Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(8), 6007-6014**
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118633

Hans汉斯

与Pell数相关的三角矩阵的一些组合性质

尚　宇，刘相芯

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年7月24日；录用日期：2022年8月17日；发布日期：2022年8月26日

摘　要

Pell数 $P_n=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}2^k\binom{n}{2k+1}$，记 $V(n,k)=2^k\binom{n}{2k+1}$，本文主要研究由 $V(n,k)$ 构成的三角矩阵以及其伴随三角矩阵 $U(n,k)=2^k\binom{n}{2k}$ 的组合性质，包括：行多项式的实根性和稠密性，矩阵的渐近正态性以及全正性。

关键词

与Pell数相关的三角矩阵，实根性，稠密性，渐近正态性，全正性

Some Combinatorial Properties of Triangular Matrices Related to Pell Numbers

Yu Shang, Xiangxin Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 24th, 2022; accepted: Aug. 17th, 2022; published: Aug. 26th, 2022

Abstract

Pell number $P_n=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}2^k\binom{n}{2k+1}$, denote $V(n,k)=2^k\binom{n}{2k+1}$. This article studies the combinatorial proprieties of two triangular matrices, one is formed by $V(n,k)$ and the other is the adjoining triangular matrices $U(n,k)=2^k\binom{n}{2k}$. More precisely we study the real rootedness and density of the row polynomials, and the asymptotic normality and total positivity of the matrices.

文章引用: 尚宇, 刘相芯. 与 Pell 数相关的三角矩阵的一些组合性质[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 6007-6014.
DOI: 10.12677/aam.2022.118633

Keywords

Triangular Matrix Related to Pell Numbers, Real Rootedness, Density, Asymptotic Normality, Total Positivity

1. 引言

Pell 数是组合数学中重要的一类组合数，近年来，Pell 数列及其推广引起学者的关注[1] [2]。Pell 数列与 Fibonacci 数列有着密切的联系，两者之间的关系为：

$$P_n(x)=F_n(2x),(n=0,1,2,\cdots),$$

Pell 数列的递归表达式为

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n,P_0=0,P_1=1,$$

通项为：

$$P_n=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}2^k\binom{n}{2k+1}，对于 n>0 时[1]。$$

由 Pell 数表达式，记

$$V(n,k)=2^k\binom{n}{2k+1},$$

则 $V(n,k)$ 构成一个三角矩阵，在 OEIS (在线整数数列查询网站)中可查为 A105070，本文将研究由 $V(n,k)$ 构成的三角矩阵。我们将 $V(n,k)$ 的行发生函数记作 $V_n(x)$，令

$$V_n(x)=\sum_{k=0}^{n}V(n,k)x^k,$$

并且发现 $V_n(x)$ 有互为相伴关系的函数 $U_n(x)$，其通项为

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n}U(n,k)x^k,$$

三角矩阵为

$$U(n,k)=2^k\binom{n}{2k}.$$

在组合学中有很多序列有这样的相伴关系，例如 Morgan-Voyce 多项式，王毅等人研究了其稠密性，渐近正态性以及全正性[3]。本文我们将对 $V(n,k)$ 和 $U(n,k)$ 构成的三角矩阵的行多项式的实根性，稠密性以及渐近正态性和矩阵的全正性进行研究。

$V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 满足下面递归关系

$$\begin{cases}U_n(x)=U_{n-1}(x)+2xV_{n-1}(x)\\V_n(x)=U_{n-1}(x)+V_{n-1}(x)\end{cases}\tag{1}$$

对于 $n\ge 3$，其中 $U_1=V_1=1$。递归方程是

$$\begin{cases}U_n(x)=2U_{n-1}(x)+(2x-1)U_{n-2}(x)\\U_1(x)=1,U_2(x)=2x+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_n(x)=2V_{n-1}(x)+(2x-1)V_{n-2}(x)\\V_1(x)=1,V_2(x)=2\end{cases}\tag{2}$$

在第二节中，我们将展示以上多项式的零点都是实数并且在区间 $(-\infty,0]$ 中。以及多项式的零点在区间 $(-\infty,0]$ 中是稠密的。在第 3 节中，我们展示了多项式的系数 $V(n,k)$ 和 $U(n,k)$ 近似正态分布。在第 4 节中，我们展示了系数矩阵 $(V(n,k))_{n,k\ge 0}$ 和 $(U(n,k))_{n,k\ge 0}$ 是一个全正矩阵。

2. 多项式的零点

实根性就是指多项式方程的零点为实数。多项式的实根性在组合学和其他数学分支中是重要的研究课题，多项式的实根性的主要应用是证明组合序列的单峰性，对数凹性和 PF 性质。只有实根的系数全为正的多项式经常出现在组合数学的研究中。对于非负有限序列而言，如果我们能证明它的生成函数的实根性，再借助牛顿不等式就可以证明其单峰性或对数凹性：如果正系数的多项式 $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 只有实根，则

$$a_i^2\ge a_{i-1}a_{i+1}\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{n-i}\right)，对于 1\le i\le n-1。$$

并且数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是单峰和对数凹的。下面我们要证明 $V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 的实根性，在证明之前我们需要引进一个引理 2.1。令 RZ 表示只有实数根的实多项式集合。

引理 2.1 ([4])令 F,f,g 是三个实数多项式，满足以下条件

a) $F(x)=a(x)f(x)+b(x)g(x)$，其中 $a(x),b(x)$ 是两个实数多项式，则 $\deg F=\deg f$ 或 $\deg f+1$。

b) $f,g\in RZ$ 且 $g\preceq f$。

c) F 和 g 首项系数符号相同。

假设 $f(r)=0$ 时，有 $b(r)\le 0$，则 $F\in RZ$ 且 $f\preceq F$。特别地，若 $f(r)=0$ 时 $b(r)<0$ 且 $g\prec f$ 则 $f\prec F$。

定理 2.2 $V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 是实根的。

证明由引理 2.1 根据 $V(n,k)$ 和 $U(n,k)$ 的递归公式(2)可推出 $V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 只有实根，运用归纳假设法来证明

1) 当 $n=2$ 时，$U_2(x)=2x+1$ 具备实根性。

2) 假设 $n=k$ 时成立，即

a) $\deg U_k(x)=\deg U_{k-1}(x)$ (k 为奇数) $\deg U_k(x)=\deg U_{k-1}(x)+1$ (k 为偶数)，

b) $U_{k-1}(x),U_{k-2}(x)\in RZ$，$U_{k-2}(x)\preceq U_{k-1}(x)$，

c) $U_{k-1}(x)$ 和 $U_k(x)$ 有相同符号的首项系数。

当 $U_{k-1}=0$ 时，$b(r)\le 0$，则 $U_k\in RZ$，且 $U_{k-1}\preceq U_k$，可得以下条件

a) $\deg U_{k+1}(x)=\deg U_k(x)$ (k 为偶数) $\deg U_{k+1}(x)=\deg U_k(x)+1$ (k 为奇数)，

b) $U_{k-1}(x),U_k(x)\in RZ$，$U_{k-1}(x)\preceq U_k(x)$，

c) $U_{k+1}(x)$ 和 $U_k(x)$ 有相同符号的首项系数。

当 $U_k=0$ 时，因为系数都大于零，则实根一定小于零，$b(r)=(2x-1)\le 0$，符合引理 2.1，实根性得证。 □

实际上$V_n(x)$和$U_n(x)$的根可以写出显示表达，为了给出$V_n(x)$和$U_n(x)$根的显示表达我们引进引理2.3和引理2.4。

引理 2.3 ([5])令$\{z_n\}_{n\geq 0}$是满足$z_n = az_{n-1}+bz_{n-2}, n=2,3,\cdots$，线性递推关系的一个序列。

若$a^2+4b>0$，则序列的闭式为

$$z_n=\frac{(z_1-z_0\lambda_2)\lambda_1^n+(z_0\lambda_1-z_1)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}, n=0,1,2,\cdots, \tag{3}$$

其中$\lambda_1=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}, \lambda_2=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$是特征方程的根。

引理 2.4 ([6])令$\lambda_1,\lambda_2\in R$，且$n\in N$。

i) 若n为奇数，则$\lambda_1^n-\lambda_2^n=(\lambda_1-\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{s\pi}{n}\right]$。

ii) 若n为偶数，则$\lambda_1^n-\lambda_2^n=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{s\pi}{n}\right]$。

iii) 若n为奇数，则$\lambda_1^n+\lambda_2^n=(\lambda_1+\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{(2s-1)\pi}{2n}\right]$。

iv) 若n为偶数，则$\lambda_1^n+\lambda_2^n=(\lambda_1+\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{(2s-1)\pi}{2n}\right]$。

定理 2.5 $V_n(x)$和$U_n(x)$的因式分解形式和根为

$$V_n(x)=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x+V_{n,k}), V_{n,k}=\frac{1}{2\cos^2\frac{k\pi}{n}}-\frac{1}{2}. \tag{4}$$

$$U_n(x)=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x+U_{n,k}), U_{n,k}=\frac{1}{2\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}-\frac{1}{2}. \tag{5}$$

证明 通过$V_n(x)$和$U_n(x)$的递推关系(2)由引理2.3我们可以得到$V_n(x)$和$U_n(x)$的Binet形式

$$V_n(x)=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{(1+\sqrt{2x})^n-(1-\sqrt{2x})^n}{2\sqrt{2x}}(x\neq 0, n\geq 1),$$

$$U_n=\frac{\lambda_1^n+\lambda_2^n}{2}=\frac{(1+\sqrt{2x})^n+(1-\sqrt{2x})^n}{2}(x\neq 0, n\geq 1). \tag{6}$$

这里$\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2x}$是特征方程$\lambda^2-2\lambda-(2x-1)\lambda=0$的两个根。

由引理2.4可以知道

$$V_n(x)=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{k\pi}{n}\right]=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[x+\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{k\pi}{n}}-\frac{1}{2}\right)\right].$$

类似的可以得到$U_n(x)$的因式分解形式以及根的表达式

$$U_n(x)=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x+\frac{1}{2\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}-\frac{1}{2}\right).$$ □

显然$V_n(x)$和$U_n(x)$的所有零点都在区间$(-\infty,0]$中。下面我们将证明这些零点在区间$(-\infty,0]$中是稠密的。在证明之前我们还需要知道定义2.6和引理2.7。

定义2.6 令$(f_n(x))_{n\geq 0}$为复多项式序列。如果存在序列$(z_n)_{n\geq 0}$使得$f_n(z_n)=0$且当$n\to+\infty$时$z_n\to x$。现在假设$(f_n(x))_{n\geq 0}$是满足递归关系

$$f_{n+k}(x)=-\sum_{j=1}^{k}c_j(x)f_{n+k-j}(x)$$

的多项式序列，其中$c_j(x)$是x中的多项式。令$\lambda_j(x)$是相关特征方程

$$\lambda^k+\sum_{j=1}^{k}c_j(x)\lambda^{k-j}=0$$

的所有根。众所周知，如果$\lambda_j(x)$是不同的，则

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(x)\lambda_j^n(x), \tag{7}$$

其中$\alpha_j(x)$由初始条件确定。

引理2.7 ([7])在非退化条件下，在(7)中没有$\alpha_j(x)$完全为零，且对于单位模长的$\omega\in C$，没有$i\neq j$使$\lambda_i(x)=\omega\lambda_j(x)$，那么$x$是$(f_n(x))_{n\geq 0}$的零极限当且仅当

i) 两个或多个$\lambda_i(x)$具有相等的模数，并且模数严格地大于其他。

ii) 存在指数j使得$\lambda_j(x)$的模数严格大于所有其他$\lambda_i(x)$的模数，并且$\alpha_j(x)=0$。

定理2.8 $V_n(x)$和$U_n(x)$的零点在区间$(-\infty,0]$中是稠密的。

证明我们先证明$V_n(x)$的稠密性，因为$U_n(x)$和$V_n(x)$的递推关系是相同的，所以证明也是相同的。我们提出了一个更强的结果：每个$x\in(-\infty,0]$是序列$(V_n(x))_{n\geq 1}$的零极限。

引理2.7的非退化条件由$V_n(x)$的Binet形式成立。故序列$(V_n(x))_{n\geq 1}$的零极限是满足$|\lambda_1(x)|=|\lambda_2(x)|$的实数$x$。因为$|\lambda_1(x)|=|\lambda_2(x)|$，则$|1+\sqrt{2x}|=|1-\sqrt{2x}|$。换句话说，$\sqrt{2x}$必须是纯虚数(允许0是纯虚数)。因此$2x\leq 0$，即$x\leq 0$，即可证明$V_n(x)$的零点在区间$(-\infty,0]$中是稠密的。 □

3. 渐近正态性

设$a(n,k)$是一个双指数非负数序列，$p(n,k)=\frac{a(n,k)}{\sum_{j=0}^{n}a(n,j)}$表示正态化概率。如果序列$a(n,k)$满足下式，我们就说序列$a(n,k)$通过中心极限定理是渐近正态的[8]

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|\sum_{k\leq\mu_n+x\sigma_n}p(n,k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right|=0. \tag{8}$$

其中μ_n和σ_n^2分别是$a(n,k)$的均值和方差。如果序列$a(n,k)$满足下式，通过R上的局部极限定理，我们就称序列$a(n,k)$是渐近正态的

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|\sigma_n p(n,\lfloor\mu_n+x\sigma_n\rfloor)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\right|=0. \tag{9}$$

那么就有

$$\text{当}n \to \infty\text{时}, a(n,k) \sim \frac{\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} \sum_{j=0}^{n} a(n,j)}{\sigma_n \sqrt{2\pi}},$$

其中 $k = \mu_n + x\sigma_n$ 且 $x = \mathrm{O}(1)$。显然，从(9)可以推出(8)成立。

许多著名的组合序列都具有中心和局部极限定理。例如，著名的 de Moivre-Laplace 定理指出通过中心和局部极限定理可以证明二项式系数 $\binom{n}{k}$ 是渐近正态的。其他示例包括第一类无符号斯特林数 $c(n,k)$，第二类斯特林数 $S(n,k)$ 和欧拉数 $A(n,k)$。下面我们要证明 $V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 的矩阵是渐近正态的，为了证明渐近正态性，我们需要用到引理 3.1。

引理 3.1 ([3])令 $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a(n,k) x^k$ 只有实根且 $A_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + r_i)$，其中所有的 $a(n,k)$ 和 r_i 都是非负的，令

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+r_i}, \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(1+r_i)^2}.$$

若 $\sigma_n^2 \to +\infty$，则 $a(n,k)$ 是渐近正态的。

定理 3.2 $V(n,k) = 2^k \binom{n}{2k+1}$ 是渐近正态的，并且均值 $\mu_n = 2n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 和方差 $\sigma_n^2 = \frac{n(3\sqrt{2}-4)}{2}$。

证明：我们只证明 $V(n,k)$ 的结果，$U(n,k)$ 的证明是相似的。通过定理 2.5 我们有均值为

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos^2 \frac{k\pi}{n}}} \to \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta = 2n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

方差为

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{k\pi}{n}} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos^2 \frac{k\pi}{n}}\right)^2} \to \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x + 2 + \frac{1}{\cos^2 x}} \mathrm{d}x = \frac{n(3\sqrt{2}-4)}{2}.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\mu_n \to \infty$ 且 $\sigma_n^2 \to \infty$，所以由引理 3.1 可以得知 $V(n,k)$ 是渐近正态的。 □

4. 全正性

如果一个(有限或无限)矩阵的所有子矩阵都是非负的，则称为全正矩阵(简称 TP)。令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 为非负数的无限序列(我们将有限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 与无限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \cdots$。定义其 Toeplitz 矩阵

$$[a_{i-j}] = \begin{bmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix},$$

如果对应的 Toeplitz 矩阵是 TP，我们就说这个序列是一个 Pólya 频率(简称 PF)序列。PF 序列的一个基本特征由 Schoenberg 和 Edrei 指出：序列 $(a_n)_{n\geq 0}$ 是 PF 当且仅当它的生成函数满足

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = ax^k \mathrm{e}^{\gamma x} \frac{\prod_{j\geq 0}(1+\alpha_j x)}{\prod_{j\geq 0}(1-\beta_j x)}.$$

其中 $a>0$，$k\in N$，$\alpha_j,\beta_j,\gamma>0$，并且 $\sum_{j\geq 0}(\alpha_j+\beta_j)<+\infty$。在这种情况下，我们也说相应的生成函数是 PF。我们这一节要证明 pell 数和函数表达法的原函数相关的三角矩阵的全正性，用 Riordan 矩阵来证明全正性，下面我们介绍 Riordan 矩阵的概念。

设 $d(x)$ 和 $h(x)$ 是两个形式幂级数。用 $R=(d(x),h(x))$ 表示一个无限矩阵，其第 k 列的生成函数是 $h^k(x)d(x)$ 对于 $k=0,1,2,\cdots$，当 $d(0)=1,h(0)=0$ 和 $h'(0)=0$ 时，我们说 R 是 Riordan 矩阵。Riordan 矩阵在枚举组合学中起着重要的统一作用，许多著名的组合矩阵都是 Riordan 矩阵。例如，帕斯卡三角形 $P=\left[\binom{n}{k}\right]$ 是一个 Riordan 矩阵，并且 $P=\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)$。对于 Riordan 矩阵的全正性有着各种各样的研究，我们在证明全正性之前要知道引理 4.1。

引理 4.1 ([9])如果 $d(x)$ 和 $h(x)$ 都是 PF，那么 Riordan 数组 $R=(d(x),h(x))$ 是 TP。

定理 4.2 U 和 V 都是全正矩阵。

证明： $V_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 多项式的系数矩阵分别为

$$V(n,k)=2^k\binom{n}{2k+1}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 4 & 8 & & \\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix},$$

$$U(n,k)=2^k\binom{n}{2k}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 6 & & \\ 1 & 12 & 4 & \\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix}.$$

由系数矩阵可以求得 V 的第 k 列的生成函数为

$$\sum_{n\geq k} 2^k\binom{n}{2k+1}x^n = 2^k x^{2k+1}\sum_{m\geq 0}\binom{2k+1+m}{2k+1}x^m = \frac{2^k x^{2k+1}}{(1-x)^{2k+2}}.$$

因此 V 是 Riordan 矩阵，并且 $V=\left(\frac{x}{(1-x)^2},\frac{2x^2}{(1-x)^2}\right)$。类似的可以得到 $U=\left(\frac{1}{1-x},\frac{2x^2}{(1-x)^2}\right)$。从引理 4.1 即可得出 U 和 V 都是全正矩阵。

5. 结论

由 $V(n,k)=2^k\binom{n}{2k+1}$ 构成的三角矩阵以及其伴随三角矩阵 $U(n,k)=2^k\binom{n}{2k}$ 的行多项式是实根的，并且零点在区间 $(-\infty,0]$ 中是稠密的。$V(n,k)$ 和 $U(n,k)$ 构成的三角矩阵是具备渐近正态性以及全正性的。

参考文献

[1] Ivie, J. (1970) Problem B-161. *Fibonacci Quarterly*, **8**, 107-108.

[2] 杨胜良，高晓. Riordan 矩阵与 Pell 数[J]. 兰州理工大学学报, 2017(43): 148-151.

[3] 裴毅，王毅. Morgan-Voyce 多项式的一些新性质[J]. 数学研究及应用: 中文版, 2019(39): 6.

[4] Liu, L.L. and Wang, Y. (2007) A Unified Approach to Polynomial Sequences with Only Real Zeros. *Advances in Applied Mathematics*, **38**, 542-560. https://doi.org/10.1016/j.aam.2006.02.003

[5] Brualdi, R.A. (1992) Introductory Combinatorics. 2nd Edition, North-Holland, Amsterdam.

[6] Beraha, S., Kahane, J. and Weiss, N.J. (1978) Limits of Zeros of Recursively Defined Families of Polynomials. *Studies in Foundations and Combinatorics*, **1**, 213-232.

[7] Barnard, S. and Child, J.F. (1955) Higher Algebra. Macmillan, London.

[8] Bender, E.A. (1973) Central and Local Limit Theorems Applied to Asymptotic Enumeration. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **15**, 91-111. https://doi.org/10.1016/0097-3165(73)90038-1

[9] Chen, X. and Wang, Y. (2019) Notes on the Total Positivity of Riordan Arrays. *Linear Algebra and Its Applications*, **569**, 156-161. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.01.015