Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(12), 9066-9071**
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112956

Frobenius 扩张下的G_C-投射(内射)复形

徐启帆

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月21日；发布日期：2022年12月30日

摘 要

本文利用类比归纳的方法，证明了G_C-投射(G_C-内射)复形是投射(内射)可解的，以及在Frobenius扩张下，复形的G_C-投射性和内射性是保持的。进一步，得到了在Frobenius 扩张下，复形的G_C-投射维数和内射维数是不变的。

关键词

G_C-投射复形，G_C-内射复形，G_C-投射复形维数，G_C-内射复形维数，Frobenius 扩张

G_C-Projective (Injective) Complex under Frobenius Extension

Qifan Xu

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Nov. 26^{th}, 2022; accepted: Dec. 21^{st}, 2022; published: Dec. 30^{th}, 2022

Abstract

In this paper, by using the method of analogical induction, we prove that G_C-projective (G_C-injective) complexes are projectively (injectively) resolving and the G_C-projective (G_C-injective) properties of the complexes are preserved under the Frobenius exten-

文章引用: 徐启帆. Frobenius 扩张下的G_C-投射(内射)复形[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 9066-9071.
DOI: 10.12677/aam.2022.1112956

sion. Further, we obtain that G_C-projective (G_C-injective) dimensions of the complexes are invariant under the Frobenius extension.

Keywords

G_C-Projective Complex, G_C-Injective Complex, G_C-Projective Complex Dimensions, G_C-Injective Complex Dimensions, Frobenius Extension

1. 引言

2007 年, Holm 和 White 在文献 [1] 中把半对偶模的概念推广到一般的结合环上, 引入 C-投射对象, C-内射对象等概念, 并以此研究 Auslander 类和 Bass 类. 在此基础上, White [2]于2010 年研究了与半对偶模相关 Gorenstein 范畴, 她引入了 C-Gorenstein 投射模, 并把它记为 G_C-投射模.

近年来, Gorenstein 同调理论受到越来越多的学者的关注. 2011 年, 在 G_C-投射模与 Gorenstein 投射(内射)复形的基础上, 杨春花等人在文献 [3, 4] 中定义了 C-投射(内射)复形与 G_C-投射(内射)复形, 并利用 Auslander 类和 Bass 类的良好性质研究了 G_C-投射(内射)复形与 G_C-投射(内射)复形维数的相关性质, 主要证明了复形 X 是 G_C-投射的当且仅当 X^m 是 G_C-投射的等重要结论. 2022 年, 赵志兵在文献 [5] 中探究了在环的 Frobenius 扩张下, G_C- 投射(内射)模与 G_C-投射(内射)维数的相关性质, 证明了在环的 Frobenius 扩张下, 对一个 R-模 M, M_R 是 G_C- 投射的当且仅当 $M \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的.

受文献 [3–5]的启发, 本文继续围绕 G_C-投射(内射)对象展开研究, 证明了 G_C-投射(内射)复形是投射分解类, 并且证明了当 $R \subset A$ 是 Frobenius 扩张时, 对任意一个 R-模复形 X, X_R 是 G_C-投射的当且仅当 $X \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的. 在 Frobenius 扩张下, 讨论了复形的 G_C-投射复形维数是不变的, 即 G_C-$pd_R(X) = G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X)$ 等.

2. 预备知识

本文始终假设环 R 和环 A 是有单位元的交换环. 先介绍本文将要用到的定义和结果.

定义1. [1] 设 $\mathcal{X}$ 是 R-模范畴. 如果 $\mathcal{X}$ 满足下列条件:

(1) $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{X}$, 其中 $\mathcal{P}(R)$ 表示投射模组成的类;

(2) 对于任意的 R-模正合列

$$0 \to M^{'} \to M \to M'' \to 0,$$

其中 $M'' \in \mathcal{X}$, 则 $M \in \mathcal{X}$ 当且仅当 $M^{'} \in \mathcal{X}$.
那么称 $\mathcal{X}$ 为投射分解类.

定义2. [3] 设 C 是半对偶模, X 是复形. 对于任意的 C-投射复形 V, 如果存在 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{V})$-正合复形正合列

$$\mathbb{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to V_{-1} \to V_{-2} \to V_{-3} \to \cdots,$$

其中 P_i 是投射复形和 V_i 是 C-投射复形, 使得 $X \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_0)$, 则称复形 X 是 G_C-投射的.

定义3. [3] 复形 X 的 G_C-投射维数, 定义为 G_C-$pd_R(X) = \inf\{n \mid 0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0\}$, 其中 G_i 都是 G_C-投射复形, 记为 G_C-$pd_R(X)$.

类似 G_C-内射模的定义, 可对偶地定义 G_C-内射复形和 G_C-内射维数.

引理1. [3] 对于复形 X:

(1) 若它是 G_C-投射的当且仅当 X^m 是 G_C-投射模;

(2) 若它是 G_C-内射的当且仅当 X^m 是 G_C-内射模.

定义4. [4] 如果存在 R-模正合列

$$\mathbb{X} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to C \otimes_R P^0 \to C \otimes_R P^1 \to \cdots,$$

其中 P_i 和 P^i 都是投射模, 并且对于任意的投射模 Q, $\mathrm{Hom}_R(-, C \otimes_R Q)$ 作用在 $\mathbb{X}$ 上仍是正合的, 那么称该序列为完备 PC-分解.

定义5. [5] 如果环 R 和环 A 满足下列等价条件中的任意一条:

(1) 函子 $T = A \otimes_R -$ 和 $H = \mathrm{Hom}_R(A, -)$ 是自然等价的;

(2) ${}_RA$ 是有限生成投射的且 ${}_AA_R \cong \mathrm{Hom}_R({}_AA_R, R)$;

(3) A_R 是有限生成投射的且 ${}_RA_A \cong \mathrm{Hom}_R({}_RA_A, R)$,
则称环扩张 $R \subset A$ 是 Frobenius 扩张.

引理2. [5] 设 $R \subset A$ 是 Frobenius 扩张, 则有以下成立:

(1) 对一个 R-模 M, M_R 是G_C-投射的当且仅当 $M \otimes_R A_A$ 是 $G_{C \otimes_R A}$-投射的;

(2) 对一个 A-模 M, M_A 是 $G_{C \otimes_R A}$-投射的当且仅当 M_S 是 G_C-投射的;

(3) 对一个 R-模 M, M_R 是 G_C-内射的当且仅当 $M \otimes_R A_A$ 是 $G_{C \otimes_R A}$-内射的;

(4) 对一个 A-模 M, M_A 是 $G_{C \otimes_R A}$-内射的当且仅当 M_S 是 G_C-内射的;

(5) M是 A-模, 则 G_C-$pd_R(M) = G_{C \otimes_R A}$-$pd_A(M)$;

(6) M是 R-模, 则 G_C-$pd_R(M) = G_{C \otimes_R A}$-$pd_A(M \otimes_R A)$;

(7) M是 A-模, 则 G_C-$id_R(M) = G_{C \otimes_R A}$-$id_A(M)$;

(8) M是 R-模, 则 G_C-$id_R(M) = G_{C \otimes_R A}$-$id_A(M \otimes_R A)$.

引理3. [6] G_C-投射模类是投射可解的, 关于直和与直和项封闭; G_C-内射模类是内射可解的, 关于直积与直积项封闭.

3. Frobenius 扩张下的 G_C-投射(内射)复形

本小节主要讨论 G_C-投射(内射)复形的相关性质.

现将定义 4 推广到复形的情形,

定义6. 对于一个复形正合列

$$\mathbb{X} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to V_{-1} \to V_{-2} \to V_{-3} \to \cdots,$$

其中 P_i 是投射复形和 V_i 是 C-投射复形. 若对于任意的 C-投射复形 V, $\mathrm{Hom}_R(-, V)$ 作用在 $\mathbb{X}$ 上仍是正合的, 则称之为完备 P_C-分解.

命题1. 如果 $\mathbb{X}_\lambda$ 是完备 P_C-分解构成的类, 那么 $\coprod\limits_\lambda \mathbb{X}_\lambda$ 也是完备 P_C-分解, 因此 G_C-投射复形关于直和封闭.

证明 对于任意的 C-投射复形 V, 存在同构

$$\mathrm{Hom}_R(\coprod_\lambda \mathbb{X}_\lambda, V) \cong \prod_\lambda \mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}_\lambda, V),$$

其中对于所有的 λ, 复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}_\lambda, V)$ 是正合的, 所以复形 $\mathrm{Hom}_R(\coprod\limits_\lambda \mathbb{X}_\lambda, V)$ 是正合的. 由定义 2 知, G_C-投射复形关于直和封闭.

定理1. G_C-投射复形是投射分解类, 关于直和与直和项封闭.

证明 设 $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ 是 R-模复形正合列, 其中 G', G'' 是 G_C-投射复形. 由引理 1 可知, 对每一个 m, 有 G'^m, G''^m 是 G_C-投射模. 又由引理 3 可知 G_C-投射模在扩张下封闭, 则 G^m 是 G_C-投射模. 因此由引理 1 可知 G 是 G_C-投射复形.

同理可证, 当 G, G'' 是 G_C-投射复形时, G' 是 G_C-投射复形, 根据 [7]的命题 1.4, 由命题 1 可知 G_C-投射复形关于直和与直和项封闭.

对上述命题, 由 [8]的引理 3.12, 有直接推论.

命题2. 设 C 是任意的 R-模复形, 考虑下列复形正合列,

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to C \to 0$$

$$0 \to K_n' \to G_{n-1}' \to \cdots \to G_0' \to C \to 0$$

其中 $G_{n-1}, \cdots, G_0$ 和 $G_{n-1}', \cdots, G_0'$ 是 G_C-投射复形, 则 K_n 是 G_C-投射复形当且仅当 K_n' 是 G_C-投射复形.

类似地, 我们可以得到关于 G_C-内射复形的相关性质.

定理2. G_C-内射复形是内射分解类, 关于直积与直积项封闭.

命题3. 设 C是任意的 R-模复形. 考虑下列复形正合列,

$$0 \to M \to E_0 \to \cdots \to E_{m-1} \to T_m \to 0$$

$$0 \to M \to E_0^{'} \to \cdots \to E_{m-1}^{'} \to T_m^{'} \to 0$$

其中 E_{m-1}, $\cdots$, E_0 和 $E_{m-1}^{'}$, $\cdots$, $E_0^{'}$ 是 G_C-内射复形, 则 T_m 是 G_C-内射复形当且仅当 $T_m^{'}$ 是 G_C-内射复形.

定理3. 设 $R \subset A$ 是 *Frobenius* 扩张, 有以下成立:

(1) 对一个 R-模复形 X, X_R 是 G_C-投射的当且仅当 $X \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的;

(2) 对一个 A-模复形 X, X_A 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的当且仅当 X_R 是 G_C-投射的;

(3) 对一个 R-模复形 X, X_R 是 G_C-内射的当且仅当 $X \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-内射的;

(4) 对一个 A-模复形 X, X_A 是 $G_{C\otimes_R A}$-内射的当且仅当 X_R 是 G_C-内射的.

证明 我们只证明(1), (2)、(3)、(4)同理可证. 由条件知 $X \otimes_R A$是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的, 由引理 1 可对每一个 m, 有 $X^m \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射模, 再由引理 2, 可知 $X^m \otimes_R A$ 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射的, 因此 X_R 是 G_C-投射的. 反之, 亦成立.

定理4. 设 $R \subset A$是 *Frobenius* 扩张, 有:

(1) X 是 A-模复形, 则 G_C-$pd_R(X) = G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X)$;

(2) X 是 R-模复形, 则 G_C-$pd_R(X) = G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X \otimes_R A)$;

(3) X 是 A-模复形, 则 G_C-$id_R(X) = G_{C\otimes_R A}$-$id_A(X)$;

(4) X 是 R-模复形, 则 G_C-$id_R(X) = G_{C\otimes_R A}$-$id_A(X \otimes_R A)$.

证明 我们只证明(1), (2)、(3)、(4)同理可证. 不失一般性, 设 $G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X) = n < \infty$. 有 A-模复形正合列,

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0$$

其中 G_i 都是 $G_{C\otimes_R A}$-投射复形. 通过限制 G_i, 可以得到 R-模复形正合列, 由定理 3, 可知每一个 G_i 都是 G_C-投射复形, 因此 G_C-$pd_R(X) < n = G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X)$. 另一方面, 设 G_C-$pd_R(X) = m < \infty$. 作为 A-模复形 X, 有

$$0 \to K_m \to G_{m-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0$$

其中 G_i 都是 $G_{C\otimes_R A}$-投射复形, $0 \le i \le m-1$. 通过限制 G_i, 可以得到 R-模复形正合列, 由定理 3, 可知 G_i 都是 G_C-投射复形, $0 \le i \le m-1$. 因为 G_C-$pd_R(X) = m$, 由定理 2, 可知 K_m 也是 G_C-投射复形, 再利用定理 2, 可知 X_A 是 $G_{C\otimes_R A}$-投射复形, 则 $G_{C\otimes_R A}$-$pd_A(X) \le m = G_C$-$pd_R(X)$.

4. 总结

本文利用 G_C-投射(G_C-内射)复形的投射(内射)可解性, 证明了在 Frobenius 扩张下, 复形的 G_C-投射性和内射性是保持的以及复形的 G_C-投射维数和内射维数是不变的, 推广了 G_C-投射(G_C-

内射)对象在 Frobenius 扩张下的性质. 近年来, D_C-投射(D_C-内射)对象的研究正不断深入, 本文的结果有望延伸至 D_C-投射(D_C-内射)模与复形上.

基金项目

国家自然科学面上项目(12171206)。

参考文献

[1] Holm, H. and White, D. (2007) Foxby Equivalence over Associative Rings. *Kyoto Journal of Mathematics*, **47**, 781-808. https://doi.org/10.1215/kjm/1250692289

[2] White, D. (2010) Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semidualizing Module. *Journal of Commutative Algebra*, **2**, 111-137. https://doi.org/10.1216/JCA-2010-2-1-111

[3] Yang, C.H. and Li, L. (2012) Gorenstein Injective and Projective Complexes with Respect to a Semidualizing Module. *Communications in Algebra*, **40**, 3352-3364. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.568030

[4] 杨春花. 复形的结构与模的Gorenstein维数[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京大学, 2011.

[5] Zhao, Z.B. (2022) G_C-Projectivity and Injectivity under Frobenius Extensions. *Communications in Algebra*, **50**, 5155-5170.

[6] Huang, C.L. (2012) G_C-Projective, Injective and Flat Modules under Change of Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, **11**, Article ID: 1250032. https://doi.org/10.1142/S0219498811005567

[7] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[8] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 94, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. https://doi.org/10.1090/memo/0094