] Caraballo, T. and Real, J. (2004) Attractors for 2D-Navier-Stokes Models with Delays. *Journal of Differential Equations*, **205**, 271-297. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.04.012

[3] Giorgi, C., Pata, V. and Marzochi, A. (1998) Asymptotic Behavior of a Semilinear Problem in Heat Conduction with Memory. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **5**, 333-354. https://doi.org/10.1007/s000300050049

[4] Chipot, M. and Rodrigues, J.F. (1992) On a Class of Nonlocal Nonlinear Elliptic Problems. *ESAIM*, **26**, 447-467. https://doi.org/10.1051/m2an/1992260304471

[5] Chipot, M., Valente, V. and Caffarelli, G.V. (2003) Remarks on a Nonlocal Problem Involving the Dirichlet Energy. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **110**, 199-220.

[6] Xu, J.H., Zhang, Z.C. and Caraballo, T. (2021) Non-Autonomous Nonlocal Partial Differential Equations with Delay and Memory. *Journal of Differential Equations*, **270**, 505-546. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.07.037

[7] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **37**, 297-308. https://doi.org/10.1007/BF00251609

[8] Xu, J.H., Caraballo, T. and Valero, J. (2022) Asymptotic Behavior of a Semilinear Problem in Heat Conduction with Long Time Memory and Non-Local Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **327**, 418-447. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.04.033

[9] Conti, M., Danese, V., Giorgi, C. and Pata, V. (2018) A Model of Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels. *American Journal of Mathematics*, **140**, 349-389. https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0008

[10] Sun, Y. and Yang, Z.J. (2022) Longtime Dynamics for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Time-Dependent Memory Kernel. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **64**, Article 103432. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103432

[11] Li, Y.N. and Yang, Z.J. (2023) Exponential Attractor for the Viscoelastic Wave Model with Time-Dependent Memory Kernels. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **35**, 679-707. https://doi.org/10.1007/s10884-021-10035-z

[12] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[13] Borini, S. and Pata, V. (1999) Uniform Attractors for a Strongly Damped Wave Equation with Linear Memory. *Asymptotic Analysis*, **20**, 263-277.

[14] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **37**, 297-308. https://doi.org/10.1007/BF00251609

[15] Pata, V. and Squassina, M. (2005) On the Strongly Damped Wave Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 511-533. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1233-1

[16] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[17] Gatti, S., Miranville, A., Pata, V. and Zelik, S. (2008) Attractors for Semi-Linear Equations of Viscoelasticity with Very Low Dissipation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **38**, 1117-1138. https://doi.org/10.1216/RMJ-2008-38-4-1117

[18] Pata, V. and Zucchi, A. (2001) Attractors for a Damped Hyperbolic Equation with Linear Memory. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **11**, 505-529.

[19] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. In: *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/coll/049

[20] Simon, J. (1987) Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360

[21] Meng, F.J., Wu, J. and Zhao, C.X. (2019) Time-Dependent Global Attractor for Extensible Berger Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **469**, 1045-1069. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.050

[22] Liu, Y.F. (2015) Time-Dependent Global Attractor for the Nonclassical Diffusion Equations. *Applicable Analysis*, **94**, 1439-1449. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.933475