Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(6), 2749-2757**
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126275

Hans汉斯

粘弹性相分离模型在二维空间中强解的整体存在性

裴小田

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年5月13日；录用日期：2023年6月7日；发布日期：2023年6月15日

摘 要

本文给出了粘弹性相分离模型在二维空间下强解的整体存在性，使用Gagliardo-Nirenberg不等式、Sobolev不等式和Gronwall不等式进行证明，还使用了先验估计的证明方法。

关键词

粘弹性相分离模型，强解，二维空间

The Overall Existence of Strong Solution for Viscoelastic Phase Separation Model in the Two Dimensional Space

Xiaotian Pei

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 13th, 2023; accepted: Jun. 7th, 2023; published: Jun. 15th, 2023

Abstract

We present the overall existence of strong solutions for the viscoelastic phase separation model in two dimensions, using Gagliardo-Nirenberg inequality, Sobolev inequality and Gronwall inequality, and also the proof method of prior estimation.

Keywords

Viscoelastic Phase Separation Model, Strong Solution, Two Dimensional Space

文章引用: 裴小田. 粘弹性相分离模型在二维空间中强解的整体存在性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2749-2757.
DOI: 10.12677/aam.2023.126275

1. 介绍

本文讨论在二维空间下粘弹性相分离模型强解的存在性

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\cdot\nabla\phi=div\left(m(\phi)\nabla\mu\right)-\kappa div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\cdot\nabla q=-\frac{1}{\tau(\phi)}q+A(\phi)\Delta\left(A(\phi)q\right)-\kappa A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)+\varepsilon\Delta q, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=div\left(\eta(\phi)\left(\nabla u+(\nabla u)^{\mathrm{T}}\right)\right)-\nabla P+\nabla\phi\mu, \tag{1.3}$$

$$div(u)=0, \tag{1.4}$$

$$\mu=-\Delta\phi+f(\phi), \tag{1.5}$$

其中 ϕ 为聚合物分子的体积分数，q 为聚合物相互作用产生的体应力，u 为由溶剂与聚合物速度组成的体积平均速度，$m(\phi)$ 和 $n(\phi)$ 代表移动性函数，$\tau(\phi)$ 代表广义弛豫时间，$A(\phi)$ 代表体模量，$\eta(\phi)$ 为粘度，ε 和 κ 是正常数，$f(\phi)=F'(\phi)$ 而 $F(\phi)=a\phi^2(\phi-1)^2$ 且满足 $|F(s)|\le c_1|s|^p+c_2$，$|F'(\phi)|\le c_3|\phi|^{p-1}+c_4$，$|F''(\phi)|\le c_5|s|^{p-2}+c_6$，对于 $p\ge 2$，其中，$F\in C^2(R)$ 并且 $c_i>0$，对于 $i\in\{1,\cdots,6\}$。

这里 $\Omega\in R^2$ 是具有利普希茨边界条件的有界域，该模型具有以下初始条件和边界条件

$$(\phi,q,u)\big|_{t=0}=(\phi_0,q_0,u_0),\partial_n\phi\big|_{\partial\Omega}=\partial_n\mu\big|_{\partial\Omega}=\partial_n q\big|_{\partial\Omega}=0,u\big|_{\partial\Omega}=0.$$

以下是论文中涉及到的符号假设。在后续内容中，将假设所有共函数都是连续正有界的，$0<\tau_1\le\tau(s)\le\tau_2$，$0<A_1\le A(s)\le A_2$，$0<\eta_1\le\eta(s)\le\eta_2$ 对于 $s\in R$，其中 $\|\tau'\|_\infty\le\tau_2'$，$\|A'\|_\infty\le A_2'$，$\|A''\|_\infty\le A_2''$，$\|\eta'\|_\infty\le\eta_2'$。还需假设函数对于 m,n 是连续正有界的，表示如下 $0<m_1\le m(s)\le m_2$，$0<n_1\le n(s)\le n_2$ 对于 $s\in R$，其中 $\|m'\|_\infty\le m_2'$，$\|n'\|_\infty\le n_2'$。

二元流体的相分离是软物质物理学中的一个基本过程。对于牛顿流体来说，这种现象是很普遍的。粘弹性相分离可以用由相位演化的 Cahn-Hilliard 方程、低流体演化的 Navier-Stokes 方程和粘弹性构象张量的时间演化组成的耦合系统来描述。其中 ϕ 的相位变量主要受自由能泛函的低梯度控制，并与所涉及过程的热力学密切相关。对于该模型已经有人得出三维空间整体弱解的存在性，而更加复杂的模型如[1]中，也已经得出模型二维空间弱解的存在性以及弱解强解唯一性的结论，本文主要是对[1]中的模型简化处理后的方程，讨论研究其在二维空间的整体强解的存在性问题，采用对方程进行更高阶的处理方式，故而得到比[1]中的解阶数更高的整体强解，这是本文的重要创新点，这样得到的强解识别性更强，但是进行更高阶处理的同时，对后续估计工作增加的难度，这也是本文的主要难点。此外，本文对原方程进行简单的处理，并且增加了控制项，使得后续的计算证明变得更加简便明确。

本文使用的模型类似于[1]、[2]和[3]中的粘弹性相分离模型，主要研究粘弹性考虑了弹性构象张量的时间演化的模糊彼得林模型，而不是经典 Oldroyd-B 模型。彼得林模型[2]可以看作是经典 Oldroyd-B 模型的非线性推广。因此，本文整体强解的存在性结果也适用于[3]和[4]中的粘弹性相分离模型。文献[5]中研究了强解的良好性，文中使用的迁移率函数和融合共聚物的模型可以在[6]和[7]中得到详细解释。更多的关于粘弹性相分离模型的研究，请读者参考[8] [9] [10]。

主要结论为以下定理

定理 1 假设$(\phi_0,q_0,u_0)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$，这里$\Omega$是$R^2$上的光滑区域，对于任意有限时间$T>0$，方程(1.1)~(1.5)在区域$\Omega$上存在强解$(\phi,q,u)$。

下面将介绍一些定理证明所用到的定义和引理。

2. 准备工作

以下定义和引理参考[1] [2]

定义 2.1 假设$(\phi_0,q_0,u_0)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$，这里$\Omega$是$R^2$上光滑区域，若对$(\phi,q,u)$有$\phi\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$，$q\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$，$u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$。$(\phi,q,u)$是方程(1.1)~(1.5)的弱解。

定义 2.2 假设$(\phi_0,q_0,u_0)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$，这里$\Omega$是$R^2$上的光滑区域，对于任意有限时间$T>0$，若$(\phi,q,u)$满足$\phi\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$，$q\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$，$u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$。$(\phi,q,u)$是方程(1.1)~(1.5)的强解。

引理 2.1 (Sobolev 不等式)设p满足$1\le p<n$，对于一切$u\in C_0^\infty(R^n)$，

$$\|u\|_{L^q}\le C\|Du\|_{L^p},$$

其中q满足$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$。

引理 2.2 (Gagliardo-Nirenberg 不等式)对于$0<q,r\le\infty$，$0<\alpha<1$，$u\in W^{m,r}(\Omega)$，这里Ω是边界光滑的区域，有

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p}\le C\left\|D^m u\right\|_{L^r}^{\alpha}\|u\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

其中$\frac{j}{m}\le\alpha<1$，$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{q}$。

引理 2.2 (Gronwall 不等式)设η是$[0,T]$到$[0,\infty)$的连续函数，$\eta(t)\ge 0$且满足

$$\eta'(t)\le\phi(t)\eta(t)+\psi(t)\text{，有 }\eta(t)\le e^{\int_0^t\phi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)ds\right]\text{。}$$

3. 二维空间的强解存在性证明

本节中将给出本文中的定理 1 的证明。

证明：若要证明定理 1，则要假设解(ϕ,q,u)是光滑的，对(1.1)作用Δ，右乘$\Delta\phi$，对(1.2)作用∇，右乘∇q，对(1.3)右乘$-\Delta u$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\Delta\phi|^2dx&=-\int_\Omega\Delta(u\cdot\nabla\phi)\Delta\phi dx+\int_\Omega\Delta\left(div\left(m(\phi)\nabla\mu\right)\right)\Delta\phi-\int_\Omega\Delta\left(\kappa div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right)\right)\Delta\phi dx\\&=-\int_\Omega m(\phi)\left|\Delta^2\phi\right|^2dx-\int_\Omega\Delta(u\cdot\nabla\phi)\Delta\phi dx+\int_\Omega\Delta\left(m'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu+m(\phi)\Delta F'(\phi)\right)\Delta\phi dx\\&\quad-\int_\Omega\kappa div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right)\Delta^2\phi dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla q|^2dx&=-\int_\Omega\nabla(u\cdot\nabla q)\nabla q dx-\int_\Omega\nabla\left(\frac{1}{\tau(\phi)}q\right)\nabla q dx+\int_\Omega\nabla\left(A(\phi)\Delta\left(A(\phi)q\right)\right)\nabla q dx\\&\quad-\int_\Omega\nabla\left(\kappa A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)\right)\nabla q dx+\int_\Omega\nabla(\varepsilon\Delta q)\nabla q dx\\&=-\int_\Omega\varepsilon|\Delta q|^2dx-\int_\Omega\frac{1}{\tau(\phi)}|\nabla q|^2dx-\int_\Omega\left|A(\phi)\Delta q\right|^2dx-\int_\Omega\nabla(u\cdot\nabla q)\nabla q dx\\&\quad-\int_\Omega\nabla\left(\frac{1}{\tau(\phi)}q\right)\nabla q dx-\int_\Omega A(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2q\Delta q dx-\int_\Omega A(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta q dx\\&\quad-\int_\Omega 2A(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta q dx-\int_\Omega\nabla\left(\kappa A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)\right)\nabla q dx,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega (u\cdot\nabla)u(-\Delta u)\mathrm{d}x + \int_\Omega div(\eta(\phi)Du)(-\Delta u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla P(-\Delta u)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\phi\mu(-\Delta u)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_\Omega \eta(\phi)|\Delta u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u(-\Delta u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \eta'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla u\Delta u\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\phi\mu\Delta u\mathrm{d}x,$$

其中 $I_1 = -\int_\Omega \Delta(u\cdot\nabla\phi)\Delta\phi\mathrm{d}x$ 结合 Young's 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，得到

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_\Omega (\partial_k u\cdot\nabla)\partial_k\phi\Delta\phi\mathrm{d}x + \int_\Omega (u\cdot\nabla)\Delta\phi\Delta\phi\mathrm{d}x \\ &\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\Delta\phi\|_{L^4}^2 \\ &\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2} \\ &\le \varepsilon\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

再令 $I_2 = \int_\Omega \Delta\left(m'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu + m(\phi)\Delta F'(\phi)\right)\Delta\phi\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \Delta\left(m'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu + m(\phi)\Delta F'(\phi)\right)\Delta\phi\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu\Delta^2\phi\mathrm{d}x + \int_\Omega m(\phi)\Delta F'(\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &= I_{21} + I_{22}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(-\Delta\phi + |\phi|^{p-1} + C\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi(\nabla\Delta\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x + \int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(|\phi|^3\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x + C\int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\Delta^2\phi\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

结合 Young's 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，对 I_{21} 的第一部分进行估计得到

$$\begin{aligned} &\int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi(\nabla\Delta\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &\le c\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^4}\|\Delta^2\phi\|_{L^4} \\ &\le c\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\le c\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon_1)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

同理，对 I_{21} 的第二部分进行估计得到

$$\begin{aligned} &\int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(|\phi|^3\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &\le c\|\nabla\phi\|_{L^4}^2\|\phi\|_{L^\infty}^2\|\Delta^2\phi\|_{L^2} \\ &\le c\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\le \varepsilon_2\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon_2)\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

再对 I_{21} 的第三部分进行估计得到

$$\begin{aligned}&C\int_\Omega m'(\phi)\nabla\phi\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le c\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le c\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_3\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon_3)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

将上述不等式相加可以得到

$$I_{21}\le\varepsilon\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right).$$

对于

$$\begin{aligned}I_{22}&=\int_\Omega m(\phi)\Delta F'(\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le\int_\Omega m(\phi)\left(|\phi|(\nabla\phi)^2+|\phi|^{p-1}\Delta\phi+C\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le\int_\Omega m(\phi)|\phi|(\nabla\phi)^2\Delta^2\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega m(\phi)|\phi|^2\Delta\phi\Delta^2\phi\mathrm{d}x+C\int_\Omega m(\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

结合 Young's 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，对 I_{22} 的第一部分进行估计得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega m(\phi)|\phi|(\nabla\phi)^2\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le C\|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\phi\|_{L^4}^2\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon_1)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

同理，对 I_{22} 的第二部分进行估计得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega m(\phi)|\phi|^2\Delta\phi\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le c\|\phi\|_{L^\infty}^2\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_2\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon_2)\|\Delta\phi\|_{L^2}^4,\end{aligned}$$

将上述不等式相加可以得到

$$I_{22}\le\varepsilon\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^4\right).$$

令 $I_3=-\int_\Omega\kappa div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x$ 则

$$\begin{aligned}I_3&=\int_\Omega\kappa div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\kappa n'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(A(\phi)q\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\kappa n(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2q\Delta^2\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\kappa n(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega2\kappa n(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta^2\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\kappa n(\phi)A(\phi)\Delta q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&=I_{31}+I_{32}+I_{33}+I_{34}+I_{35},\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}I_{31}&=\int_\Omega\kappa n'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(A(\phi)q\right)\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&=\kappa\int_\Omega n'(\phi)A(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta^2\phi\mathrm{d}x+\kappa\int_\Omega n'(\phi)A'(\phi)(\nabla\phi)^2q\Delta^2\phi\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

同理，对 I_{31} 的第一部分进行估计得到

$$\begin{aligned}&\kappa\int_\Omega n'(\phi)A(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le\kappa c\|\nabla\phi\|_{L^4}\|\nabla q\|_{L^4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

同理，对 I_{31} 的第二部分进行估计得到

$$\kappa\int_\Omega n'(\phi)A'(\phi)(\nabla\phi)^2q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\le\kappa c\|q\|_{L^4}\left\|(\nabla\phi)^2\right\|_{L^4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2$$

将上述不等式相加可以得到

$$I_{31}\le2\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2,$$

由于 I_{32} 和 I_{31} 的第一部分估计方式相同，而 I_{34} 和 I_{31} 的第二部分估计方式相同，所以

$$\begin{aligned}&I_{32}\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2\\&I_{34}\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

结合 Young’s 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，对 I_{33} 进行估计得到

$$\begin{aligned}I_{33}&=\kappa\int_\Omega n(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le\kappa c\|q\|_{L^4}\|\Delta\phi\|_{L^4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

同理，对 I_{35} 进行估计得到

$$\begin{aligned}I_{35}&=\int_\Omega\kappa n(\phi)A(\phi)\Delta q\Delta^2\phi\mathrm{d}x\\&\le\kappa c\|\Delta q\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\\&\le\varepsilon_1\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\nabla q\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

将上述不等式相加得到 I_3 的估计为

$$I_3\le\varepsilon\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+\varepsilon_1\|\Delta q\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+c(\kappa,\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2\right).$$

令 $I_4=-\int_\Omega\nabla(u\cdot\nabla q)\nabla q\mathrm{d}x$，结合 Young’s 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，得到

$$\begin{aligned}I_4&=\int_\Omega\nabla(u\cdot\nabla q)\nabla q\mathrm{d}x\\&\le C\|u\|_{L^4}\|\nabla q\|_{L^4}\|\Delta q\|_{L^2}\\&\le\varepsilon\|\Delta q\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

令 $I_5=-\int_\Omega\nabla\left(\frac{1}{\tau(\phi)}q\right)\nabla q\mathrm{d}x$，同上可以得到

$$I_5=\int_\Omega\nabla\left(\frac{1}{\tau(\phi)}q\right)\nabla q\mathrm{d}x\le\varepsilon\|\nabla q\|_{L^2}^2+c(\tau)\|\nabla\phi\|_{L^2}^2\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|q\|_{L^2}^2.$$

而对 I_6 的估计可以写为

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_\Omega \nabla\left(A(\phi)\Delta\left(A(\phi)q\right)\right)\nabla q\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega A(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\Delta q\mathrm{d}x + \int_\Omega A(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta q\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega 2A(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta q\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2\mathrm{d}x \\ &= I_{61}+I_{62}+I_{63}+I_{64}, \end{aligned}$$

对 I_{61}, I_{62}, I_{63} 分别进行估计可以得到

$$\begin{aligned} I_{61} &= \int_\Omega A(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\Delta q\mathrm{d}x \le \varepsilon\left\|A(\phi)\Delta q\right\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon)\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2, \\ I_{62} &= \int_\Omega A(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta q\mathrm{d}x \le \varepsilon\|\Delta q\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon)\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\|q\|_{L^2}^2, \\ I_{63} &= \int_\Omega 2A(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta q\mathrm{d}x \le \varepsilon\|\Delta q\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

将上述不等式相加可以得到

$$I_6 \le \varepsilon_1\left\|A(\phi)\Delta q\right\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\|q\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla q\|_{L^2}^2\right)$$

令 $I_7 = -\int_\Omega \nabla\left(\kappa A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)\right)\nabla q\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned} I_7 &= \kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q\nabla\phi\cdot\nabla\mu\mathrm{d}x + \kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q\Delta^2\phi\mathrm{d}x + \kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q\Delta F'(\phi)\mathrm{d}x \\ &= I_{71}+I_{72}+I_{73}, \end{aligned}$$

其中 I_{71} 可以写成下式

$$\begin{aligned} I_{71} &= \kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q\nabla\phi\cdot\nabla\mu\mathrm{d}x \\ &= \kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q\nabla\phi\cdot\nabla\Delta\phi\mathrm{d}x + \kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q(\nabla\phi)^2|\phi|^2\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

对 I_{71} 的第一部分进行估计可以得到

$$\begin{aligned} &\kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q\nabla\phi\cdot\nabla\Delta\phi\mathrm{d}x \\ &\le \kappa c\|\Delta q\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^4}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^4} \\ &\le \varepsilon_1\|\Delta q\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2\left\|\Delta^2\phi\right\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\kappa)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

对 I_{71} 的第二部分进行估计可以得到

$$\kappa\int_\Omega A(\phi)n'(\phi)\Delta q(\nabla\phi)^2|\phi|^2\mathrm{d}x \le c\kappa\|\phi\|_{L^\infty}^2\|\Delta q\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^4}^2 \le \varepsilon\|\Delta q\|_{L^2}^2 + c(\varepsilon)\|\Delta\phi\|_{L^2}^4,$$

由于 I_{72} 和 I_{35} 的估计方式相同，所以

$$\begin{aligned} I_{72} &\le \int_\Omega \kappa n(\phi)A(\phi)\Delta q\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\ &\le \kappa c\|\Delta q\|_{L^2}\left\|\Delta^2\phi\right\|_{L^2} \\ &\le \varepsilon_1\left\|\Delta^2\phi\right\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2\|\Delta q\|_{L^2}^2 + c(\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\nabla q\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

同理 I_{73} 可以也写成下式

$$\begin{aligned} I_{73} &= \kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q\Delta F'(\phi)\mathrm{d}x \\ &= \kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q|\phi|(\nabla\phi)^2\mathrm{d}x + \kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q|\phi|^2\Delta\phi\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

对 I_{73} 的第一部分进行估计可以得到

$$\begin{aligned}&\kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q|\phi|(\nabla\phi)^2\,\mathrm{d}x\\&\le\kappa c\|\Delta q\|_{L^2}\|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\phi\|_{L^4}^2\\&\le\varepsilon_1\|\Delta q\|_{L^2}^2+\varepsilon_2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\kappa)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

对 I_{73} 的第二部分进行估计可以得到

$$\kappa\int_\Omega A(\phi)n(\phi)\Delta q|\phi|^2\Delta\phi\mathrm{d}x\le\kappa c\|\phi\|_{L^\infty}^2\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\le\varepsilon\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\|\Delta\phi\|_{L^2}^4,$$

令 $I_8=\int_\Omega(u\cdot\nabla)u(-\Delta u)\mathrm{d}x$，结合 Young’s 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Hölder 不等式，嵌入定理，得到

$$I_8=\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\cdot(\Delta u)\mathrm{d}x\le c\|u\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}\|\Delta u\|_{L^2}\le\varepsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^4.$$

令 $I_9=-\int_\Omega\eta'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla u\Delta u\mathrm{d}x$，同理可以得到

$$I_9\le c\|\nabla\phi\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}\|\Delta u\|_{L^2}\le\varepsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

令 $I_{10}=-\int_\Omega\nabla\phi\mu\Delta u\mathrm{d}x$，同理可以得到

$$I_{10}=\int_\Omega\nabla\phi F'(\phi)\Delta u\mathrm{d}x\le c\|\phi\|_{L^\infty}^3\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2}\le\varepsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2+c(\varepsilon)\|\nabla\phi\|_{L^2}^4\|\nabla u\|_{L^2}^4.$$

再综合对 $I_1\sim I_{10}$ 的估计可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(|\Delta\phi|^2+|\nabla q|^2+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\\&\le C_1\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+1\right)\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)+C_2\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

由定理 2.1 的假设条件可知，对任意有限时间 T

$$\int_0^T\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+1\right)\mathrm{d}x\le C,$$

$$\int_0^T\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\le C,$$

又因为(1.1)~(1.5)对任意有限时间 T 存在弱解，所以有

$$\int_0^T\|\nabla\phi\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\le C,\int_0^T\|\nabla q\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\le C,\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\le C,$$

设 $A(t)=\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2,t\in(0,T)$ 且 $A(0)=\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2+\|\nabla q_0\|_{L^2}^2+\|\nabla u_0\|_{L^2}^2$，
利用引理 2.2 (Gronwall 不等式)，带入对 $I_1\sim I_{10}$ 的估计可以得到

$$\begin{aligned}&\sup A(t)\\&\le\left(A(0)+\int_0^T\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\right)\exp\left\{T+\int_0^T\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x\right\}\\&<\infty\end{aligned}$$

综上所述，可以证明定理 2.1 成立，那么由弱解的存在性，可以得到粘弹性相分离模型在二维空间中整体强解的存在性。

参考文献

[1] Brunk, A. and Lukacova-Medvidova, M. (2022) Global Existence of Weak Solutions to Viscoelastic Phase Separation:

Part I Regular Case. arXiv:1907.03480v3.

[2] Lukacova-Medvidova, M., Mizerova, H. and Necasova, S. (2015) Global Existence and Uniqueness Result for the Diffusive Peterlin Viscoelastic Model. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **120**, 154-170. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.03.001

[3] Strasser, P.J., Tierra, G., Dunweg, B. and Lukacova-Medvidova, M. (2019) Energy-Stable Linearschemes for Polymer-Solvent Phase Field Models. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 125-143.

[4] Zhou, D., Zhang, P.W. and E, W.N. (2006) Modified Models of Polymer Phase Separation. *Physical Review E*, **73**, Article ID: 061801. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.061801

[5] Chupin, L. (2003) Existence Result for a Mixture of Non Newtonian Flows with Stress Diffusion Using the Cahn-Hilliard Formulation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **3**, 45-68. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2003.3.45

[6] Abels, H. (2009) On a Diffuse Interface Model for Two-Phase Flows of Viscous, Incompressible Fluids with Matched Densities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **194**, 463-506. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0160-2

[7] Abels, H., Depner, D. and Garcke, H. (2013) On an Incompressible Navier-Stokes/Cahn-Hilliard System with Degenerate Mobility. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Nom Linéaire*, **30**, 1175-1190. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2013.01.002

[8] Spiller, D., Brunk, A., Habrich, O., Egger, H., Lukacova-Medvidova, M. and Dunweg, B. (2021) Systematic Derivation of Hydrodynamic Equations for Viscoelastic Phase Separation. *Journal of Physics*: *Condensed Matter*, **33**, Article ID: 364001. https://doi.org/10.1088/1361-648X/ac0d17

[9] Tanaka, H. (2000) Viscoelastic Phase Separation. *Journal of Physics*: *Condensed Matter*, **12**, R207. https://doi.org/10.1088/0953-8984/12/15/201

[10] Lukacova-Medvidova, M., Mizerova, H., Notsu, H. and Tabata, M. (2017) Numerical Analysis of the Oseen-Type Peterlin Viscoelastic Model by the Stabilized Lagrange-Galerkin Method. Part II: A Linear Scheme. *ESAIM*: *M2AN*, **51**, 1663-1689. https://doi.org/10.1051/m2an/2017032