Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 318-325
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111039

树和路的乘积图的广义染色数及博弈染色数

刘佳丽

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2021年12月24日；录用日期：2022年1月19日；发布日期：2022年1月26日

摘 要

本文讨论了简单图树和路的乘积图，给出了树和路的乘积图的一个线性序，介绍了它的广义染色数，同时给出了树和路的乘积图最大出度限制为一个常数的一个定向，并由此介绍了树和路的乘积图的博弈染色数。

关键词

乘积图，博弈染色数，广义染色数

The Generalized Coloring Number and Game Coloring Number of Product Graph of Tree and Path

Jiali Liu

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Dec. 24^{th}, 2021; accepted: Jan. 19^{th}, 2022; published: Jan. 26^{th}, 2022

文章引用: 刘佳丽. 树和路的乘积图的广义染色数及博弈染色数[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 318-325.
DOI: 10.12677/aam.2022.111039

Abstract

This paper considers the product graph of simple graph tree and path, gives a linear order of the product graph of tree and path, and introduces the generalized coloring number of the product graph of tree and path. Meanwhile, we give an orientation that the maximum out-degree of the product graph of tree and path is at most a constant and introduce the game coloring number of the product graph of tree and path.

Keywords

Product Graph, Game Coloring Number, Generalized Coloring Number

1. 引言

在2003年, 图的广义染色数 [1] 首次被提出, 在 1991 年, Bodlaender 提出了图的博弈染色数 [2] 的概念. 类似的, Kierstead 提出了 (a, b) -博弈染色数 [3] 的概念. 乘积图一直是广受关注的一类图, 然而对于乘积图的的广义染色数以及博弈染色数, 研究的较少, 本文将从图的广义染色数和博弈染色数这两个参数出发, 考虑树和路的乘积图的广义染色数和博弈染色数.

本文考虑的乘积图为以下三种: 笛卡尔积, 直积, 强积. 首先我们给出这三种乘积图的定义:

图 A 和图 B 的笛卡尔积(记作 $A\Box B$)由点集 $V(A)\times V(B)$ 组成, 其中, 不同的点 $(v,x),(w,y)\in V(A)\times V(B)$ 相邻当且仅当满足: (1) $v=w$ 且 $xy\in E(B)$, 或(2) $x=y$ 且 $vw\in E(A)$.

图 A 和图 B 的直积(记作 $A\times B$)由点集 $V(A)\times V(B)$ 组成, 其中, 不同的点 $(v,x),(w,y)\in V(A)\times V(B)$ 相邻当且仅当满足: $vw\in E(A)$ 且 $xy\in E(B)$.

图 A 和图 B 的强积(记作 $A\boxtimes B$)由点集 $V(A)\times V(B)$ 组成, 其中, 不同的点 $(v,x),(w,y)\in V(A)\times V(B)$ 相邻当且仅当满足: (1) $v=w$ 且 $xy\in E(B)$, 或(2) $x=y$ 且 $vw\in E(A)$, 或(3) $vw\in E(A)$ 且 $xy\in E(B)$.

由笛卡尔积,直积,强积的定义可知: 强积 $A\boxtimes B$ 是 $A\Box B$ 和 $A\times B$ 的并.

接下来, 我们介绍图的广义染色数的概念, 令 $G=(V,E)$ 是一个图, 令 k 是一个正整数. 令 $\prod$(G) 是 $V(G)$ 的所有线性序的集合, $L\in\prod$(G) . 令 x 和 y 是图 G 的两个顶点. 如果 $x \prec_L y$ 并且存在一条 $y-x$ 的长度最多为 k 的路 P 使得对路上的所有内点 z 满足 x $\prec_L$ z , 我们称 x 是从 y 弱 k- 可达 的. 此外, 如果对路 P 上的所有内点 z 满足 $y \prec_L z$, 我们称 x 是从 y k- 可达 的. 令 $R_k(G_L$, y) 是所有从 y k- 可达 的顶点集. $Q_k(G_L$, y) 是所有从 y 弱 k- 可达 的顶点集, $R_k[G_L$, y] $= R_k(G_L$, y)$\cup${y}, $Q_k[G_L$, y] $= Q_k(G_L$, y)$\cup${y}. 定义图 G 的 *k-coloring number* (记作 $col_k(G)$)和图G 的 *weak k-coloring number* (记作 $wcol_k(G)$)为

$$col_k(G) \;=\; \min_{L\in\prod(G)} \max_{v\in V(G)} |R_k[G_L, y]| \text{ 和}$$

$$wcol_k(G) \;=\; \min_{L\in\prod(G)} \max_{v\in V(G)} |Q_k[G_L, y]|.$$

对于图的博弈染色, 在 1991 年, Bodlaender 提出了图的博弈染色数的概念. 类似的, Kierstead 提出了图的 (a,b) -博弈染色数的概念. 当 $a=1, b=1$ 时, 图的 (a,b) - 博弈染色数即为图的博弈染色数, 因此本文主要考虑树和路的乘积图的非对称情况下的博弈染色数即 $(a,1)$ -博弈染色数. 接下来我们给出图的博弈染色数和 (a,b) -博弈染色数的定义. 图 G 的博弈染色数是由一个标记博弈定义的. 图 G 的标记博弈中, 起初所有的点都未被标记, Alice 和 Bob 轮流标记 G 中未标记的顶点, 由 Alice 先开始标记. 当全部顶点被标记博弈结束. 对于图 G 的每一个顶点 x , 令 $b(x)$ 表示为在 x 被标记前 x 被标记的邻居数. 博弈分数定义为

$$s = 1 + \max_{x\in V(G)} b(x).$$

Alice 的目标是使得分数最小, 而 Bob 的目标是使得分数最大. 博弈染色数为最小的 s 使得 Alice 有一个策略使得分数最多为 s . 记作 $col_g(G)$.

图 G 的 (a,b) -博弈染色数的博弈及分数和标记博弈一样, 不同之处在于每一个标记回合中 Alice 标记 a 个点, 而 Bob 标记 b 个点. (a,b) -博弈染色数为最小的 s 使得 Alice 有一个策略使得分数最多为 s . 记作 (a,b)-$col_g(G)$.

对于一个图 G , 设 $O(G)$ 是图 G 所有定向的集合. 对于图 G 的一个定向 $\vec{G}$ 以及 $\vec{G}$ 的一个点 x , 令 $N^+_{\vec{G}}(x)$ 记作为点 x 的所有外邻居的集合, i.e., $N^+_{\vec{G}}(x) = \{y : x \to y\}$. 令 $d^+_{\vec{G}}(x)$ 为 x 的出度, i.e., $d^+_{\vec{G}}(x) = |N^+_{\vec{G}}(x)|$. 令 $\Delta^+\left(\vec{G}\right) = \max_{v\in V} d^+_{\vec{G}}(v)$, $\Delta^*(G) = \min_{\vec{G}\in O(G)} \Delta^+\left(\vec{G}\right)$.

对于一个图 G ,设 $\vec{G}$ 是图 G 的一个定向, 对于 G 中的每个点 v , 令 L_v 为 $N^+_{\vec{G}}(v)$ 的一个线性序. 令 $\sum$=$\{L_v : v \in V(G)\}$, 如果 $v <_{L_z} u$, 那么称 z 对比 u 优先 v . 如果 $v \in N^+_{\vec{G}}(u)$ 或者存在一个点 z 使得 $u, v \in N^+_{\vec{G}}(z)$ 且 z 对比 u 优先 v , 那么称 v 是 u 的一个 松外邻居 , $R_{\vec{G}}(\sum, U)$ 记作点 u 的松外邻居的集合. 令

$$r_{\vec{G}}(\sum) = \max_{u\in V(G)} |R_{\vec{G}}(\sum, U)|$$

$\vec{G}$ 的 rank 定义为

$$r_{\vec{G}} = \min_{\sum} |r_{\vec{G}}(\sum)|.$$

引理 1 [4] 设 a 是一个整数, 如果图 G 满足 $\Delta^*(G)=k\le a$, 那么 $(a,1)$-$col_g(G)\le 2k+2$.

引理 2 [5] 如果 $\vec{G}$ 是一个 $\Delta^+\left(\vec{G}\right)=k>a$ 的有向图, 令 $r_{\vec{G}}(\sum)=r$, 那么 $(a,1)$-$col_g(G)\le k+\lfloor(1+\frac{1}{a})r\rfloor+2$.

2. 树和路的乘积图的广义染色数

令 T 是一棵树, P 是一条路. 对于树 T 和路 P 的乘积图 G , 我们根据树 T 中点的宽度优先排序以及路 P 中点的排序, 给图 G 的点进行排序. 根据乘积图的特点及图 G 的点的线性序, 通过计算证明得出不同乘积图的广义染色数.

定理 1 对所有的整数 $k>0$ 如果图 $G=T\times P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $wcol_k(G)\le k^2+k+1$. $col_k(G)\le k+2$.

证明 对于树 T , 我们给它的点进行宽度优先排序, 得到树 T 的点的线性序记作 $\sigma\in\prod(T)$. 假设 $x_{0,1}$ 是树的树根, $x_{0,1}$ 为宽度优先分层的第 0 层, 令第 i 层的第 j 个点记为 $x_{i,j}$. 对于路 P , 我们给它的点 $(y_1,y_2,...,y_m,...)$ 进行一个排序记作 τ , $y_i<_\tau y_j$ 当且仅当 $i<j$. 那么对于图 $G=T\boxtimes P$, 点集为 $V(G)$=$((x_{0,1},y_1),(x_{0,1},y_2),...,(x_{0,1},y_m),...,(x_{1,1},y_1),(x_{1,1},y_2)$ $,...,(x_{1,1},y_m),...,(x_{i,1},y_1),(x_{i,1},y_2),...,(x_{i,1},y_m),...)$.

对于图 G 的点进行排序, 令 L 为图 G 的顶点按照以下规则排列的线性序. 对图 G 的任意两个点 $(x_{i,j},y_m)$, $(x_{i',j'},y_{m'})$:

1. 如果 $i\ne i^{'}$, 那么 $(x_{i,j},y_m)\prec_L(x_{i',j'},y_{m'})$ 当且仅当 $i\le i^{'}$.
2. 如果 $i=i^{'}$,$j\ne j^{'}$, 那么 $(x_{i,j},y_m)\prec_L(x_{i',j'},y_{m'})$ 当且仅当 $j\le j^{'}$.
3. 如果 $i=i^{'}$且$j=j^{'}$, 那么 $(x_{i,j},y_m)\prec_L(x_{i',j'},y_{m'})$ 当且仅当 $m\le m^{'}$.

对于图 G 的点进行分层: 令 $(x_{0,1},y_1)$, $(x_{0,1},y_2)$,..., $(x_{0,1},y_m)$,...为第一层的点, 令 $(x_{1,1},y_1)$, $(x_{1,1},y_2)$,..., $(x_{1,1},y_m)$,...为第二层的点, ..., 令 $(x_{i,1},y_1)$, $(x_{i,1},y_2)$,..., $(x_{i,1},y_m)$,...为第 i 层的点.

由图 G 的分层以及弱 k -可达的定义可知：当 $|i-j|\ge 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此对于任意一个点 $v\in G$(设点 v 为第 l 层的点)来说, 从 v 弱 k -可达的点 y_0 可能落在第 $p(l-k\le p\le l,l\ge k)$ 层, 且 $y_0\prec_L v$, 而由于 G 中的点在同一层没有边, 因此,
从 v 弱 k -可达的点在第 l 层至多为 $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-1$ 层至多为 $2\lceil\frac{k}{2}\rceil$,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-2$ 层至多为 $1+2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,(k\ge 2)$,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-3$ 层至多为 $2\lceil\frac{k}{2}\rceil,(k\ge 3)$,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-4$ 层至多为 $1+2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,(k\ge 4)$,
,...,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-i$ 层至多为 $2\lceil\frac{k}{2}\rceil,(k\ge i)$
从 v 弱 k -可达的点在第 $l-i-1$ 层至多为 $1+2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,(k\ge i+1)$,

因此, 我们有当 k 为偶数时, $wcol_k(G) \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + (2\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 + 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\frac{k}{2} + 1$. 当 k 为奇数时, $wcol_k(G) \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + (2\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 + 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\frac{k-1}{2} + 2\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$. 整理得: $wcol_k(G) \le k^2 + k + 1$.

由图 G 的分层可知：当 $| i - j | \ge 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此, 对于任意一个点 $v \in G$ 来说, 当 $k \ge 2$ 时,从 v k-可达的点 y_0 只能落在点 v 所在的层上(不妨设为第 l 层)及点 v 的上一层(不妨设为第 $l-1$ 层), 且 $y_0 \prec_L v$, 而由于 G 中的点在同一层没有边, 因此从 v k-可达的点在第 l 层至多为 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, 而从 v k-可达的点在第 $l-1$ 层至多为 $\lceil \frac{k+2}{2} \rceil$, 因此, 我们有$col_k(G) \le k+2$.

定理 2 对所有的整数 $k > 0$ 如果图 $G = T \Box P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $wcol_k(G) \le k^2 + k + 1$. $0 < k \le 2$ 时, $col_k(G) \le 3$; $k > 2$ 时, $col_k(G) \le 2k - 1$.

证明 对于树 T , 我们给它的点进行宽度优先排序, 得到树 T 的点的线性序记作 $\sigma \in \prod(T)$. 假设 $x_{0,1}$ 是树的树根, $x_{0,1}$ 为宽度优先分层的第 0 层, 令第 i 层的第 j 个点记为 $x_{i,j}$. 对于路 P , 我们给它的点 $(y_1, y_2, ..., y_m, ...)$ 进行一个排序记作 τ,$y_i <_\tau y_j$ 当且仅当 $i < j$. 那么对于图 $G = T \boxtimes P$, 点集为 $V(G)$=$((x_{0,1}, y_1), (x_{0,1}, y_2), ..., (x_{0,1}, y_m), ..., (x_{1,1}, y_1), (x_{1,1}, y_2), ...,$
$(x_{1,1}, y_m), ..., (x_{i,1}, y_1), (x_{i,1}, y_2), ..., (x_{i,1}, y_m), ...)$.

由于两个图 $T \boxtimes P$ 和 $T \times P$ 的点集相同, 我们对图 $T \times P$ 中点的排序和分层采用定理1中的方法, 为了避免重复, 这里直接使用定理1中的点的排序和分层.

由图 G 的分层以及弱 k-可达的定义可知：当 $| i - j | \ge 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此对于任意一个点 $v \in G$(设点 v 为第 l 层的点)来说, 从 v 弱 k-可达的点 y_0 可能落在第 $p(l - k \le p \le l, l \ge k)$ 层, 且 $y_0 \prec_L v$, 因此,
从 v 弱 k-可达的点在第 l 层至多为 k ,
从 v 弱 k-可达的点在第 $l-1$ 层至多为 $1 + 2(k-1)$,
从 v 弱 k-可达的点在第 $l-2$ 层至多为 $1 + 2(k-2), (k \ge 2)$,
从 v 弱 k-可达的点在第 $l-3$ 层至多为 $1 + 2(k-3), (k \ge 3)$,
,...,
从 v 弱 k-可达的点在第 $l-i$ 层至多为 $1 + 2(k-i), (k \ge i)$,
因此, 我们有 $wcol_k(G) \le k + 1 + 2(k-1) + 1 + 2(k-2) + ... + 1 + 2(k-k) + 1$. 整理得: $wcol_k(G) \le k^2 + k + 1$.

由图 G 的分层可知：当 $| i - j | \ge 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此, 对于任意一个点 $v \in G$ 来说, 当 $k \ge 2$ 时,从 v k-可达的点 y_0 只能落在点 v 所在的层上(不妨设为第 l 层)及点 v 的上一层(不妨设为第 $l-1$ 层), 且 $y_0 \prec_L v$, 由定义可知 G 中的点在同一层有边, 且对于任意一点 $(x_{i,j}, y_m)$ 至多只有两个邻居为 $(x_{i,j}, y_{m-1})$, $(x_{i,j}, y_{m+1})$, 因此 $k > 2$ 时, 从 v k-可达的点在第 l 层至多为 $k-2$, 而从 v k-可达的点在第 $l-1$ 层至多为 k , 因此, 我们有 $0 < k \le 2$ 时, $col_k(G) \le 3$; $k > 2$ 时, $col_k(G) \le 2k - 1$.

定理 3 对所有的整数 $k > 0$ 如果图 $G = T \boxtimes P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $wcol_k(G) \le 2k^2 + k + 1$. $col_k(G) \le 2k + 3$.

证明 对于树 T , 我们给它的点进行宽度优先排序, 得到树 T 的点的线性序记作 $\sigma \in \prod(T)$. 假设 $x_{0,1}$ 是树的树根, $x_{0,1}$ 为宽度优先分层的第 0 层, 令第 i 层的第 j 个点记为 $x_{i,j}$. 对于路 P , 我们

给它的点 $(y_1, y_2, ..., y_m, ...)$ 进行一个排序记作 τ , $y_i <_\tau y_j$ 当且仅当 $i < j$. 那么对于图 $G = T \boxtimes P$, 点集为 $V(G)$=$((x_{0,1}, y_1), (x_{0,1}, y_2), ..., (x_{0,1}, y_m), ..., (x_{1,1}, y_1), (x_{1,1}, y_2)$
$, ..., (x_{1,1}, y_m), ..., (x_{i,1}, y_1), (x_{i,1}, y_2), ..., (x_{i,1}, y_m), ...)$.

由于两个图 $T \boxtimes P$ 和 $T \times P$ 的点集相同, 我们对图 $T \times P$ 中点的排序和分层采用定理 1 中的方法, 为了避免重复, 这里直接使用定理1中的点的排序和分层.

由图 G 的分层以及弱 k -可达的定义可知：当 $|\ i - j\ | \geq 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此对于任意一个点 $v \in G$(设点 v 为第 l 层的点)来说, 从 v 弱 k -可达的点 y_0 可能落在第 $p(l - k \leq p \leq l, l \geq k)$ 层, 且 $y_0 \prec_L v$, 因此,
从 v 弱 k -可达的点在第 l 层至多为 k ,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l - 1$ 层至多为 $1 + 2k$,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l - 2$ 层至多为 $1 + 2k, (k \geq 2)$,
,...,
从 v 弱 k -可达的点在第 $l - i$ 层至多为 $1 + 2k, (k \geq i)$,
因此, 我们有 $wcol_k(G) \leq k + (1 + 2k)k + 1$. 整理得: $wcol_k(G) \leq 2k^2 + k + 1$.

由图 G 的分层可知：当 $|\ i - j\ | \geq 2$ 时, 第 i 层的点与第 j 层的点没有边相连, 因此, 对于任意一个点 $v \in G$ 来说, 当 $k \geq 2$ 时, 从 v k -可达的点 y_0 只能落在点 v 所在的层上(不妨设为第 l 层)及点 v 的上一层(不妨设为第 $l - 1$ 层), 且 $y_0 \prec_L v$, 由定义可知 G 中的点在同一层有边, 且对于任意一点 $(x_{i,j}, y_m)$ 至多只有两个邻居为 $(x_{i,j}, y_{m-1})$, $(x_{i,j}, y_{m+1})$, 因此 $k > 2$ 时, 从 v k -可达的点在第 l 层至多为 k , 而从 v k -可达的点在第 $l - 1$ 层至多为 $k + 2$, 因此, 我们有 $col_k(G) \leq 2k + 3$.

3. 树和路的乘积图的博弈染色数

令 T 是一棵树, P 是一条路. 对于树 T 和路 P 的乘积图 G 的博弈染色数, 我们通过给图 G 一个合适的定向, 使得图 G 的最大出度为一个常数, 再结合引理 1 得出图 G 的 $(a, 1)$ -博弈染色数.

定理 4 对于任意整数 $a \geq 2$ 如果 $G = T \times P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a, 1)$-$col_g(G)$≤6 .

证明 对于图 G 的点, 我们直接采用定理 1 的排序和分层.

接下来我们对图 G 的边进行定向, 由 $T \times P$ 定义以及我们对 $T \times P$ 中点的分层易知, 图 $T \times P$ 没有同一层的边. 对于相邻层的边分为两种情况：
1. $e = ((x_{i-1,a}, y_{m-1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_{m-1})$.
2. $e = ((x_{i-1,a}, y_{m+1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_{m+1})$.

因此, 对任意一个点 $(x_{i,j}, y_m)$ 都有 $d^+_G((x_{i,j}, y_m)) \leq 2$ 根据引理 1 可得 $(a, 1)$-$col_g(G)$≤6 .

定理 5 对于任意整数 $a \geq 2$ 如果 $G = T \Box P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a, 1)$-$col_g(G)$≤6 .

证明 对于图 G 的点, 我们直接采用定理 1 的排序和分层.

接下来我们对图 G 的边进行定向,对于同一层的边 $e = ((x_{i,j}, y_{m-1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$

DOI: 10.12677/aam.2022.111039

到 $(x_{i,j}, y_{m-1})$. 对于相邻层的边 $e = ((x_{i-1,a}, y_m)$, $(x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_m)$. 因此,对任意一个点 $(x_{i,j}, y_m)$ 都有 $d_G^+((x_{i,j}, y_m)) \leq 2$ 根据引理 1 可得 $(a,1)$-$col_g(G)$≤6 .

定理 6 对于任意整数 $a \geq 4$, 如果 $G = T \boxtimes P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a,1)$-$col_g(G)$≤10 .

证明 对于图 G 的点, 我们直接采用定理 1 的排序和分层.

接下来我们对图 G 的边进行定向, 对于同一层的边 $e = ((x_{i,j}, y_{m-1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i,j}, y_{m-1})$. 对于相邻层的边分为三种情况:

1. $e = ((x_{i-1,a}, y_m), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_m)$.
2. $e = ((x_{i-1,a}, y_{m-1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_{m-1})$.
3. $e = ((x_{i-1,a}, y_{m+1}), (x_{i,j}, y_m))$ 方向从 $(x_{i,j}, y_m)$ 到 $(x_{i-1,a}, y_{m+1})$.

因此, 对任意一个点 $(x_{i,j}, y_m)$ 都有 $d_G^+((x_{i,j}, y_m)) \leq 4$ 根据引理 1 可得 $(a,1)$-$col_g(G)$≤10 .

对于 $a < 4$ 时, 结合定理 1 的定向, 可以得到以下推论:

推论 1 对于任意整数 $a < 4$ 如果 $G = T \boxtimes P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 令 $r_{\vec{G}}(\sum) = r$, 那么 $(a,1) - col_g(G)$≤4+ $\lfloor(1+\frac{1}{a})r\rfloor + 2$.

证明 由定理 3 可知对任意一个点 $(x_{i,j}, y_m)$, $d_G^+((x_{i,j}, y_m)) \leq 4$, 根据引理 2 可得 $(a,1) - col_g(G)$≤4+ $\lfloor(1+\frac{1}{a})r\rfloor + 2$.

4. 结语

本文给出了树和路的乘积图的广义染色数的上界以及 (a,b) -博弈染色数的上界. 并在证明过程中给出了树和路的乘积图的一个线性序以及最大出度限制为一个常数的定向, 在研究某些图的参数时, 需要用到图的最大出度. 该定向提供了研究思路. 在图论中, 乘积图的广义染色数和博弈染色数的研究较少, 而不同图的乘积图的广义染色数及博弈染色数等都是值得进一步探讨的问题. 本文给出了树和路的乘积图以及他们的广义染色数, 讨论了乘积图的博弈染色数, 那么对于任意两个图的乘积图的广义染色数是否有一个线性的上界呢, 这也是值得进一步探讨的问题.

参考文献

[1] Kierstead, H.A. and Yang D. (2003) Orderings on Graphs and Game Coloring Number. *Order*, **20**, 255-264. https://doi.org/10.1023/B:ORDE.0000026489.93166.cb

[2] Bodlaender, H.L. (1991) On the Complexity of Some Coloring Games. In: Möhring, R.H., Eds., *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1990. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, 30-40. https://doi.org/10.1007/3-540-53832-1_29

[3] Kierstead, H.A. (2005) Asymmetric Graph Coloring Games. *Journal of Graph Theory*, **48**, 169-185. https://doi.org/10.1002/jgt.20049

[4] Kierstead, H.A. and Yang, D. (2005) Very Asymmetric Marking Games. *Order*, **22**, 93-107. https://doi.org/10.1007/s11083-005-9012-y

[5] Yang, D. and Zhu, X. (2008) Activation Strategy for Asymmetric Marking Games. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 1123-1132. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2007.07.004