Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4646-4657
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117490

Hans汉斯

具有时滞的SIQR流行病模型的稳定性和永久性分析

高　珊，孙小淇

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年6月13日；录用日期：2022年7月8日；发布日期：2022年7月15日

摘　要

本文主要研究带有分布时滞的SIQR的流行病模型，并确定了疾病是否灭亡的基本再生数R_0。证明了当$R_0 < 1$时，模型仅存在无病平衡点且无病平衡点是全局渐近稳定的，疾病最终灭亡；当$R_0 > 1$时，模型存在两个平衡点，其中无病平衡点不稳定，地方病平衡点是局部渐近稳定的，且疾病将永久存在。

关键词

分布时滞，隔离，平衡点，稳定性

Stability and Permanence Analysis of SIQR Epidemic Model with Time Delay

Shan Gao, Xiaoqi Sun

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Jun. 13th, 2022; accepted: Jul. 8th, 2022; published: Jul. 15th, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study the epidemic model of SIQR with distributed delay, and determine the basic regeneration number r of whether the disease is extinct or not. It is proved that when $R_0 < 1$, the model only has a disease-free equilibrium and the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, and the disease eventually dies; When $R_0 > 1$, the model has two equilibrium points, in which the disease-free equilibrium point is unstable, the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable, and the disease will exist forever.

文章引用：高珊，孙小淇．具有时滞的 SIQR 流行病模型的稳定性和永久性分析[J]．应用数学进展，2022，11(7): 4646-4657. DOI: 10.12677/aam.2022.117490

Keywords

Distributed Delay, Isolate, Equilibrium Point, Stability

1. 引言

一直以来，传染病都是危害人类身体健康的大敌，从公元 1519 出现的麻疹与黑死病到 1985 年出现的艾滋病，再到 2019 年出现的新型肺炎都对人类的生命安全与健康造成了极大的威胁。而近年来随着世界各国交往频繁，全球环境发生巨大改变，一些病原体发生变异导致一些传染病变得越来越不可控，也说明了传染病一直会与人类共存，因此，人们需要对传染病的流行和持久性进行更深入的探索研究，并对其构建数学模型，确定基本再生数从而得出疾病是否会灭亡的临界点，从而在最短的时间内以有效的方法控制疾病的传播。

前人主要研究 SIRS 传染病模型，当基本再生数大于 1 时，计算出传染性个体的最终下限从而得出传染病的永久性，并对传染病的局部与全局稳定性进行分析。但是这种模型已经不符合我们国家对传染病的治理措施，通常国家在面对某种传染病爆发时会对感染者进行隔离或者提前对易感者进行疫苗接种等方法。为对前人模型进行完善，本文主要在过往传染病模型的基础上引入了隔离人群，也就是说，在感染者恢复之前对其进行隔离处理，完善后的传染病模型也更加符合现实生活中国家的应对政策。

刚开始，人们研究常微分方程的流行病模型[1] [2]，其目的是研究阈值的存在，从而确定流行病是否会灭亡。之后人们考虑到疾病具有潜伏期，所以逐渐在模型中加入时滞，并研究模型无病平衡点和地方病平衡点的局部及全局稳定性，其中时滞效应在传染病传播过程中扮演着重要的角色，具有时滞效应的传染病动力学模型能更准确地描述传染病的传播机制。最后会考虑系统的持久性，在生物学中，许多论文对系统的持久性进行研究[3] [4]，因此，持久性对有关于传染病的系统起着至关重要的作用。

由(Hethcote 1976)给出的无时滞的 SIR 模型[5]：

$$\dot{S}(t)=\beta S(t)I(t)-\mu S(t)+\mu$$

$$\dot{I}(t)=\beta S(t)I(t)-\mu I(t)-\lambda I(t)$$

$$\dot{R}(t)=\lambda I(t)-\mu R(t)$$

2002 年，马万彪等人研究了带有分布时滞的 SIR 流行病模型[6]：

$$\dot{S}(t)=-\beta S(t)\int_0^h I(t-s)\,\mathrm{d}\eta(s)-\mu_1 S(t)+b$$

$$\dot{I}(t)=\beta S(t)\int_0^h I(t-s)\,\mathrm{d}\eta(s)-(\mu_2+\lambda)I(t)$$

$$\dot{R}(t)=\lambda I(t)-\mu_3 R(t)$$

该文章得出了对于任意时滞 h，该模型是永久的当且仅当地方病平衡点存在。之后他们还提出了经典的 SIR 模型，并求出了传染性个体 $I(t)$ 的最终下限[7]。上述两种模型都是把总人口 N 看成是变化的，

但是这种模型只对于某些传染病是有效的，例如 2009 年的甲型 H1N1。但是随着某些病毒的变异，这种模型对于那种只有暂时免疫力的传染病来说已经不适用，例如血吸虫病。之后张太雷等人在上述基础上，考虑到传染病只有暂时的免疫力，即研究了带有分布时滞的 SIRS 流行病模型[8]：

$$\dot{S}(t)=\Lambda-\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\mu_1 S(t)+\delta R(t)$$

$$\dot{I}(t)=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\mu_2+\gamma)I(t)$$

$$\dot{R}(t)=\gamma I(t)-(\mu_3+\delta)R(t)$$

$$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$$

该文章说明了当基本再生数 $R_0>1$ 时，该传染病在人群中是永久的，并得到了无病平衡点的全局稳定性和地方病平衡点的局部稳定性。但是在实际生活中，当某种病毒爆发时，为减少感染人群，通常会对感染人群进行隔离处理，例如我国应对近几年的新冠肺炎疫情，除了进行疫苗接种，主要对传染者采取隔离措施以防进一步传染。所以本文在上述模型的基础上引入了隔离人群 $Q(t)$。

以下是 SIQR 传染病仓室模型(图 1)：

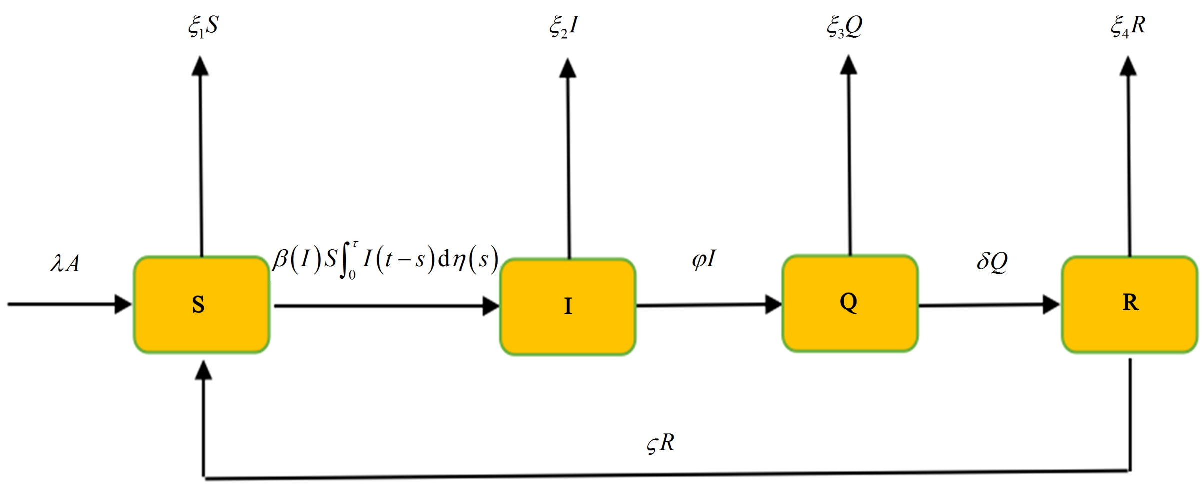

Figure 1. SIQR compartment model
图 1. SIQR 仓室模型

根据仓室模型，得到如下数学模型：

$$\begin{aligned}
&\dot{S}(t)=\lambda A-\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\xi_1 S(t)+\varsigma R(t)\\
&\dot{I}(t)=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)\\
&\dot{Q}(t)=\varphi I(t)-(\xi_3+\delta)Q(t)\\
&\dot{R}(t)=\delta Q(t)-(\xi_4+\varsigma)R(t)\\
&N(t)=S(t)+I(t)+Q(t)+R(t)
\end{aligned}\tag{1}$$

下面对系统(1)涉及参数做出相应释义，见表 1：

Table 1. Parameter definition
表 1. 参数释义

参数	释义
S	易感者类
I	感染者类
Q	隔离者类
R	恢复者类
ξ_1	易感者类死亡率
ξ_2	感染者类死亡率
ξ_3	隔离者类死亡率
ξ_4	恢复者类死亡率
A	人口输入率
λ	新生儿成为易感者概率
φ	感染者的隔离比例
ς	恢复者再次成为以易感者的概率
δ	隔离人群的恢复率
τ	时滞

$\beta(I)$ 是单位时间的发病率且形式为 $\beta(I)S(t)\int_0^{\tau} I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)$，其中 $\beta(I)$ 是正连续函数且存在 $I_0>0$，使得 $\beta(I)$ 在区间 $[0,I_0]$ 是不减的。函数 $\eta(s):[0,\tau]\to(-\infty,+\infty)$ 是不减的且有 $\int_0^{\tau}\mathrm{d}\eta(s)=B$ 成立。

本文组织如下：第二节包含一些需要的定义定理，如：系统的初始条件、系统永久性的定义、平衡点的存在以及基本再生数的计算；第三节主要证明了系统的永久性；第四节主要对平衡点的稳定性进行分析。

2. 预备知识

首先，在 SIQR 传染病模型中，假设 $\xi_1 \le \xi_2,\xi_3,\xi_4$，换句话说，传染病会增加人口的死亡率。系统(1)的初始条件如下：

$$S(\theta)=\varphi_1(\theta), I(\theta)=\varphi_2(\theta), Q(\theta)=\varphi_3(\theta), R(\theta)=\varphi_4(\theta), -\tau\le\theta\le 0 \tag{2}$$

其中 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)^{\mathrm{T}}\in C$ 且 $\varphi_i(\theta)\ge 0$。而 C 指的是连续函数从区间 $[-\tau,0]\to R^3$ 的 Banach 空间 $C([-\tau,0],R^3)$。且 $\|\varphi\|=\sup\{\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta),\varphi_3(\theta),\varphi_4(\theta)\}$。

定义 2.1 若存在正数 V_i,M_i，使得

$$V_1\le \liminf_{t\to+\infty} S(t)\le \limsup_{t\to+\infty} S(t)\le M_1$$

$$V_2\le \liminf_{t\to+\infty} S(t)\le \limsup_{t\to+\infty} S(t)\le M_2$$

$$V_3\le \liminf_{t\to+\infty} S(t)\le \limsup_{t\to+\infty} S(t)\le M_3$$

$$V_4\le \liminf_{t\to+\infty} S(t)\le \limsup_{t\to+\infty} S(t)\le M_4$$

对于带有初始条件(2)的系统(1)的任意解$\left(S(t),I(t),Q(t),R(t)\right)$都成立，其中$V_i$和$M_i$和初始条件(2)无关，则称系统(1)是永久的。

当$\beta(I)=\beta$为常数时，可以求得系统(1)的无病平衡点E_1，即$E_1=\left(\frac{\lambda A}{\xi_1},0,0,0\right)$，同理，可求系统(1)的地方病平衡点$E^*=\left(S^*,I^*,Q^*,R^*\right)$。

其中$S^*=\frac{\xi_2+\varphi}{\beta B}$，$I^*=\frac{\left(\lambda A-\xi_1 S^*\right)\left(\xi_4+\varsigma\right)\left(\xi_3+\delta\right)}{\xi_2\left(\xi_4+\varsigma\right)\left(\xi_3+\delta\right)+\xi_3\varphi\left(\xi_4+\varsigma\right)+\xi_4\delta\varphi}$，$Q^*=\frac{\varphi I^*}{\xi_3+\delta}$，$R^*=\frac{\delta Q^*}{\xi_4+\varsigma}$。

基本再生数表示发病初期，所有人均为易感者时，一个染病者在一个病程所传染的全部病人数。对于本文的系统(1)来说，基本再生数等于再生矩阵的谱半径[9]，即$R_0=\rho\left(FV^{-1}\right)=\frac{\beta(0)\lambda AB}{\xi_1\left(\xi_2+\varphi\right)}$。

定理 2.1 假设$\beta(I)=\beta$为常数，当$R_0<1$时，系统(1)只存在无病平衡点，当$R_0>1$，系统(1)存在地方病平衡点。

考虑一个延迟微分方程的自治系统：

$$\dot{x}(t)=F\left(x_t\right) \tag{3}$$

引理 2.1 [10] 设$w_1(\cdot)$，$w_2(\cdot)$是非负连续标量函数，当且仅当$r=0$时，满足$w_i(r)=0$。

若$r\to+\infty$，$W_1(r)\to+\infty$。其中$V=C\left(\left[-\tau,0\right],R^n\right)\to R$是连续可微标量函数，对于一特殊集$\Omega$，(3)的解满足：$V(\phi)\geq W_1\left(\phi(0)\right)$，$\dot{V}(\phi)\leq -W_2\left(\left|\phi(0)\right|\right)$，则$x=0$在集合$\Omega$是渐近稳定的。

3. 永久性

首先本文给出三个命题：

命题 3.1 系统(1)带有初始条件的解(S,I,Q,R)对所有的$t\geq 0$是正的且有

$$\lim_{t\to+\infty} N(t)\leq\frac{\lambda A}{\xi_1}. \tag{4}$$

证明：因为系统(1)右侧完全连续，且在C上是局部Lipschitzian的，所以具有初始条件的解在区间$[0,a]$上存在且唯一，其中$0<a<+\infty$。当$t\in[0,a]$，我们有$S(t)>0$。

反之，存在$t_1\in[0,a]$使得$S(t_1)=0$，$\dot{S}(t_1)<0$，同时当$t\in[0,t_1]$时，$S(t)>0$。

所以$t\in[0,t_1]$时，有$I(t)>0$。如若不成立，存在$t_2\in(0,t_1)$，使得$I(t_2)=0$，同时$I(t)>0$在区间$[0,t_2]$成立。

将系统(1)第二个等式从 0 到t_2积分，有：

$$I(t_2)=I(0)\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)t_2}+\int_0^{t_2}\beta\left(I(u)\right)S(u)\int_0^{\tau}I(u-s)\mathrm{d}\eta(s)\mathrm{e}^{(\xi_2+\varphi)(u-t_2)}\mathrm{d}u>0$$

与前面的$I(t_2)=0$矛盾。

所以当$t\in[0,t_1]$时，$I(t)>0$成立。

将系统(1)的第三个等式进行积分，有$Q(t)\geq Q(0)\exp\left(-\left(\xi_3+\delta\right)t\right)\geq 0$，$t\in[0,t_1)$。

同理，将系统(1)的第四个等式积分，有$R(t)\geq R(0)\exp\left(-\xi_4 t\right)\geq 0$，$t\in[0,t_1)$。

由上述，可得$\dot{S}(t_1)=\lambda A+\delta R(t)>0$与假设$\dot{S}(t_1)<0$矛盾，

所以当$t\in[0,a)$时，有$S(t)>0$。因此前半部分已证。

下面求$N(t)$的极限，首先，根据系统(1)有：

$$\dot{N}(t)=\lambda A+\xi_1 S(t)+\xi_2 I(t)+\xi_3 Q(t)+\xi_4 R(t) \tag{5}$$

从而 $N(t)\le\frac{\lambda A}{\xi_1}$，证毕。

命题 3.2 系统(1)带有初始条件的解 (S,I,Q,R) 满足

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t)\ge\frac{\xi_1\lambda A}{\bar{\beta}(\varepsilon)B(\lambda A+\xi_1\varepsilon)+\xi_1^2}=C_1 \tag{6}$$

证明：由命题 1 可知，对任意的 $\varepsilon>0$，有足够大的 $t_1>0$，使得 $I(t)\le\frac{\lambda A}{\xi_1}+\varepsilon$，

令 $\bar{\beta}(\varepsilon)=\max\limits_{I\in[0,\lambda A/\xi_1+\varepsilon]}\beta(I)$，由系统(1)的第一个的等式，当 $t\ge t_1+\tau$ 时，有

$\dot{S}(t)\ge\lambda A-\left[\bar{\beta}(\varepsilon)B(\lambda A/\xi_1+\varepsilon)+\xi_1\right]S(t)$，即 $\liminf\limits_{t\to+\infty} S(t)\ge\frac{\xi_1\lambda A}{\bar{\beta}(\varepsilon)B(\lambda A+\xi_1\varepsilon)+\xi_1^2}$。

命题 3.3 设 $R_0>1$，对于系统(1)的任意正解 (S,I,Q,R)，有

$$\liminf_{t\to+\infty} I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}=C_2>0 \tag{7}$$

证明：$R_0=\frac{\beta(0)\lambda AB}{\xi_1(\xi_2+\varphi)}>1$，意味着存在 $0<b<I_0$，$\gamma>0$ 满足

$$\beta(0)B\frac{\lambda A}{\xi_1+b\beta(b)B}\left[1-\mathrm{e}^{-(\xi_1+b\beta(b))\gamma\tau}\right]\frac{1}{\xi_2+\varphi}>1,$$

令 $S^*=\frac{\lambda A}{\xi_1+b\beta(b)B}\left[1-\mathrm{e}^{-(\xi_1+b\beta(b))\gamma\tau}\right]$。

下面考虑可微函数

$$V(t)=I(t)+\frac{\xi_2+\varphi}{B}\int_0^\tau\int_{t-s}^t I(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta(s), \tag{8}$$

沿系统(1)的解的导数是

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)+\frac{\xi_2}{B}\int_0^\tau I(t)-I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)\\&=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)+(\xi_2+\varphi)I(t)-\frac{\xi_2+\varphi}{B}\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)\\&=\left[\beta(I)S(t)-\frac{\xi_2+\varphi}{B}\right]\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)\end{aligned}$$

对 $t\ge t_1\ge\gamma\tau$，$I(t)\le b$ 不可能成立。

反证法，若成立，则当 $t\ge t_1+\tau$ 时，有

$$\dot{S}(t)=\lambda A-\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\xi_1S(t)+\varsigma R(t)\ge\lambda A-\left(\beta(b)Bb+\xi_1\right)S(t)$$

上式从 $t_1+\tau$ 到 t 积分，得：

$$S(t)=\mathrm{e}^{(-b\beta(b)B+\xi_1)(t-t_1-\tau)}\left[S(t_1+\tau)+\lambda A\int_{t_1}^t\mathrm{e}^{(b\beta(b)+\xi_1)(\theta-t_1-\tau)}\mathrm{d}\theta\right]\ge\frac{\lambda A}{\xi_1+b\beta(b)B}\left(1-\mathrm{e}^{-(b\beta(b)+\xi_1)(t-t_1-\tau)}\right)$$

所以当 $t\ge t_1+\tau+\gamma\tau$ 时，

$$S(t)\ge\frac{\lambda A}{\xi_1+b\beta(b)B}\left(1-\mathrm{e}^{-(\xi_1+b\beta(b)B)(t-t_1-\tau)}\right)=S^* \tag{9}$$

由上述不等式，当 $t \ge 2\gamma\tau+\tau$ 时，有：

$$\dot{V}(t)=\left[\beta(I)S(t)-\frac{\xi_2+\varphi}{B}\right]\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)>\frac{\xi_2+\varphi}{B}\left[\frac{B}{\xi_2+\varphi}\beta(0)S^*-1\right]\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s) \tag{10}$$

取 $i^*=\min\limits_{\theta\in[-\tau,0]} I(2\gamma\tau+2\tau+\theta)$，

下证当 $t \ge 2\gamma\tau+\tau$ 时，$I(t)\ge i^*$。

若上式不成立，则存在 $T>0$，使得当 $2\gamma\tau+\tau\le t\le 2\gamma\tau+2\tau+T$ 时，有 $I(t)\ge i^*$。

又因为 $i^*=\min\limits_{\theta\in[-\tau,0]} I(2\gamma\tau+2\tau+\theta)$，所以 $I(2\gamma\tau+2\tau+\theta)\ge I(2\gamma\tau+2\tau+T)$，而 $2\gamma\tau+2\tau+\theta<2\gamma\tau+2\tau+T$，所以 $\dot{I}(2\gamma\tau+2\tau+T)\le 0$。

当 $t=2\gamma\tau+2\tau+T$ 时，由系统(1)的第二个等式，有 $\dot{I}(t)=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)\ge\left[\beta(0)S^*B-(\xi_2+\varphi)i^*\right]>0$ 与上式 $\dot{I}(2\gamma\tau+2\tau+T)\le 0$ 矛盾。

所以当 $t\ge 2\gamma\tau+\tau$ 时，$I(t)\ge i^*$。

上面(10)式提到 $\dot{V}(t)>\dfrac{\xi_2+\varphi}{B}\left[\dfrac{B}{\xi_2+\varphi}\beta(0)S^*-1\right]\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)\ge(\xi_2+\varphi)\left[\dfrac{B}{\xi_2+\varphi}\beta(0)S^*-1\right]i^*>0$

即 $V(t)$ 单调递增，当 $t\to+\infty$ 时，$V(t)\to+\infty$ 这 $V(t)$ 有界矛盾。所以对 $t\ge t_1\ge\gamma\tau$，$I(t)\le b$ 不可能成立。

因此，以下将讨论 $I(t)$ 的两种情况：

1) $I(t)\ge b \quad t\ge t_1\ge\gamma\tau$

2) $I(t)$ 随着 b 动荡 $t\ge t_1\ge\gamma\tau$

当 t 足够大时，$I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}$，所以只需考虑第二种情况，当 t_1,t_2 足够大且满足 $I(t_1)=I(t_2)=b$，当 $t\in(t_1,t_2)$ 时，$I(t)<b$。

当 $t_2-t_1\le\tau-\gamma\tau$ 时，有 $\dot{I}(t)=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)$，所以 $\dot{I}(t)\ge-(\xi_2+\varphi)I(t)$。

则 $I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}$，$t\in[t_1,t_2]$。

当 $t_2-t_1>\tau-\gamma\tau$ 时，$I(t_1)=b$，$I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}$ 在区间 $[t_1+\tau+\gamma\tau,t_2]$ 同样成立。

若不成立，则存在 $T^*>0$，使得在区间 $[t_1,t_1+\tau+\lambda\tau]$ 上。$I(t_1+\tau+\lambda t+T^*)=b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}$ 且

$$\dot{I}(t_1+\tau+\lambda\tau+T^*)\le 0. \tag{11}$$

当 $t=t_1+\tau+\lambda\tau+T^*$ 时，

$$\begin{aligned}\dot{I}(t)&=\beta(I)S(t)\int_0^\tau I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-(\xi_2+\varphi)I(t)\\&\ge\left[\beta(0)BS^*-(\xi_2+\varphi)\right]b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}>0\end{aligned} \tag{12}$$

可以看出(11)式与(12)式矛盾。

所以 $I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}$，$t\in[t_1,t_2]$，进而 $\liminf\limits_{t\to+\infty} I(t)\ge b\mathrm{e}^{-(\xi_2+\varphi)(\tau+\gamma\tau)}=C_2>0$，证毕。

命题 3.4 由系统(1.1)的系统的第三个等式，可得带有初始条件的解 (S,I,Q,R) 满足 $\liminf\limits_{t\to+\infty} Q(t)\ge\dfrac{\varphi C_2}{\xi_3+\delta}=C_3>0$。

命题 3.5 由系统(1.1)的第四个等式，可得带有初始条件的解 (S,I,Q,R) 满足 $\liminf\limits_{t\to+\infty} R(t)\ge\dfrac{\delta C_3}{\xi_4+\varsigma}=C_4>0$。

由命题 3.1—命题 3.4，存在以下定理：

定理 3.1 当 $R_0 > 1$，系统(1)是永久的。

4. 平衡点的渐近稳定性

本节将讨论系统(1)平衡点的渐近稳定性，首先假设是一个常数，所以系统(1)改写成如下形式：

$$\begin{aligned}
&\dot{S}(t) = \lambda A - \beta S(t)\int_0^{\tau} I(t-s)\mathrm{d}\eta(s) - \xi_1 S(t) + \varsigma R(t) \\
&\dot{I}(t) = \beta S(t)\int_0^{\tau} I(t-s)\mathrm{d}\eta(s) - (\xi_2 + \varphi) I(t) \\
&\dot{Q}(t) = \varphi I(t) - (\xi_3 + \delta) Q(t) \\
&\dot{R}(t) = \delta Q(t) - (\xi_4 + \varsigma) R(t) \\
&N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)
\end{aligned} \tag{13}$$

以下内容将在不变集 $\Omega = \left\{ (S,I,Q,R) \in R^4 : S,I,Q,R \ge 0, S+I+Q+R \le \dfrac{\lambda A}{\xi_1} \right\}$ 进行研究。

引理 4.1 当 $\theta \in [-\tau, 0]$，若 $(S(\theta), I(\theta), Q(\theta), R(\theta)) \in \Omega$，则 $(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \Omega$，$t \ge 0$。

证明：在先前证明中，可知当 $t \ge 0$ 时，带有初始条件的解 (S,I,Q,R) 是正的，

即 $S(0) > 0, I(0) > 0, Q(0) > 0, R(0) > 0$。因此，只需证明 $S(0) \ge 0, I(0) \ge 0, Q(0) \ge 0, R(0) \ge 0$。

因为系统(13)等式右边是完全连续且在 C 上是局部 Lipschitzian，所以当 $0 < b < +\infty$ 时，

系统(13)的解在区间 $[0,b]$ 上唯一存在。

下面说明对于所有的 $t \in (0,b)$，有 $S(t) > 0$。

当 $S(0) > 0$ 时，由于 $S(t)$ 是连续的，所以当 $0 \ll t < 1$ 时，有 $S(t) > 0$。

当 $S(0) = 0$ 时，因为 $\dot{S}(0) = \lambda A + \varsigma R(t) > 0$，所以当 $0 < t \ll 1$ 时，有 $S(t) > 0$。

若 $S(t) > 0$ 在 $(0,b)$ 不成立，则存在 $t_1 \in (0,b)$ 使得 $S(t_1) = 0$，$\dot{S}(t_1) \le 0$ 成立，且当 $t \in (0,t_1)$，$S(t) > 0$。

所以 $S(t) > 0$，实际上，若 $t_1 \le \tau$，由系统(13)的第二个等式，有 $\dot{I}(t) \ge -(\xi_2 + \varphi) I(t)$，$0 \le t \le \tau$。

即 $I(t) \ge 0$ 在区间 $[0,\tau]$ 上成立。由归纳法可得当 $t \in (0,t_1]$ 时，有 $I(t) \ge 0$。

由系统(13)的第三个等式，有 $Q'(t) \ge -(\xi_3 + \delta) Q(t)$，$0 \le t \le t_1$，则 $Q(t) \ge Q(0)\mathrm{e}^{-(\xi_3+\delta)t} \ge 0$，$t \in (0,t_1)$。

同样地，由系统(13)的第四个等式，有 $R'(t) \ge -(\xi_4 + \varsigma) R(t)$，$t \in (0,t_1)$，则 $R(t) \ge R(0)\mathrm{e}^{-(\xi_4+\varsigma)t} \ge 0$，$t \in (0,t_1]$。因此，$\dot{S}(t_1) = \lambda A + \varsigma R(t) > 0$ 与上面假设 $\dot{S}(t_1) \le 0$ 矛盾。因此，证明了 $S(t) > 0$ 在区间 $(0,b)$ 成立。

由上述证明，可得当 $t \in (0,b)$ 时，$I(t) \ge 0$，$Q(t) \ge 0$，$R(t) \ge 0$。

因此当 $t \in [0,b)$，而 $\dot{N}(t) \le \lambda A - \xi_1 N(t)$，$N(0) \le S(0) + I(0) + Q(0) + R(0) \le \dfrac{\lambda A}{\xi_1}$，

由上述不等式有 $N(t) \le \dfrac{\lambda A}{\xi_1}$，$t \in [0,b)$。因此，$(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 在 $t \in [0,b)$ 有界，令 b 趋向于正无穷，有 $(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \Omega$，$t \ge 0$。

定理 4.1 当 E^* 时，系统(13)的无病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的，当 $R_0 > 1$ 时，无病平衡点 E_1 是不稳定的且地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的当且仅当下列条件成立：

$$(\xi_1 - \xi_3)^2 < 2\xi_1 \left[\xi_1 + \frac{\xi_2 + \xi_3}{\varphi(\xi_3 + \varphi)} \right];$$

$$(\xi_4 + \xi_1)^2 < \left[\xi_4 + \frac{(\xi_3 + \xi_4)(\xi_4 + \varsigma)}{\delta} \right];$$

$$\left(\xi_4+\xi_2\right)^2<2\xi_2\left[\xi_4+\frac{\left(\xi_3+\xi_4\right)\left(\xi_4+\varsigma\right)}{\delta}\right]. \tag{14}$$

1) 当 $R_0<1$ 时，构造下列 Lyapunov 函数：

$$V(t)=I(t)+q_1Q(t)+q_2R(t)+q_3\int_0^{\tau}\int_{t-s}^{t}I(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta(s)+\frac{q_4}{2}\left(S(t)-S_1\right)^2$$

其中 $q_i>0$， $S_1=\dfrac{\lambda A}{\xi_1}$。

$$\text{则}\ V(t)\geq\min\left\{1,q_1,q_2,\frac{q_4}{2}\right\}\left[I(t)+Q(t)+R(t)+\left(S(t)-S_1\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\left[\beta S-q_3-q_4\beta S\left(S-S_1\right)\right]\int_0^{\tau}I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\left[\left(\xi_2+\varphi\right)-q_3B+q_1\varphi\right]I(t)\\&-\left[q_1\left(\xi_3+\delta\right)-q_2\delta\right]Q(t)-\left[q_2\left(\xi_4+\delta\right)-q_4\left(S-S_1\right)\right]R(t)\\\leq&\left[\beta S-q_3-q_4\beta S\left(S-S_1\right)\right]\int_0^{\tau}I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\left[\left(\xi_2+\varphi\right)-q_3B+q_1\varphi\right]I(t)\\&-q_1\left(\xi_3+\delta\right)Q(t)-q_2\left(\xi_4+\delta\right)R(t)\end{aligned}$$

选择 $q_i>0$，满足条件：

(i) $q_3B+q_1\varphi<\left(\xi_2+\varphi\right)$；

(ii) $\left(q_4\beta S_0+\beta\right)^2<4q_4\beta q_3$。

首先 $R_0<1$ 时意味着 $\beta BS_1<\xi_2+\varphi$，选择 $q_3=\beta S_1+\varepsilon$，其中 ε 为任意小正数，使得 $\beta BS_1+B\varepsilon<\xi_2+\varphi$。选择 $q_4>0$ 满足条件(ii)，进一步选择 $q_1>0$，满足条件(i)。

所以在 Ω 上，有

$$\dot{V}(t)\leq-\left[\left(\xi_2+\varphi\right)-q_3B+q_1\varphi\right]I(t)-q_1\left(\xi_3+\delta\right)Q(t)-q_2\left(\xi_4+\delta\right)R(t) \tag{15}$$

(15)式是负定的当且仅当 $(S,I,Q,R)=E_1$， 由引理 2.1，可得到无病平衡点是局部渐近稳定的。

2) 当 $R_0>1$ 时，作变换： $x(t)=S(t)-S^*$， $y(t)=I(t)-I^*$， $z(t)=Q(t)-Q^*$， $u(t)=R(t)-R^*$

系统(13)改写为下列形式：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=-\beta\left(x(t)+S^*\right)\int_0^{\tau}y(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\left(\beta BI^*+\xi_1\right)x(t)+\varsigma u(t)\\&\dot{y}(t)=\beta\left(x(t)+S^*\right)\int_0^{\tau}y(t-s)\mathrm{d}\eta(s)+\beta BI^*x(t)-\left(\xi_2+\varphi\right)y(t)\\&\dot{z}(t)=\varphi y(t)-\left(\xi_3+\delta\right)z(t)\\&\dot{u}(t)=\delta z(t)-\left(\xi_4+\varsigma\right)u(t)\end{aligned} \tag{16}$$

系统(16)的线性部分为：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=-\beta S^*\int_0^{\tau}y(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\left(\beta BI^*+\xi_1\right)x(t)+\varsigma u(t)\\&\dot{y}(t)=\beta S^*\int_0^{\tau}y(t-s)\mathrm{d}\eta(s)+\beta BI^*x(t)-\left(\xi_2+\varphi\right)y(t)\\&\dot{z}(t)=\varphi y(t)-\left(\xi_3+\delta\right)z(t)\\&\dot{u}(t)=\delta z(t)-\left(\xi_4+\varsigma\right)u(t)\end{aligned} \tag{17}$$

系统(17)有形如指数形式的解：

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{\lambda t};y(t)=y_0\mathrm{e}^{\lambda t};z(t)=z_0\mathrm{e}^{\lambda t};u(t)=u_0\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{18}$$

将(18)代入(17)可得：

$$\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\left(\beta BI^*+\xi_1\right) & -\beta S^*\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s) & 0 & z\\ \beta BI^* & \beta S^*\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s)-\left(\xi_2+\varphi\right) & 0 & 0\\ 0 & \varphi & -\left(\xi_3+\delta\right) & 0\\ 0 & 0 & \delta & -\left(\xi_4+\varsigma\right)\end{pmatrix}$$

因此，可得到以下特征方程：

$$\begin{vmatrix}\lambda_1+\beta BI^* & \beta S^*\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s) & 0 & \varsigma\\ -\beta BI^* & \lambda_1-\beta S^*\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s)+\left(\xi_2+\varphi\right) & 0 & 0\\ 0 & -\varphi & \lambda_1+\xi_3+\varphi & 0\\ 0 & 0 & -\delta & \lambda_1+\xi_4+\varsigma\end{vmatrix}=0$$

若 $\left(S^*,I^*,Q^*,R^*\right)=E_1=\left(\dfrac{\lambda A}{\xi_1},0,0,0\right)$，则在 E_1 处的特征方程为：

$$\left(\lambda_1+\xi_1\right)\left(\lambda_1+\xi_4+\varsigma\right)^2\left[\lambda_1-\beta\frac{\lambda A}{\xi_1}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s)+\left(\xi_2+\varphi\right)\right]=0 \tag{19}$$

令 $g\left(\lambda_1\right)=\lambda_1-\beta\dfrac{\lambda A}{\xi_1}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\eta(s)+\left(\xi_2+\varphi\right)$，$g(0)<0$，且当 $\lambda\to+\infty$ 时，$g(\lambda)\to+\infty$，所以存在 $\lambda_0>0$ 使得 $f\left(\lambda_0\right)=0$。

所以(19)式至少有一正实部的解，即当 $R_0>1$ 时，E_1 不稳定。

下面通过分析新系统(17)在 $(0,0,0,0)$ 的全局稳定性来讨论系统(13)的地方病平衡点的局部渐近稳定性。下面考虑 Lyapunov 函数

$$V\left(h_t\right)=V_1\left(h_t\right)+V_2\left(h_t\right)$$

$$V_1\left(h_t\right)=\frac{1}{2}w_1\left(x+y+z+u\right)+\frac{1}{2}w_2y^2+\frac{1}{2}w_3z^2+\frac{1}{2}w_4u^2$$

$$V_2\left(h_t\right)=\frac{1}{2}w_2\beta S^*\int_0^\tau\int_{t-s}^t y^2(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\eta(s)$$

其中 $h_t=\left(x_t,y_t,z_t,u_t\right)$，$w_i\geq 0$

$$\begin{aligned}\dot V_1\left(h_t\right)=&-w_1\xi_1x^2-\left[w_1\xi_2+w_2\left(\xi_2+\varphi\right)\right]y^2-\left[w_3\left(\xi_3+\varphi\right)\right]z^2-\left[w_1\xi_4+w_4\left(\xi_4+\varsigma\right)\right]u^2\\&-\left(w_1\xi_2+w_1\xi_1\right)xy+\left(w_1\xi_3-w_1\xi_1\right)xz-\left(w_1\xi_4+w_1\xi_1\right)xu-\left(w_1\xi_3+w_1\xi_2-w_3\varphi\right)yz\\&-\left(w_1\xi_4+w_1\xi_2\right)yu-\left(w_1\xi_3+w_1\xi_4-w_4\delta\right)uz+w_2\beta S^*\int_0^\tau y(t)y(t-s)\mathrm{d}\eta(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot V_1\left(h_t\right)\leq&-w_1\xi_1x^2-\left[w_1\xi_2+w_2\left(\xi_2+\varphi\right)\right]y^2-\left[w_3\left(\xi_3+\varphi\right)\right]z^2-\left[w_1\xi_4+w_4\left(\xi_4+\varsigma\right)\right]u^2\\&+\left(w_2\beta BI^*-w_1\xi_2-w_1\xi_1\right)xy+\left(w_1\xi_3-w_1\xi_1\right)xz-\left(w_1\xi_4+w_1\xi_1\right)xu-\left(w_1\xi_3+w_1\xi_2-w_3\varphi\right)yz\\&-\left(w_1\xi_4+w_1\xi_2\right)yu-\left(w_1\xi_3+w_1\xi_4-w_4\delta\right)uz+\frac{w_2\beta S^*}{2}\int_0^\tau\left[y^2(t)-y^2(t-s)\right]\mathrm{d}\eta(s)\end{aligned}$$

$$\dot V_2(t)=\frac{w_2\beta S^*}{2}\int_0^\tau\left[y^2(t)-y^2(t-s)\right]\mathrm{d}\eta(s)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(h_t) \le & -w_1\xi_1 x^2 - w_1\xi_2 y^2 - \left[w_3(\xi_3+\varphi)+w_1\xi_3\right]z^2 - \left[w_1\xi_4 + w_4(\xi_4+\varsigma)\right]u^2 \\ & + \left(w_2\beta BI^* - w_1\xi_2 - w_1\xi_1\right)xy + \left(w_1\xi_3 - w_1\xi_1\right)xz - \left(w_1\xi_4 + w_1\xi_1\right)xu \\ & - \left(w_1\xi_3 + w_1\xi_2 - w_3\varphi\right)yz - \left(w_1\xi_4 + w_1\xi_2\right)yu - \left(w_1\xi_3 + w_1\xi_4 - w_4\delta\right)uz\end{aligned} \tag{20}$$

取 $w_1 = 1$， $w_2 = \dfrac{\xi_1+\xi_2}{\beta BI^*}$， $w_3 = \dfrac{\xi_2+\xi_3}{\varphi}$， $w_4 = \dfrac{\xi_3+\xi_4}{\delta}$， 则

$$\begin{aligned}(20)\text{式不等式右端} = & -\xi_1 x^2 - \xi_2 y^2 - \left[\frac{\xi_2+\xi_3}{\varphi(\xi_3+\varphi)} + \xi_1\right]z^2 - \left[\xi_4 + \frac{(\xi_3+\xi_4)(\xi_4+\varsigma)}{\delta}\right]u^2 \\ & -(\xi_1-\xi_3)xz - (\xi_4+\xi_1)xu - (\xi_4+\xi_2)yu\end{aligned} \tag{21}$$

进一步，将(21)式拆分，上式可得：

$$\begin{aligned}= & -\frac{1}{2}\xi_1 x^2 - \frac{1}{2}\xi_1 x^2 - \xi_2 y^2 - \left[\frac{\xi_2+\xi_3}{\varphi(\xi_3+\varphi)} + \xi_1\right]z^2 - \frac{1}{2}\left[\xi_4 + \frac{(\xi_3+\xi_4)(\xi_4+\varsigma)}{\delta}\right]u^2 \\ & -\frac{1}{2}\left[\xi_4 + \frac{(\xi_3+\xi_4)(\xi_4+\varsigma)}{\delta}\right]u^2 - (\xi_1-\xi_3)xz - (\xi_4+\xi_1)xu - (\xi_4+\xi_2)yu\end{aligned}$$

由条件(14)可知(20)式右端是负定的，进一步知 $\dot{V}(h(t))$ 是负定的，由引理 2.1 可得系统(15)的平衡点 $(0,0,0,0)$ 是全局渐近稳定的，即系统(1)的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的，证毕。

本文在构建传染病模型后，计算出基本再生数、无病平衡点以及地方病平衡点。之后本文得出了当基本再生数大于 1 时，易感者、感染者、隔离者、恢复者是有下限的，进而得出传染病是永久的，也是本文的一个创新点。之后本文又对无病平衡点和地方病平衡点的稳定性进行了分析。虽然在本模型中加入了隔离人群，但是实际生活中面对某种传染病爆发时，除了对感染者进行隔离处理，还通常会对易感者进行疫苗接种来减少感染人数，所以接下来也可以在本文模型的基础上加上疫苗接种人群进行分析。

致　谢

感谢孙小淇老师对本文的悉心指导以及文本中所引用文献的所有作者，他们卓有成效的研究成果是本论文研究的基础。

参考文献

[1] Ma, Z., Zhou, Y., Wang, W. and Jin, Z. (2004) Mathematical Modelling and Research of Epidemic Dynamical Systems. Science Press, Beijing.

[2] Anderson, R.M. and May, R.M. (1979) Population Biology of Infectious Diseases: Part I. *Nature*, **280**, 361-367. https://doi.org/10.1038/280361a0

[3] 刘娟. 一类随机 SIQS 传染病模型的持久性[J]. 新乡学院学报, 2020, 37(12): 1-4.

[4] Thieme, H.R. (2000) Uniform Persistence and Permanence for Nonautonomous Semiflows in Population Biology. *Mathematical Biosciences*, **166**, 173-201. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00018-3

[5] Hethcote, H.W. (1976) Qualitative Analyses of Communicable Disease Models. *Mathematical Biosciences*, **28**, 335-356. https://doi.org/10.1016/0025-5564(76)90132-2

[6] Ma, W., Takeuchi, Y., Hara, T. and Beretta, E. (2002) Permanence of an SIR Epidemic Model with Distributed Time Delays. *Tohoku Mathematical Journal*, **54**, 581-591. https://doi.org/10.2748/tmj/1113247650

[7] Ma, W., Song, M. and Takeuchi, Y. (2004) Global Stability of an SIR Epidemic Model with Time Delay. *Applied Mathematics Letters*, **17**, 1141-1145. https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.11.005

[8] Zhang, T.L. and Teng, Z.D. (2008) Global Behavior and Permanence of SIRS Epidemic Model with Time Delay. *Real World Application*, **9**, 1409-1424. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.03.010

[9] 崔玉美, 陈姗姗, 傅新楚. 几类传染病模型中基本再生数的计算[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2017, 14(4): 14-31.

[10] Hale, J.K. (1977) Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2