Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(9), 3999-4005**
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129391

Hans汉斯

带有比例时滞的分数阶双向联想记忆神经网络的有限时间稳定

张　杰

湖北汽车工业学院数理与光电工程学院，湖北　十堰

收稿日期：2023年8月12日；录用日期：2023年9月6日；发布日期：2023年9月14日

摘　要

本文研究了一类带有比例时滞的分数阶双向联想记忆神经网络的有限时间稳定性。基于一个新的广义Gronwall不等式，导出了阶数在0到1之间的分数阶系统的有限时间稳定的条件。最后通过数值仿真验证了所得条件的有效性。

关键词

比例时滞，Gronwall不等式，神经网络，有限时间稳定

Finite-Time Stability for Fractional-Order Bidirectional Associative Memory Neural Networks with Proportional Delay

Jie Zhang

School of Mathematics, Physics and Optoelectronic Engineering, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan Hubei

Received: Aug. 12th, 2023; accepted: Sep. 6th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

This paper focuses on the finite-time stability for a class of fractional-order bidirectional associative memory neural networks with proportional delay. Based on new generalized Gronwall inequality, a criterion is obtained to realize the finite-time stability of systems when the fractional order is between 0 and 1. Finally, the effectiveness of our criteria is supported by a numerical example.

文章引用：张杰. 带有比例时滞的分数阶双向联想记忆神经网络的有限时间稳定[J]. 应用数学进展，2023，12(9): 3999-4005. DOI: 10.12677/aam.2023.129391

Keywords

Proportional Delay, Gronwall Inequality, Neural Networks, Finite-Time Stability

1. 引言

分数阶微积分具有比整数阶微积分更好的性质，由分数阶微积分与神经网络相结合产生的分数阶神经网络，能够更加精确的描述实际系统。双向联想记忆(BAM)神经网络，在 1988 年由 Kosko [1]首次提出。因其独特的双层网络结构，使得在描述一些模型时更加准确，故而对分数阶 BAM 神经网络的研究，一直备受相关学者的关注[2] [3] [4]。目前，分数阶 BAM 神经网络已经被成功的应用在模式识别，信号处理，组合优化等领域[1] [5]。

现实生活中，时滞总是无法避免的。时滞的存在会对系统带来一些不良的影响，例如振荡，分叉以及不稳定，因此对时滞的研究十分有必要。而现有的工作，都是建立在有界时滞的基础上。然而，有界时滞在描述生物学，信息科学以及药学等领域的现象时，具有明显缺陷，需要借助无界时滞才能准确描述[6] [7]。比例时滞[8]，是一种无界的时变时滞，一些经典的分析方法并不能够直接处理这种时滞[9] [10]，因此，对于带有比例时滞的神经网络的研究，十分有必要。

作为系统动力学行为的重要问题之一，稳定性的定性和定量分析对于分数阶 BAM 神经网络是不可或缺的。在现有的文献中，关于分数阶神经网络的各种稳定性的研究已经取得了丰硕的成果。尤其是准一致稳定性，也被称为有限时间稳定性，关注的是系统在有限时间区间内的状态。由于大多数实际系统都是在有限的时间内工作的，所以分数阶系统的有限时间稳定性研究是有价值的。例如，Du [11]讨论了具有 Lipschitz 非线性的分数阶时滞系统的有限时间稳定，Wu 在文献[12]中给出了分数阶时滞神经网络的有限时间稳定的条件。值得注意的是，各种 Grownwall 不等式在研究有限时间稳定时都至关重要。例如 Xu [13]和 Syed Ali [14]都借助 Grownwall 不等式得到了关于分数阶神经网络和分数阶复值忆阻神经网络的有限时间稳定的条件。

基于前文的陈述，本文将借助 Grownwall 不等式来研究一类带有比例时滞的分数阶 BAM 神经网络的有限时间稳定问题。值得关注的是，本文得到的稳定性条件有着更好的代数形式，时滞的变化对有限时间稳定的影响会很小，即本文的稳定性条件是不依赖时滞的。

本文的其余内容包含四个部分。第二部分介绍分数阶微积分的基础知识，必要的说明假设以及研究模型；第三部分研究有限时间稳定的条件；第四部分数值仿真，证明条件的有效性；最后一部分，给出本文的结论。

2. 基础知识

定义 2.1 [15] 设 $f(t)$ 在区间 $[t_0,t]$ 上连续可积，且 $\alpha>0$，则 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶积分定义为：

$$ {}_{t_0}^{R}D_t^{-\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s, $$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数，即 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$。

定义 2.2 [16] 设 $f(t)$ 在区间 $[t_0,t]$ 上 n 阶可导，且 $f^{(n)}(t)$ 在区间 $[t_0,t]$ 上连续可积，则 $f(t)$ 的 Caputo 分数阶导数定义为：

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s, $$

其中 n 是大于 α 的最小整数，即 $n-1<\alpha<n$。

命题 2.3 [17] 假设 $k\in Z^{+}$ 且 $d_1,d_2,\cdots,d_k\in R$ 是非负数。对于任意 $p>1$，有下列不等式：

$$ \left(\sum_{i=1}^{k}d_i\right)^{p}\le k^{p-1}\sum_{i=1}^{k}d_i^{p}. $$

引理 2.4 [18] 令 $0<t_0<T<\infty$。假设 $a(t),b(t),d(t),u(t)$ 是定义在 $[t_0,T]$ 上的非负连续函数。对于 $0<q<1$，令 $\omega(t)$ 是定义在 $[qt_0,T]$ 上的非负连续函数且使得

$$ \begin{cases}\omega(t)\le a(t)+b(t)\int_{t_0}^{t}\left[d(s)\omega(s)+u(s)\omega(qs)\right]\mathrm{d}s,\\ \omega(t)\le\upsilon(t),\quad t\in[qt_0,t_0],\end{cases} \tag{1} $$

在 $[qt_0,T]$ 上成立，若 $a(t),b(t),\upsilon(t)$ 是非减函数且 $a(t_0)\ge\upsilon(t_0)$，则

$$ \omega(t)\le a(t)\exp\left\{b(t)\int_{s}^{t}\left[d(\tau)+u(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\},\ t\in[t_0,T]. \tag{2} $$

下面，考虑一类带有比例时滞的 Caputo 分数阶 BAM 神经网络：

$$ \begin{aligned} {}_{1}^{C}D_t^{\alpha}x_i(t)&=-c_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f_{1j}\left(y_j(t)\right)+\sum_{j=1}^{m}p_{ij}f_{2j}\left(y_j(qt)\right)+I_i,\\ {}_{1}^{C}D_t^{\alpha}y_j(t)&=-d_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{n}b_{ji}g_{1i}\left(x_i(t)\right)+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}g_{2i}\left(x_i(qt)\right)+J_j,\end{aligned} \tag{3} $$

其中，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$，${}_{1}^{C}D_t^{\alpha}\ (0<\alpha<1\text{或}1<\alpha<2)$ 代表 Caputo 分数阶导数。相应地，$x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别是在 t 时刻 X 层与 Y 层的状态向量。常数 $c_i>0$ 和 $d_j>0$ 代表自我调节参数。$a_{ij},p_{ij},b_{ji},r_{ji}$ 代表连接权重。对应地，比例时滞因子 q 满足 $0<q<1$。f_{kj} 和 g_{ki} 代表激活函数。I_i 和 J_j 代表外部输入。

注：qt 可以被写为 $qt=t-(1-q)t$。显然，传输时滞 $(1-q)t$ 是一个时变函数且在 $t\to+\infty$ 时趋于正无穷。因此，这种时滞是一种无界时滞。

假设 2.5 对于 $j=1,2,\cdots,n$，激活函数 $f_j(x)$ 和 $g_j(x)$ 对任意的 $x,y\in R$ 都满足下列 Lipschitz 条件：

$$ \left|f_j(x)-f_j(y)\right|\le\xi|x-y|,\quad \left|g_j(x)-g_j(y)\right|\le\eta|x-y|, $$

其中，$\xi,\eta>0$ 是两个常数。

$C([q,1],R^{d})$ 代表定义在区间 $[q,1]$ 上的所有连续向量值函数构成的空间。对于 $\beta(t)\in C([q,1],R^{d})$，其范数定义为 $\|\beta\|=\sup\limits_{q\le s\le q}\left(\sum\limits_{k=1}^{d}\left|\beta_i(s)\right|\right)$。

对于系统(3)，设 $(x(t),y(t))$ 和 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 是任意的两个满足不同初值条件的解。令 $u(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，且 $v(t)=y(t)-\bar{y}(t)$。对于 $\alpha\in(0,1)$，设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 满足如下初值条件：

$$ u(t)=\phi(t),\ v(t)=\psi(t),\ t\in[q,1], \tag{4} $$

其中，$\phi(t)\in C([q,1],R^{n})$，且 $\psi(t)\in C([q,1],R^{m})$。

定义 2.6 令 $0<\delta<\varepsilon$，$I_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $J_j=0\ (j=1,2,\cdots,m)$。对于 $\alpha\in(0,1)$，若 $\|\varphi\|+\|\psi\|<\delta$ 成

立时有

$$\|u(t)\|+\|v(t)\|<\varepsilon,\quad \forall t\in[1,T],$$

其中，$\|u(t)\|=\sum_{i=1}^{n}|u_i(t)|$ 且 $\|v(t)\|=\sum_{i=1}^{m}|v_j(t)|$，则系统(3)是关于 $\{\delta,\varepsilon,T\}$ 的有限时间稳定的。

3. 有限时间稳定分析

接下来讨论系统(3)实现有限时间稳定的条件。

为了方便讨论，先介绍一些符号。令 $c^*=\max\limits_{1\le i\le n}\{c_i\}$ 且 $d^*=\max\limits_{1\le j\le m}\{d_j\}$，记

$$a^*=\max_{1\le j\le m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right),\quad p^*=\max_{1\le j\le m}\left(\sum_{i=1}^{n}|p_{ij}|\right),$$

$$b^*=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m}|b_{ji}|\right),\quad r^*=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m}|r_{ji}|\right),$$

并记

$$\lambda_1=\max\{c^*+\xi_2 b^*,d^*+\xi_1 a^*\},\quad \lambda_2=\max\{\zeta_1 p^*,\zeta_2 r^*\}.$$

定理 3.1 令 $0<\delta<\varepsilon$，对于 $0<\alpha<1$，如果 $\max\{\|\varphi\|,\|\psi\|\}<\delta$ 且

$$3^{\frac{\theta-1}{\theta}}\mathrm{e}^{H(t-1)\theta\alpha}<\frac{\varepsilon}{\delta},\quad \forall t\in[1,T] \tag{5}$$

成立，其中 $H=\dfrac{3^{\theta-1}\left(\lambda_1^{\theta}+\lambda_2^{\theta}\right)}{\theta\left(\Gamma(\alpha)\left[\mu(\alpha-1)+1\right]^{1/\mu}\right)^{\theta}}$。那么系统(3)可以实现关于 $\{\delta,\varepsilon,T\}$ 的有限时间稳定。

证明： 假设 $(x(t),y(t))$ 和 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 是任意的两个满足不同初值条件的解。令 $u(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，且 $v(t)=y(t)-\bar{y}(t)$。假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 满足初值条件(4)。

由**定义 2.1** 得

$$u_i(t)=\varphi_i(1)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(t-\tau)^{\alpha-1}$$
$$\times\left\{-c_i u_i(\tau)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left[f_j(y_j(\tau))-f_j(y_j(\tau))\right]+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\left[g_j(y_j(q\tau))-g_j(y_j(q\tau))\right]\right\}\mathrm{d}\tau$$

由**假设 2.5** 得

$$|u_i(t)|=|\varphi_i(1)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left\{c_i|u_i(\tau)|+\sum_{j=1}^{m}\xi_1|a_{ij}||v_j(\tau)|+\sum_{j=1}^{m}\zeta_1|p_{ij}||v_j(q\tau)|\right\}\mathrm{d}\tau.$$

同理可得

$$|v_j(t)|=|\psi_j(1)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left\{d_j|v_j(\tau)|+\sum_{i=1}^{n}\xi_2|b_{ji}||u_i(\tau)|+\sum_{i=1}^{n}\zeta_2|r_{ji}||u_i(q\tau)|\right\}\mathrm{d}\tau.$$

进一步，

$$\|u(t)\|=\sum_{i=1}^{n}|u_i(t)|\le\|\varphi(1)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left\{c^*\|u(\tau)\|+\xi_1 a^*\|v(\tau)\|+\zeta_1 p^*\|v(q\tau)\|\right\}\mathrm{d}\tau,$$

和

$$\|v(t)\| \le \|\psi(1)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{d^*\|v(\tau)\| + \xi_2 b^*\|u(\tau)\| + \zeta_2 r^*\|u(q\tau)\|\right\}\mathrm{d}\tau.$$

由上两式，可得

$$\|u(t)\| + \|v(t)\| \le \|\varphi(1)\| + \|\psi(1)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\lambda_1\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right) + \lambda_2\|u(q\tau) + v(q\tau)\|\right\}\mathrm{d}\tau.$$

由柯西—施瓦茨不等式得

$$\begin{aligned}\|u(t)\| + \|v(t)\| &\le \|\varphi(1)\| + \|\psi(1)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\lambda_1\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right) + \lambda_2\|u(q\tau) + v(q\tau)\|\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\le \delta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\lambda_1\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right) + \lambda_2\|u(q\tau) + v(q\tau)\|\right\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

对于 $0<\alpha<1$，取正数 θ 满足 $\frac{1}{\theta}<\alpha<1$。设 μ 满足 $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}=1$。由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|u(t)\| + \|v(t)\| \le \delta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}&\left(\int_1^t (t-\tau)^{\mu(\alpha-1)}\mathrm{d}\tau\right)^{1/\mu} \\ &\times\left(\int_1^t\left(\lambda_1\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right) + \lambda_2\|u(q\tau) + v(q\tau)\|\right)^{\theta}\mathrm{d}\tau\right)^{1/\theta}.\end{aligned}$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\|u(t)\| + \|v(t)\| \le \delta + &\frac{(t-1)^{\alpha-1+1/\mu}}{\Gamma(\alpha)\left(\mu(\alpha-1)+1\right)^{1/\mu}} \\ &\times\left(\lambda_1\left(\int_1^t\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right)^{\theta}\mathrm{d}\tau\right)^{1/\theta} + \lambda_2\left(\int_1^t\left(\|u(q\tau)\| + \|v(q\tau)\|\right)^{\theta}\mathrm{d}\tau\right)^{1/\theta}\right).\end{aligned}$$

由**命题 2.3** 得

$$\begin{aligned}\left(\|u(t)\| + \|v(t)\|\right)^{\theta} &\le 3^{\theta-1}\delta^{\theta} + 3^{\theta-1}\left(\frac{(t-1)^{\alpha-1+1/\mu}}{\Gamma(\alpha)\left(\mu(\alpha-1)+1\right)^{1/\mu}}\right)^{\theta} \\ &\quad\times\left(\int_1^t\left(\lambda_1\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right)\right)^{\theta}\mathrm{d}\tau + \int_1^t\left(\lambda_2\left(\|u(q\tau)\| + \|v(q\tau)\|\right)\right)^{\theta}\mathrm{d}\tau\right) \\ &= 3^{\theta-1}\delta^{\theta} + 3^{\theta-1}\left(\frac{(t-1)^{\alpha-1+1/\mu}}{\Gamma(\alpha)\left(\mu(\alpha-1)+1\right)^{1/\mu}}\right)^{\theta} \\ &\quad\times\left(\int_1^t\left[\lambda_1^{\theta}\left(\|u(\tau)\| + \|v(\tau)\|\right)^{\theta} + \lambda_2^{\theta}\left(\|u(q\tau)\| + \|v(q\tau)\|\right)^{\theta}\right]\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

令 $w(t)=\left(\|u(t)\| + \|v(t)\|\right)^{\theta}$，$a(t)=3^{\theta-1}\delta^{\theta}$，$b(t)=3^{\theta-1}\left(\frac{(t-1)^{\alpha-1+1/\mu}}{\Gamma(\alpha)\left(\mu(\alpha-1)+1\right)^{1/\mu}}\right)^{\theta}$，$d(t)=\lambda_1^{\theta}$，$s(t)=\lambda_2^{\theta}$，$\kappa(t)=\left(\|\varphi\| + \|\psi\|\right)^{\theta}$。显然 $a(t),b(t)$ 和 $\kappa(t)$ 是非减函数，且 $a(1)\ge\kappa(1)$。同时，上式简化为

$$w(t) \le a(t) + b(t)\int_1^t \left[d(\tau)w(\tau) + s(\tau)w(q\tau)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

由**引理 2.4** 得

$$w(t) \le a(t)\exp\left\{b(t)\int_1^t \left[d(\tau) + s(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}.$$

进一步有

$$\|u(t)\| + \|v(t)\| \le 3^{\frac{\theta-1}{\theta}}\delta \mathrm{e}^{H(t-1)\theta\alpha},$$

其中 $H = \dfrac{3^{\theta-1}\left(\lambda_1^\theta + \lambda_2^\theta\right)}{\theta\left(\Gamma(\alpha)\left[\mu(\alpha-1)+1\right]^{1/\mu}\right)^\theta}$。由**定义 2.6** 可知，对任意的 $\forall t \in [1,T]$ 都有 $\|u(t)\| + \|v(t)\| < \varepsilon$。因此系统是有限时间稳定的。

4. 数值仿真

本节中，给出一个数值仿真，验证结论的有效性。考虑如下模型：

$$\begin{aligned} {}_1^C D_t^\alpha x(t) &= -Cx(t) + Af_1(y(t)) + Pg_1(y(qt)) + I, \\ {}_1^C D_t^\alpha y(t) &= -Dy(t) + Bf_2(x(t)) + Rg_2(x(qt)) + J. \end{aligned} \tag{7}$$

假设 $(x(t), y(t))$ 和 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是此系统具有不同初值的任意两组解.

例 1 对于系统(7)，取如下参数：

$$\alpha = 0.8,\ q = 0.25,\ x(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)^{\mathrm{T}},\ y(t) = \left(y_1(t), y_2(t)\right)^{\mathrm{T}}, C = diag(0.13, 0.25), D = diag(0.1, 0.2),$$

$$f_1(y(t)) = \left(\cos(y_1(t)), \cos(y_2(t))\right)^{\mathrm{T}},\ f_2(x(t)) = \left(\cos(x_1(t)), \cos(x_2(t))\right)^{\mathrm{T}},$$

$$g_1(y(t)) = \left(\tanh(y_1(qt)), \tanh(y_2(qt))\right)^{\mathrm{T}},\ g_2(x(t)) = \left(\tanh(x_1(qt)), \tanh(x_2(qt))\right)^{\mathrm{T}},$$

$$I = (0.021, 0.015)^{\mathrm{T}},\ J = (0.012, 0.01)^{\mathrm{T}},$$

且

$$A = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.09 & 0.05 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.048 \\ 0.032 & 0.029 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.013 \\ 0.09 & 0.027 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.015 \\ 0.01 & 0.054 \end{pmatrix},$$

通过计算，可取 $\xi = \eta = 1$。当 $t \in [0.25, 1]$ 时，设 $(x(t), y(t))$ 和 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 满足如下初值条件：

$$x(t) = (1.068, 2.33)^{\mathrm{T}},\ y(t) = (2.251, 1.474)^{\mathrm{T}}.$$

$$\bar{x}(t) = (1.058, 2.345)^{\mathrm{T}},\ \bar{y}(t) = (2.261, 1.46)^{\mathrm{T}}.$$

根据上述数据，计算得到 $\lambda_1 = 0.42, \lambda_2 = 0.077, H = 1.0509$。取 $\delta = 0.05$。设 $\mu = 1.8, \theta = 2.25$。显然 $\frac{1}{\theta} < \alpha < 1$ 和 $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$。令 $\varepsilon = 0.5$。由条件(5)可得稳定时间 $T_s = 1.8946$。当 $\|\varphi\| + \|\psi\| < 0.05$ 时，对任意 $t \in [1, 1.8946]$，$\|u(t)\| + \|v(t)\| < 0.5$ 总成立。因此，**定理 3.1** 的正确性得到了验证。

5. 结论

本文讨论了一类带有比例时滞的分数阶 BAM 神经网络的有限时间稳定性问题。基于一个带有比例时

滞的 Gronwall 不等式，以及一些分析方法，得到了系统有限时间稳定的条件。与以往不同的是，本文的条件在形式上更加简单，且具有较小的保守性。最后，通过数值仿真的计算，证明了本文结论的有效性。

参考文献

[1] Kosko, B. (1988) Bidirectional Associative Memories. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics*, **18**, 49-60. https://doi.org/10.1109/21.87054

[2] Acevedo-Mosqueda, M., Yanez-Marquez, C. and Lopez-Yanez, I. (2007) Alpha-Beta Bidirectional Associative Memories: Theory and Applications. *Neural Processing Letters*, **26**, 1-40. https://doi.org/10.1007/s11063-007-9040-2

[3] Balasubramaniam, P. and Vembarasan, V. (2011) Asymptotic Stability of BAM Neural Networks of Neutral-Type with Impulsive Effects and Time Delay in the Leakage Term. *International Journal of Computer Mathematics*, **88**, 3271-3291. https://doi.org/10.1080/00207160.2011.591388

[4] Huang, B.D. and Cao, J.D. (2018) Impact of Leakage Delay on Bifurcation in High-Order Fractional BAM Neural Networks. *Neural Networks*, **98**, 223-235. https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.11.020

[5] Hansan, S. and Siong, N. (1997) A Parallel Processing VLSI BAM Engine. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **8**, 424-436. https://doi.org/10.1109/72.557697

[6] Cui, N., Jiang, H.J., Hu, C. and Abdurahman, A. (2018) Global Asymptotic and Robust Stability of Inertial Neural Networks with Proportional Delays. *Neurocomputing*, **272**, 326-333. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.07.001

[7] Zhang, W.L., Li, C.D., Yang, S.J. and Yang, X.S. (2018) Synchronization Criteria for Neural Networks with Proportional Delays via Quantized Control. *Nonlinear Dynamics*, **94**, 541-551. https://doi.org/10.1007/s11071-018-4376-x

[8] Dovrolis, C., Stiliadis, D. and Ramanathan, P. (2022) Proportional Differentiated Services: Delay Differentiation and Packet Scheduling. *IEEE*/*ACM Transactions on Networking*, **10**, 12-26. https://doi.org/10.1109/90.986503

[9] Zhang, S., Yu, Y. and Yu, J. (2017) LMI Conditions for Global Stability of Fractional-Order Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **28**, 2423-2433. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2016.2574842

[10] Ding, Z., Zeng, Z. and Wang, L. (2018) Robust Finite-Time Stabilization of Fractional-Order Neural Networks with Discontinuous and Continuous Activation Functions under Uncertainty. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**, 1477-1490. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2017.2675442

[11] Du, F. and Lu, J. (2020) Finite-Time Stability of Neutral Fractional Order Time Delay Systems with Lipschitz Nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, **375**, Article ID: 125079. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125079

[12] Wu, R., Hei, X. and Chen, L. (2013) Finite-Time Stability of Fractional-Order Neural Networks with Delay. *Communications in Theoretical Physics*, **60**, 189-193. https://doi.org/10.1088/0253-6102/60/2/08

[13] Xu, C. and Li, P. (2019) On Finite-Time Stability for Fractional-Order Neural Networks with Proportional Delays. *Neural Processing Letters*, **50**, 1241-1256. https://doi.org/10.1007/s11063-018-9917-2

[14] Syed Ali, M., Narayanan, G., Orman, Z., Shekher, V. and Arik, S. (2020) Finite Time Stability Analysis of Fractional-Order Complex-Valued Memristive Neural Networks with Proportional Delays. *Neural Processing Letters*, **51**, 407-426. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10097-7

[15] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Academic Press, New York.

[16] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Application of Fractional Differential Equations. Elsevier, New York.

[17] Kuczma, M. (2009) An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauthy's Equation and Jensen's Inequality. Birkh Birkhäuseruser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8749-5

[18] Yang, Z., Zhang, J., Hu, J. and Mei, J. (2021) New Results on Finite-Time Stability for Fractional-Order Neural Networks with Proportional Delay. *Neurocomputing*, **442**, 327-336. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.02.082