Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 2316-2332
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114244

Hans汉斯

非线性扩散波关于可压缩微极流体方程解的渐近稳定性

高 倩

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年3月28日；录用日期：2022年4月22日；发布日期：2022年4月29日

摘 要

本文研究一维可压缩等熵微极流体方程解的大时间行为，我们证明在初始扰动和波的强度适当小的条件下，当时间 $t \to +\infty$ 时，该方程的解收敛于平面扩散波 $(\bar{v}, \bar{u}, 0)$，并得到了相应的衰减速度 $(1+t)^{-\frac{1}{4}}$，本文主要的研究方法为能量方法，结合了反导数法、Cauchy不等式和Young-不等式证明了非线性扩散波关于可压缩微极流体方程解的渐近稳定性。

关键词

可压缩微极流体方程，非线性扩散波，能量方法

Asymptotic Stability of Nonlinear Diffusion Wave Solutions for Compressible Micropolar Fluid Equations

Qian Gao

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 28th, 2022; accepted: Apr. 22nd, 2022; published: Apr. 29th, 2022

Abstract

In this paper, we study the large time behavior of the solution of one dimensional compressible isentropic micropolar fluid equation. Under the condition of the initial disturbance and wave intensity being appropriately small, at time $t \to +\infty$, we prove that the solution of the equation

文章引用: 高倩. 非线性扩散波关于可压缩微极流体方程解的渐近稳定性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2316-2332.
DOI: 10.12677/aam.2022.114244

converges to plane diffusion wave $(\bar{v},\bar{u},0)$, and the corresponding decay rate $(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ is obtained. The main research method in this paper is the energy method, which combines the inverse derivative method, Cauchy inequality and Young inequality. By using these methods, we prove the asymptotic stability of the solution of the nonlinear diffusion wave to the compressible micropolar fluid equation.

Keywords

Compressible Micropolar Fluid Equation, Nonlinear Diffusion Waves, Energy Methods

1. 引言

在本文中我们研究如下具有粘度相关系数的一维可压缩等熵微极流体方程的大时间行为

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + p(v)_x = -\alpha u & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ \omega_t = \left(\dfrac{A(v)\omega_x}{v}\right)_x - 4\mu_r(v)v\omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

给定初值

$$(v,u,\omega)(x,0) = (v_0,u_0,\omega_0)(x), \tag{1.2}$$

且满足条件

$$\lim_{x\to\pm\infty}(v_0,u_0,\omega_0)(x) = (v_\pm,u_\pm,\omega_\pm), \tag{1.3}$$

此处 t 和 x 分别代表时间和空间变量。这里 v 表示比容，u 表示速度，ω 表示微旋转速度，$p(v)$ 表示压力，$\alpha>0$ 表示阻尼系数。

在这篇文章中

$$p(v) = v^{-\gamma},\ \gamma\ge 1, \alpha\ge 0,$$

并且 $A(v),\mu_r(v)$ 是关于 v 的光滑的正函数 $(v>0)$，表示微粘度系数。

如果忽略流体的微观结构，即 $\omega=0$，系统(1.1)可视为拉格朗日坐标下带阻尼的等熵欧拉方程，动量方程中带有阻尼项 αu，可用于模拟多孔介质中的可压缩流。

此时，系统(1.1)等同系统

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + p(v)_x = -\alpha u, \end{cases} \tag{1.4}$$

初值满足

$$(u(x,0),v(x,0)) = (u_0(x),v_0(x)) \to (u_\pm,v_\pm),\quad \text{as } x\to\pm\infty \tag{1.5}$$

当 $v_- \ne v_+$，此时方程有波的现象。刘太平[1] [2]证明了在初始扰动和波的强度 $|u_+ - u_-|$ 较小的情况下，当

$t \to \infty$ 时，

$$|v_+ - v_-| < \delta,\ (v_+ \neq v_-),$$

方程(1.4)的解趋向于非线性扩散波 $(\bar{v},\bar{u})$。其中 $(\bar{v},\bar{u})$ 满足方程

$$\begin{cases} \bar{v}_t - \bar{u}_x = 0, \\ p(\bar{v})_x = -\alpha \bar{u}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

而对于带阻尼的非线性发展方程的柯西问题，已经有许多关于基本波的渐近稳定性的研究，参考文献[3] [4] [5] [6]。如在一维情况下，刘太平[5] [6]先证明了在初始扰动和波的强度满足小性条件的情况下，非线性扩散波关于带阻尼的双曲守恒律方程的渐近稳定性。对于方程(1.4)，Nishihara 在[7] [8]进一步利用能量方法得到了和刘太平相同的结果，并获得在 L^2 和 L^∞ 范数下的收敛速度。对于小性条件下收敛速度其他相关结论，我们参考[9] [10]，与此同时，也有很多作者针对初始扰动较大的情况进行了研究，如 Zhao [11]证明了对于给定的大初始值情况下，带摩擦阻尼的 p 系统存在唯一的整体光滑解，且当时间 $t \to \pm\infty$ 时，该方程的解渐近趋向于对应的非线性扩散波 $(\bar{v},\bar{u})(x,t)$，并且他还得到了 $L^p\ (2 \le p \le \infty)$ 范数下的衰减速率。对于具有非线性阻尼的 p 系统的柯西问题的其他结果，我们参考[12]-[23]。

我们的方程与(1.4)相比，增加一个方程，考虑了微旋转速度 ω，即思考了微观结构该模型的渐近行为，增加了耦合性和研究该模型的难度，这也是本文的创新之处。

本文研究了一维可压缩微极流体模型(1.1)问题解的大时间行为，该模型具有一般的微粘度相关系数。我们将证明，在粘度系数 $A(v), \mu_r(v), (v>0)$ 是关于 v 的光滑的正函数，并且初始扰动和波的强度足够小的情况下，那么方程(1.1)~(1.3)的解整体存在，并且当 $t \to \infty$ 时，该解收敛到非线性扩散波 $(\bar{v},\bar{u},0)(x,t)$。文章主要结果的精确陈述在下面的定理 1.1。

定理 1.1 设 $A(v), \mu_r(v), (v>0)$ 是关于 v 的光滑正函数，设 $(v_0,u_0,\omega_0)(x) \in H^2 \times H^2 \times H^2$，则存在适当小的 $\delta > 0$，当 $|u_+ - u_-| + |v_+ - v_-| + \|(v-\bar{v})(x)\|_2 + \|(u-\bar{u})(x)\|_2 + \|\omega(x)\|_2 \le \delta$ 时，方程(1.1)~(1.3)的解 (v,u,ω) 全局存在，并且满足

$$v - \bar{v} - m \in C\left(0,\infty,H^2\right),\ u - \bar{u} - \hat{u} \in C\left(0,\infty,H^2\right),\ \omega \in C\left(0,\infty,H^2\right),$$

$$v_x - \bar{v}_x - m_x \in L^2\left(0,\infty,H^1\right),\ u_x - \bar{u}_x - \hat{u} \in L^2\left(0,\infty,H^1\right),\ \omega_x \in L^2\left(0,\infty,H^1\right),$$

当 t 趋于无穷时，进一步有以下结论：

$$\begin{aligned} &1)\ \left\|\partial_x^k\left(v(x,t) - \bar{v}(x+x_0,t) - m\right)\right\|_{L^2} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{k}{2}}, \\ &2)\ \left\|\partial_x^k\left(u - \bar{u} - \hat{u}\right)(x,t)\right\|_{L^2} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{k}{2}}, \\ &3)\ \left\|\partial_x^k \omega(x,t)\right\|_{L^2} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{k}{2}},\ k = 1,2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &4)\ \left\|(v - \bar{v} - m)(t)\right\|_{L^\infty} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{1}{4}}, \\ &5)\ \left\|(u - \bar{u} - \hat{u})(t)\right\|_{L^\infty} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{1}{4}}, \\ &6)\ \left\|\omega(t)\right\|_{L^\infty} = O(1)\delta(1+t)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 x_0 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(v(x,0) - \bar{v}(x+x_0,t)\right)\mathrm{d}x = \frac{u_+ - u_-}{-\alpha}, \tag{1.11}$$

并且

$$\hat{u} \equiv u_- e^{-\alpha t} + \int_{-\infty}^{x} m_t(\eta,t)\,d\eta,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} m_0(x)\,dx = 1, \tag{1.12}$$
$$m(x,t) \equiv -\frac{u_+ - u_-}{-\alpha} m_0(x,t) e^{-\alpha t}.$$

本文的安排如下：在第二部分，我们给出一些在证明过程中所需相关引理；在第三部分，我们对问题(1.1)~(1.3)的扰动方程进行基本能量估计和时间加权估计，从而证明定理 1.1。

标记在文章中，我们用 $C, O(1)$ 表示正常数。对于函数空间来说，$L^p = L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p \le \infty)$ 表示一般的 Lebesgue 空间，其范数为

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.13}$$

$$|f|_{L^\infty} = \sup_{,-\infty<x<\infty} |f(x)|,\ 1 \le p < \infty, \tag{1.14}$$

并且积分区域 R 将会被省略，而不产生混淆概念的后果，用 $H^m(m \ge 0)$ 用来表示 m 阶 Sobolev 空间，其范数为

$$\|f\| = \left(\sum_{k=0}^{m} \|\partial_x^k f\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|\cdot\| = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2}. \tag{1.15}$$

2. 准备工作

非线性扩散方程，其中一自相似解 $(\bar{v},\bar{u})\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)$ 满足

$$\begin{cases} \bar{v}_t - \bar{u}_x = 0, \\ p(\bar{v})_x = -\alpha \bar{u}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

命题 2.1 (参考[24])对于上述该自相似解，当 $x \to \pm\infty$ 时，有 $v(\pm\infty,t) = v_\pm$，让 $\zeta = \frac{x}{\sqrt{1+t}}$，则有以下性质：

$$1)\ \left|\bar{v}(\zeta) - v_-\right|_{\zeta>0} + \left|\bar{v}(\zeta) - v_+\right|_{\zeta<0} \le C|v_+ - v_-| e^{-\mu\zeta^2}, \tag{2.2}$$

$$2)\ \left|\partial_x^r \partial_t^l \bar{v}\right| \le C|v_+ - v_-|(1+t)^{-\frac{r+2l}{2}} e^{-\frac{\mu\zeta^2}{1+t}},\ r+l \ge 1,\ r,l \ge 0, \tag{2.3}$$

$$3)\ \left|\partial_x^r \partial_t^l \bar{u}\right| \le C|v_+ - v_-|(1+t)^{-\frac{r+2l+1}{2}} e^{-\frac{\mu\zeta^2}{1+t}},\ r,l \ge 0. \tag{2.4}$$

其中 C 是大于 0 的常数，r,l 是正整数，该引理在下面第三部分的证明中起了一定的作用。

3. 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1，我们首先构造扰动方程

令

$$\phi(x,t) = v(x,t) - \bar{v}(x+x_0,t) - m(x,t),$$

$$\psi(x,t)=u(x,t)-\bar{u}(x+x_0,t)-\hat{u}(x,t),$$
$$\omega(x,t)=\omega(x,t),$$

其中

$$\hat{u}\equiv u_- e^{-\alpha t}+\int_{-\infty}^{x} m_t(\eta,t)\,\mathrm{d}\eta,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} m_0(x)\,\mathrm{d}x=1,$$
$$m(x,t)\equiv-\frac{u_+-u_-}{-\alpha}m_0(x,t)e^{-\alpha t},$$

我们得到以下扰动方程

$$\begin{cases}\phi_t-\psi_x=0\\ \psi_t+\left[p(\phi+\bar{v}+m)-p(\bar{v})\right]_x+\bar{u}_t+\alpha\psi=0\\ \omega_t=\left(\dfrac{A(v)\omega_x}{v}\right)_x-4\mu_r(v)v\omega,\end{cases} \tag{3.1}$$

初值满足

$$\begin{aligned}\left(\phi(t,x),\psi(t,x),\omega(t,x)\right)\Big|_{t=0}&=\left(\phi_0(x),\psi_0(x),\omega_0(x)\right)\\&=\left(v_0(t)-\bar{v}_0(t)-m_0(t),u_0(t)-\bar{u}_0(t)-\hat{u}_0(t),\omega_0(x)\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

我们令

$$y(x,t)=\int_{-\infty}^{x}\phi(\eta,t)\,\mathrm{d}\eta,$$

注意到

$$y(\infty,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\eta,t)\,\mathrm{d}\eta=0=y(-\infty,t),$$

那么根据$(3.1)_1$，可以得到

$$y_x=\phi, \tag{3.3}$$

$$y_t=\int_{-\infty}^{x}\phi_t(\eta,t)\,\mathrm{d}\eta=\int_{-\infty}^{x}\psi_x(\eta,t)\,\mathrm{d}\eta=\psi, \tag{3.4}$$

则扰动方程(3.1)转换为以下形式

$$\begin{cases}y_{tt}+\left[p(y_x+\bar{v}+m)-p(\bar{v})\right]_x+\alpha y_t-\dfrac{1}{\alpha}p(\bar{v})_{xt}=0,\\ \omega_t=\left(\dfrac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right)_x-4\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega,\end{cases} \tag{3.5}$$

初值为

$$(y,\omega)(x,0)=\left(y_0(x),\omega_0(x)\right),\ y_t(x,0)=y_1, \tag{3.6}$$

由于定理 1.1 的条件以及(3.2)知

$$y(x,0)\in H^2(\mathbb{R}),\ y_t(x,0)\in H^1(\mathbb{R}),\ \omega(x,0)\in H^2(\mathbb{R}), \tag{3.7}$$

通过以上分析，我们知道，只要证明问题(3.5)~(3.6)的解的整体存在性，即可证明问题(1.1)~(1.2)的解的整体存在性，因此问题转化为如何证明(3.5)~(3.6)解的整体存在性并得到相应的衰减估计。

定义初值问题(3.5)~(3.6)的解空间如下：

$$X(0,T)=\left\{y\in L^{\infty}\left(0,T;H^{3}\right),\omega\in L^{\infty}\left(0,T;H^{2}\right)\cap L^{2}\left(0,T;H^{1}\right),y_{x}\in L^{2}\left(0,T;H^{2}\right)\right\}$$

定理 3.1 (整体存在性)设初值满足(3.7)，则存在与$u_{\pm},v_{\pm}$无关的$\tilde{\delta}$，使得当

$$|u_{+}-u_{-}|+|v_{+}-v_{-}|+N_{0}\le\tilde{\delta} \tag{3.8}$$

时，初值问题(3.5)~(3.6)的解(y,ω)在$X[0,\infty]$中全局存在且唯一。

根据偏微分方程的经典理论，初值问题(3.5)~(3.6)的解局部存在且唯一。

定理 3.2 (局部存在性)假设$(y_{0},\omega_{0})\in H^{3}\times H^{2}$，且$N_{0}\le\frac{\varepsilon_{0}}{2}$，则存在正常数$T_{0}$，其中

$$N_{0}=\|y_{0}\|_{H^{2}}+\|\omega_{0}\|_{H^{2}}+\|y_{1}\|_{H^{1}}, \tag{3.9}$$

使得问题(3.5)~(3.6)在$[0,T_{0}]$上有唯一解$(y,\omega)\in X(0,T_{0})$，且满足

$$\|(y,\omega)\|_{H^{2}}^{2}\le C_{1}\left(\|(y_{0},\omega_{0})\|_{H^{2}}^{2}+\|y_{t}(0)\|_{H^{1}}^{2}\right), \tag{3.10}$$

为了研究解的全局存在性和解的大时间渐近行为，我们只需要证明解的一致先验估计。为此，我们做如下先验假设：

先验假设 3.1 对于时间$T>0$，设(y,ω)是问题(3.5)~(3.6)问题的解，并且满足

$$N(T)=:\sum_{k=0}^{1}(1+k)^{k}\left\|\partial_{t}^{k}y(\cdot,t)\right\|^{2}+\sum_{k=0}^{2}(1+k)^{k}\left\|\partial_{x}^{k}y(\cdot,t)\right\|^{2}+\sum_{k=0}^{2}(1+k)^{k}\left\|\partial^{k}\omega(\cdot,t)\right\|^{2}\le C\varepsilon^{2}, \tag{3.11}$$

其中C是大于 0 的常数，ε是依赖于初值和波的强度的某个充分小的正常数。

根据先验假设 3.1 以及 Sobolev 引理，有

$$\begin{aligned}\|y\|_{L^{\infty}}&\le C\|y\|_{L^{2}}^{\frac{1}{2}}\|y_{x}\|_{L^{2}}^{\frac{1}{2}}\le C\delta(1+t)^{-\frac{1}{4}},\\\|y_{x}\|_{L^{\infty}}&\le C\|y_{x}\|_{L^{2}}^{\frac{1}{2}}\|y_{xx}\|_{L^{2}}^{\frac{1}{2}}\le C\delta(1+t)^{-\frac{3}{4}},\end{aligned} \tag{3.12}$$

同样地，

$$\|\omega\|_{L^{\infty}}\le C\delta(1+t)^{-\frac{1}{4}},\ \|\omega_{x}\|_{L^{\infty}}\le C\delta(1+t)^{-\frac{3}{4}}.$$

在先验假设 3.1 下，可证明如下先验估计：

定理 3.3 (先验估计)设$(y,\omega)\in X(0,T)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，则存在与$u_{\pm},v_{\pm}$无关的δ_{2}，使得$|u_{+}-u_{-}|+|v_{+}-v_{-}|+N_{0}\le\delta_{2}$时，下面估计对$t\in[0,T]$成立

$$N(t)^{2}+\int_{0}^{t}\left(\|y_{x}\|_{H^{1}}^{2}+\|y_{t}\|_{H^{1}}^{2}+\|\omega_{x}\|_{H^{1}}^{2}\right)\mathrm{d}t\le C_{2}\left(N_{0}^{2}+\delta^{2}\right). \tag{3.13}$$

其中$N(t)=\|(y,\omega)\|_{H^{2}}+\|y_{t}\|_{H^{1}}$。

下面我们将通过对(y,ω)进行低阶、高阶以及时间衰减估计来证明(3.13)式。

证明过程由下面几个引理构成。

引理 3.1 设$(y,\omega)\in X(0,T)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(y^{2}+y_{x}^{2}+y_{t}^{2}\right)(x,T)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_{t}^{2}+y_{x}^{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le CN_{0}^{2}, \tag{3.14}$$

证明：

在(3.5)$_1$ 两端同时乘以 y，并在 $[0,T]\times R$ 上进行积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\frac{y^2}{2}\mathrm{d}x\Big|_0^T+\int_{-\infty}^{\infty}yy_t\mathrm{d}x\Big|_0^T-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_x\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}y_x p\left(\bar{v}\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\end{aligned}\tag{3.15}$$

由于 $p'<0$，当 δ 足够小时，利用 Cauchy-Schwarz 不等式，由上式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}y^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=O\left(1\right)\left[\delta^2+\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\tag{3.16}$$

在(3.5)$_1$ 两端同时乘以 y_t，并在 $[0,T]\times R$ 进行积分，得到

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\mathrm{d}x\Big|_0^T+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\alpha y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xt}y_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{3.17}$$

令

$$q\left(x,t\right)\equiv-\int_0^{y_x}\left[p\left(\eta+\bar{v}\left(x,t\right)\right)-p\left(\bar{v}\left(x,t\right)\right)\right]\mathrm{d}\eta,$$

$$-q_t\equiv y_{xt}\left[p\left(y_x+\bar{v}\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]+\int_0^{y_x}\left[p'\left(\eta+\bar{v}\right)-p'\left(\bar{v}\right)\right]\bar{v}_t\mathrm{d}\eta,$$

由于 $p'<0$，则存在 $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2>0$，使得

$$\tilde{C}_2\left(y_x\right)^2\le q\le\tilde{C}_1\left(y_x\right)^2$$

从而

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}\left[p\left(y_x+\bar{v}\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}q\mathrm{d}x\Big|_0^T+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{y_x}\left[p'\left(\eta+\bar{v}\right)-p'\left(\bar{v}\right)\right]\left|\bar{v}_t\right|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}q\mathrm{d}x\Big|_0^T+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}O\left(1\right)y_x^2\left|\bar{v}_t\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\tilde{C}_1\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x-\tilde{C}_2\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\left(x,0\right)\mathrm{d}x+O\left(1\right)\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.18}$$

根据(3.13)，(3.17)满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_x^2+y_t^2\right)\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=O\left(1\right)\delta^2+O\left(1\right)\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{3.19}$$

则结合等式(3.16)得到基本估计

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(y^2+y_x^2+y_t^2\right)\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_t^2+y_x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le CN_0^2,\tag{3.20}$$

引理 3.2 设 $(y,\omega)\in X(0,T)$ 是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x, \tag{3.21}$$

证明：

将方程$(3.5)_2$乘上 $\omega(x,t)$，得到

$$\omega\omega_t=\omega\left(\frac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right)_x-4\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega^2, \tag{3.22}$$

将(3.22)关于 (t,x) 在 $[0,T]\times R$ 上积分，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.23}$$

根据先验假设(3.10)以及引理 2.1，存在一个大于 0 的常数 M'，使得

$$\frac{1}{M'}\le v=y_x+\bar{v}+m\le M',$$

那么在方程(3.23)中，我们有

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.24}$$

$$4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.25}$$

根据(3.24)、(3.25)，并结合(3.23)，整理得到

$$\int_R\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x, \tag{3.26}$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le CN_0^2, \tag{3.27}$$

现在我们来证明 ω_x 的高阶估计。

引理 3.3 设 $(y,\omega)\in X(0,T)$ 是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x, \tag{3.28}$$

证明：

将方程$(3.5)_2$对 x 求导，再乘上 ω_x

$$\omega_x\omega_{xt}=\omega_x\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right]_{xx}-4\omega_x\left[\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega\right]_x, \tag{3.29}$$

将(3.29)关于(t,x)在$[0,T]\times R$上积分得到，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2-(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}\left[\frac{A(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}\omega_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x\left[\mu_r(y_x+\overline{v}+m)(y_x+\overline{v}+m)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.30}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}\left[\frac{A(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}\omega_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}\right]_x\omega_x\omega_{xx}+\frac{A(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(y_{xx}+\overline{v}_x+m_x)A'(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}-\frac{(y_{xx}+\overline{v}_x+m_x)A(y_x+\overline{v}+m)}{(y_x+\overline{v}+m)^2}\right]\omega_x\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(y_x+\overline{v}+m)}{y_x+\overline{v}+m}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.31}$$

并且

$$\begin{aligned}&4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x\left[\mu_r(y_x+\overline{v}+m)(y_x+\overline{v}+m)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geq4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x\left[\mu_r(y_x+\overline{v}+m)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\mu_r(y_x+\overline{v}+m)\omega_x^2+\mu_r'(y_x+\overline{v}+m)(y_{xx}+\overline{v}_x+m_x)\omega\omega_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geq C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.32}$$

把(3.31)、(3.32)，代入(3.30)，取ε,δ适当小，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{3.33}$$

应用柯西不等式，并利用(3.21)有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x,\tag{3.34}$$

由初值条件以及引理 3.2 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq CN_0^2,\tag{3.35}$$

引理 3.4 设$(y,\omega)\in X(0,T)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_x^2(x,T)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty} y_{xt}^2(x,T)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty} y_{xx}^2(x,T)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} y_{xt}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} y_{xx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\delta^2, \tag{3.36}$$

证明：

对(3.5)$_1$有关 x 求导，同时乘以 y_x 得到

$$y_{xtt}y_x+\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_{xx}y_x+\alpha y_x y_{xt}-\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xxt}y_x=0$$

并在$[0,T]\times R$上进行积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} y_{xt}y_x\mathrm{d}x\Big|_0^T-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_{xx}y_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_x^2(x,T)\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_x^2(x,0)\,\mathrm{d}x-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xxt}y_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_{xx}y_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(y_x+\bar{v}+m\right)_x y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_x y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p'\left(y_x+\bar{v}+m\right)\left(y_{xx}+\bar{v}_x+m_x\right)y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_x y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_{xx}+\bar{v}_x+m_x\right)y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_x y_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xxt}y_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\Big|_0^T+\frac{1}{\alpha}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\ge C\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\Big|_0^T+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[p''\left(\bar{v}\right)\bar{v}_x^2+p'\left(\bar{v}\right)\bar{v}_{xx}\right]y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\ge C\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\Big|_0^T+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.39}$$

同样地对(3.5)$_1$有关 x 求导并乘以 y_{xt}，在$[0,T]\times R$上进行积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2(x,t)\,\mathrm{d}x\Big|_0^T+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\alpha y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xxt}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(y_x+\bar{v}+m\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_{xx}+\bar{v}_x+m_x\right)y_{xxt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\mathrm{d}x\Big|_0^T-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(\bar{v}_{xx}+m_{xx}\right)y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\bar{v}\right)_{xx}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\mathrm{d}x\Big|_0^T+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xxt}y_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{3.42}$$

将(3.38)~(3.39)代入(3.37)，同样地将(3.41)~(3.42)代入(3.40)，结合得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\left(x,0\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\left(x,0\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\left(x,0\right)\mathrm{d}x,\tag{3.43}$$

则得到以下了基本衰减估计：

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_x^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq CN_0^2,\tag{3.44}$$

接下来，我们进行有关时间衰减估计的证明。

引理 3.5 设$\left(y,\omega\right)\in X\left(0,T\right)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$\left(1+T\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_x^2+y_t^2\right)\left(x,T\right)\mathrm{d}x\leq C\delta^2,\tag{3.45}$$

证明：

在$(3.5)_1$两端同时乘以$\left(1+t\right)y_t$，并在$\left[0,T\right]\times R$上进行积分，得到

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t\right)y_ty_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t\right)y_t\left[p'\left(\bar{v}\right)y_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\left(1+t\right)y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}F\left(1+t\right)y_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{3.46}$$

这里

$$F=\frac{1}{\alpha}p\left(\bar{v}\right)_{xt}+\left[p'\left(\bar{v}\right)y_x\right]_x-\left[p\left(y_x+\bar{v}+m\right)-p\left(\bar{v}\right)\right]_x$$

将(3.46)整合得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(1+T\right)\int_{-\infty}^{\infty}y_t^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left(1+T\right)\int_{-\infty}^{\infty}p'\left(\bar{v}\right)y_x^2\left(x,T\right)\mathrm{d}x+\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t\right)y_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}p'\left(\bar{v}\right)y_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t}{2}p''\left(\bar{v}\right)y_x^2\bar{v}_t\mathrm{d}x+\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t\right)y_tF\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leq C\delta^2+\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t\right)y_tF\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{3.47}$$

其中

$$\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tF\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp(\bar v)_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t\left[p(y_x+\bar v+m)-p(\bar v)-p'(\bar v)y_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.48}$$

在上式中

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp(\bar v)_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t\left[p'(\bar v)\bar v_{xt}+p''(\bar v)\bar v_t\bar v_x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp'(\bar v)\bar v_{xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp''(\bar v)\bar v_t\bar v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^{-\frac{1}{2}}y_t\mathrm{e}^{-\frac{\mu\varsigma^2}{1+t}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\delta^2\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^{-\frac{1}{2}}y_t\mathrm{e}^{-\frac{2\mu\varsigma^2}{1+t}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\delta\int_0^T(1+t)y_t^2\mathrm{d}t+C\delta^2,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t\left[p(y_x+\bar v+m)-p(\bar v)-p'(\bar v)y_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t\left[p'(\bar v)m+o(1)(y_x+m)^2\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp''(\bar v)\bar v_xm\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_tp'(\bar v)m_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t\left[(y_x+m)^2\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_t^2m\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)y_{xt}(y_x+m)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\int_0^T(1+t)y_t^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}y_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

同样地将(3.48)~(3.50)代入(3.47)，则得到以下了基本衰减估计：

$$(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\left(y_x^2+y_t^2\right)(x,T)\mathrm{d}x\le CN_0^2, \tag{3.51}$$

引理 3.6 设$(y,\omega)\in X(0,T)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x, \tag{3.52}$$

证明：

对方程$(3.5)_2$两边同时乘以$(1+t)\omega$，并在$[0,T]\times R$上积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}(1+T)\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\frac{A(y_x+\bar v+m)\omega_x^2}{y_x+\bar v+m}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\mu_r(y_x+\bar v+m)(y_x+\bar v+m)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

由于$y_x+\bar v+m$有正下界，且$A(v),\mu_r(v)$为大于 0 的光滑函数，所以有

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\frac{A(y_x+\bar v+m)\omega_x^2}{y_x+\bar v+m}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.54}$$

$$4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.55}$$

把(3.54)、(3.55)，代入至(3.53)，整理得到

$$(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.56}$$

由初值条件及引理 3.2 得到

$$(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0^2\mathrm{d}x, \tag{3.57}$$

引理 3.7 设 $(y,\omega)\in X(0,T)$ 是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x. \tag{3.58}$$

证明：

将方程$(3.5)_2$对 x 求导，两边同时再乘以 $(1+t)\omega_x$，得到

$$(1+t)\omega_x\omega_{xt}=(1+t)\omega_x\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right]_{xx}-4(1+t)\omega_x\left[\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega\right]_x, \tag{3.59}$$

将(3.59)关于 (t,x) 在 $[0,T]\times R$ 上分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+T)\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x\left[\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.60}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\omega_x\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right]\omega_{xx}^2+(1+t)\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right]_x\omega_x\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right]\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\int_R(1+t)\frac{(y_{xx}+\bar{v}_x+m_x)A'(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\omega_x\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\frac{(y_{xx}+\bar{v}_x+m_x)A(y_x+\bar{v}+m)}{(y_x+\bar{v}+m)^2}\omega_x\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\&\ge C\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.61}$$

并且

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x\left[\mu_r\left(y_x+\overline{v}+m\right)\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq 4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x\left[\mu_r\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega\right]_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\mu_r\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\left(y_{xx}+\overline{v}_x+m_x\right)\mu_r'\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega\omega_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C(\varepsilon+\delta)\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geq C\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

把(3.61)、(3.62)，代入至(3.60)，整理得到

$$
\begin{aligned}
&(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0x}^2\mathrm{d}x+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

结合公式(3.28)和(3.41)，我们有

$$
(1+T)\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq CN_0^2,
\tag{3.64}
$$

引理 3.8 设$(y,\omega)\in X(0,T)$是初值问题(3.5)~(3.6)的解，那么有以下估计

$$
(1+T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0xx}^2\mathrm{d}x.
\tag{3.65}
$$

证明：

将方程$(3.5)_2$对 x 求二次导，再乘上$(1+t)^2\omega_{xx}$，则有

$$
\begin{aligned}
(1+t)^2\omega_{xx}\omega_{xxt}&=(1+t)^2\omega_{xx}\left(\frac{A\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega_x}{y_x+\overline{v}+m}\right)_{xxx}\\
&\quad-4(1+t)^2\omega_{xx}\left[\mu_r\left(y_x+\overline{v}+m\right)\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega\right]_{xx},
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

将(3.66)对(t,x)在$[0,T]\times R$上积分得到，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+T)^2\omega_{xx}^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}\left[\frac{A\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega_x}{y_x+\overline{v}+m}\right]_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\left[\mu_r\left(y_x+\overline{v}+m\right)\left(y_x+\overline{v}+m\right)\omega\right]_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0xx}^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)\omega_x}{y_x+\bar{v}+m}\right]_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}\left[\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\omega_{xxx}+2\left(\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right)_x\omega_{xx}+\left(\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right)_{xx}\omega_x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right)_x(1+t)^2\omega_{xx}\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(y_x+\bar{v}+m)}{y_x+\bar{v}+m}\right)_{xx}(1+t)^2\omega_x\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_x\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\left[\mu_r(y_x+\bar{v}+m)(y_x+\bar{v}+m)\omega\right]_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\left[\mu_r(\bar{v})(y_x+\bar{v}+m)\omega\right]_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\left[(y_x+\bar{v}+m)_{xx}\omega+2(y_x+\bar{v}+m)_x\omega_x+(y_x+\bar{v}+m)\omega_{xx}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\ge C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_x\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

则将上式整理，得到

$$
\frac{1}{2}(1+T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2(x,T)\mathrm{d}x+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{0xx}^2\mathrm{d}x+H,
\tag{3.70}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
H&=-C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega\omega_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xx}\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_x\omega_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C'\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)\omega_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C'\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\delta^2,
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

根据先验估计以及上述引理，有

$$
(1+T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{xx}^2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(1+t)^2\omega_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\varepsilon^2.
\tag{3.72}
$$

下面我们开始定理 3.1 的证明。

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{C_1}+1},\frac{\varepsilon}{\left(2\sqrt{C_1}+1\right)\left(2\sqrt{C_2}+1\right)}\right\}$,

则在定理 1.1 条件下，$N(t)\le\delta\le\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon_0}{2}$。

由局部存在性定理 3.2，在$[0,T_0]$上，令$N(t)=\|(y,\omega)\|_{H^2}+\|y_t\|_{H^1}$，问题(3.5)~(3.6)的解存在，且满足

$$N(t)\le\sqrt{C_1},\ \|N_0\|\le\sqrt{C_1}\delta\le\frac{\varepsilon}{2\sqrt{C_1}+1}<\varepsilon, \tag{3.73}$$

从而满足先验假设 3.1，由先验估计定理 2.2 知，在$[0,T_0]$上，

$$N(t)\le\sqrt{C_2}N_0\le\sqrt{C_2}\delta\le\frac{\varepsilon}{2\sqrt{C_1}+1}<\varepsilon<\varepsilon_0, \tag{3.74}$$

特别地，上式对$T=T_0$也成立。以$T=T_0$为初始，局部存在性定理，可延拓到$[T_0,2T_0]$，依次进行下去，可以将解延拓到$T=+\infty$。

根据引理 3.1 至引理 3.8 我们已经证明先验估计(3.13)成立，由解的局部存在性定理和先验估计(3.13)，我们通过以上可以证明(3.5)~(3.6)的解整体存在，进一步证明了(3.1)~(3.2)的解整体存在，并满足如下估计：

$$\|(u-\bar{u}-\hat{u})(\cdot,t)\|_{L^2}+\|(v-\bar{v}-m)(\cdot,t)\|_{L^2}+\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}=O(1)\delta(t+1)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.75}$$

对于衰减估计(3.49)，我们也可以推广到更高阶导数，如此我们有

$$\|\partial_x^k(u-\bar{u}-\hat{u})(\cdot,t)\|_{L^2}+\|\partial_x^k(v-\bar{v}-m)(\cdot,t)\|_{L^2}+\|\partial_x^k\omega(\cdot,t)\|_{L^2}=O(1)\delta(t+1)^{-\frac{k}{2}},\ k=1,2 \tag{3.76}$$

基于上式，从 Sobolev 引理得到逐点估计

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u-\bar{u}-\hat{u}\|_{L^\infty}+\|v-\bar{v}-m\|_{L^\infty}+\|\omega\|_{L^\infty}\right)=O(1)\delta(t+1)^{-\frac{1}{4}}. \tag{3.77}$$

从而定理 1.1 得到证明。

参考文献

[1] Hsiao, L. and Liu, T.-P. (1992) Convergence to Nonlinear Diffusion Waves for Solutions of a System of Hyperbolic Conservation Laws with Damping. *Communications in Mathematical Physics*, **143**, 599-605. https://doi.org/10.1007/BF02099268

[2] Hsiao, L. and Liu, T.-P. (1993) Nonlinear Diffusive Phenomena of Nonlinear Hyperbolic Systems. *Chinese Annals of Mathematics*, **14**, 465-480.

[3] Hsiao, L and Li, T.T. (1983) Global Smooth Solution of Cauchy Problems for a Class of Quasilinear Hyperbolic Systems. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **4**, 109-115.

[4] Li, T.T., Qin, T.H. (1985) Global Smooth Solutions for a Class of Quasilinear Hyperbolic Systems with Dissipative Terms. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **6**, 199-210.

[5] Nishida, T. (1978) Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics in Fluid Dynamics. Publications Mathematiques D'Orsay 78.02, Department de mathématique, Paris-Sud.

[6] Zheng, Y.S. (1996) Global Smooth Solution to the Adiabatic Gas Dynamics System with Dissipation Terms. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series A*, **17**, 155-162.

[7] Nishihara, K. (1996) Convergence Rates to Nonlinear Diffusion Waves for Solutions of System of Hyperbolic Conservation Laws with Damping. *Journal of Differential Equations*, **131**, 171-188. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0159

[8] Nishihara, K. (1997) Asymptotic Behavior of Solutions of Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping. *Journal of Differential Equations*, **137**, 384-395. https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3268

[9] Nishihara, K., Wang, W.K. and Yang, T. (2000) L*p*-Convergence Rate to Nonlinear Diffusion Waves for *p*-System with Damping. *Journal of Differential Equations*, **161**, 191-218. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3703

[10] Zhu, C.J. and Jiang, M.N. (2006) L*p*-Decay Rates to Nonlinear Diffusion Waves for *p*-System with Nonlinear Damping. *Science in China Series A*, **49**, 721-739. https://doi.org/10.1007/s11425-006-0721-5

[11] Zhao, H.J. (2000) Asymptotic Behaviors of Solutions of Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping, II. *Journal of Differential Equations*, **167**, 467-494. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3793

[12] Jiang, M. and Zhu, C.J. (2009) Convergence to Strong Nonlinear Diffusion Waves for Solutions to *p*-System with Damping On quadrant. *Journal of Differential Equations*, **246**, 50-77. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.03.033

[13] Dafermos, C. (1995) A System of Hyperbolic Conservation Laws with Frictional Damping. In: Casey, J. and Crochet, M.J., Eds., *Theoretical*, *Experimental*, *and Numerical Contributions to the Mechanics of Fluids and Solids*, Birkhäuser, Basel, 294-307. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9229-2_16

[14] Hsiao, L. and Tang, S.Q. (1995) Construction and Qualitative Behavior of the Solution of the Perturbed Riemann Problem for the System of One-Dimensional Isentropic Flow with Damping. *Journal of Differential Equations*, **123**, 480-503. https://doi.org/10.1006/jdeq.1995.1170

[15] Huang, F.-M. and Pan, R.-H. (2003) Convergence Rate for Compressible Euler Equations with Damping and Vacuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **166**, 359-376. https://doi.org/10.1007/s00205-002-0234-5

[16] Li, H.-L. and Saxton, K. (2003) Asymptotic Behavior of Solutions to Quasilinear Hyperbolic Equations with Nonlinear Damping. *Quarterly of Applied Mathematics*, **61**, 295-313. https://doi.org/10.1090/qam/1976371

[17] Pan, R.-H. (2006) Darcy's Law as Long-Time Limit of Adiabatic Porous Media Flow. *Journal of Differential Equations*, **220**, 121-146. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.013

[18] Yu, S.H. (1999) Zero-Dissipation Limit of Solutions with Shocks for Systems of Hyperbolic Conservation Laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **146**, 275-370. https://doi.org/10.1007/s002050050143

[19] Zhu, C.J. (2003) Convergence Rates to Nonlinear Diffusion Waves for Weak Entropy Solutions to P-System with Damping. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **46**, 563-575. https://doi.org/10.1007/BF02884028

[20] Nishida, T. (1978) Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics in Fluid Dynamics . Université de Paris -Sud, Département de Mathématique, Orsay.

[21] Duyn, C.T. and Van Peletier, L.A. (1977) A Class of Similarity Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **1**, 223-233. https://doi.org/10.1016/0362-546X(77)90032-3

[22] Matsumura, A. (1977) Global Existence and Asymptotics of the Solutions of the Second-Order Quasilinear Hyperbolic Equation with the First-Order Dissipation. *Publications of the Research Institute for Mathema*, **13**, 349-379. https://doi.org/10.2977/prims/1195189813

[23] Matsumura, A. and Mei, M. (1999) Convergence to Travelling Fronts of Solutions of the P-System with Viscosity in the Presence of a Boundary. Arch. Ration. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **146**, 1-22. https://doi.org/10.1007/s002050050134

[24] Huang, F.-M., Mei, M. and Wang, Y. (2011) Large Time Behavior of Solutions to N-Dimensional Bipolar Hydrodynamic Models for Semiconductors. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **43**, 1595-1630. https://doi.org/10.1137/100810228