Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(6), 2095-2104**
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106219

Hans汉斯

Navier-Stokes-Cahn-Hillard方程在Morrey-Campanato空间中的正则性准则

王乙竹，宋　悦

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 1064885876@qq.com

收稿日期：2021年5月21日；录用日期：2021年6月9日；发布日期：2021年6月24日

摘　要

本文给出了Navier-Stokes-Cahn-Hillard方程在三维Morrey-Campanato空间中解的一个正则性准则，利用了Gagliardo-Nirenberg不等式、Sobolev嵌入定理、插值不等式以及先验估计等。

关键词

Navier-Stokes-Cahn-Hillard方程，Morrey-Campanato空间，正则性准则，局部解

Regularity Criteria for the Navier-Stokes-Cahn-Hillard Equation in the Morrey-Campanato Space

Yizhu Wang, Yue Song

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1064885876@qq.com

Received: May 21st, 2021; accepted: Jun. 9th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

This paper gives a regularity criterion for the Navier-Stokes-Cahn-Hillard equation in the 3D Morrey-Campanato space which uses Gagliardo-Nirenberg inequality, Sobolev embedding theorem, interpolation inequality, and prior estimates.

文章引用: 王乙竹, 宋悦. Navier-Stokes-Cahn-Hillard 方程在 Morrey-Campanato 空间中的正则性准则[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 2095-2104. DOI: 10.12677/aam.2021.106219

Keywords

Navier-Stokes-Cahn-Hillard Equation, Morrey-Campanato Space, Regularity Criteria, Local Solution

1. 介绍

在本文中考虑在 $\mathbb{R}^3$ 上带有初值问题的 Navier-Stokes-Cahn-Hillard 方程

$$\partial_t u+(u\cdot\nabla)u+\nabla\pi-\varepsilon\Delta u=\mu\nabla\phi\,, \tag{1.1}$$

$$\partial_t\phi+(u\cdot\nabla)\phi=\Delta\mu\,, \tag{1.2}$$

$$-\Delta\phi+f'(\phi)=\mu\,, \tag{1.3}$$

$$\nabla\cdot u=0\,, \tag{1.4}$$

$$u(x,0)=u_0,\phi(x,0)=\phi_0\,, \tag{1.5}$$

其中 $u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ 表示速度场，$\pi=\pi(x,t)$ 表示压强，$\phi=\phi(x,t)$ 表示序参量，$\varepsilon>0$ 表示粘性系数，μ 表示化学势，$f(\phi)=\frac{1}{4}(\phi^2-1)^2$ 表示双井位势。

当 $\phi=0$ 时，上述方程成为著名的 Navier-Stokes 方程。Navier-Stokes 方程已经被进行了广泛的研究，其中最著名代表性的开创性成果来自于 Leray [1]和 Hopf [2]，他们对任意给定的初始速度 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 构建了方程的整体弱解，通常称为 Leray-Hopf 弱解。从 20 世纪 70 年代末开始，Scheffer 便对 Navier-Stokes 方程弱解的部分正则性进行了研究，较深刻的结果由 Caffarelli，Kohn，Nirenberg [3]在 1982 年得到，他们给出了一个适当弱解的定义，并证明了这种解的奇异集的 Hausdorff 测度为零。

方程(1.1)~(1.5)是由 Cahn-Hillard 系统和不可压缩 Navier-Stokes 系统耦合而成。[4]中得到了二维 Navier-Stokes-Cahn-Hillard 系统弱解的 H^1 正则性和 H^2 时间正则性。关于更多 Navier-Stokes-Cahn-Hillard 系统的研究，请读者参考[5] [6] [7] [8] [9]。

在[10]中，Montgomery-Smith 证明了 Navier-Stokes 方程的对数改进正则性准则，即解 u 满足

$$\int_0^T\frac{\|u\|_{L^q}^p}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^q}\right)}\mathrm{d}t<\infty,\ \frac{2}{p}+\frac{3}{q}\le 1,\ 2<q<\infty$$

那么 u 在 $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上是正则的。[11]中建立了 Navier-Stokes 方程的对数改进正则性准则。

本文给出了 Navier-Stokes-Cahn-Hillard 方程在三维 Morrey-Campanato 空间中解的一个正则性准则，主要结果如下，为方便起见，设 $\varepsilon=1$。

定理 1.1 假设 $(u_0,\phi_0)\in H^1(\mathbb{R}^3)\times H^2(\mathbb{R}^3)$ 且 $\nabla\cdot u_0=0$，对于某个 $T(0<T<\infty)$，(u,ϕ) 是方程(1.1)~(1.5)在 $[0,T)$ 上的局部光滑解。如果 u 满足：

$$\int_0^T\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\mathrm{d}t<\infty,\ 0<r<1,\ 2\le p\le\frac{3}{r} \tag{1.6}$$

或

$$\int_0^T \frac{\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)} \mathrm{d}t < \infty,\quad 0<r<1,\quad 2\le p\le \frac{3}{r} \tag{1.7}$$

那么 $(u,\phi)(x,t)$ 可以延拓超过 T。

定理 1.2 假设 $(u_0,\phi_0)\in H^1(\mathbb{R}^3)\times H^2(\mathbb{R}^3)$ 且 $\nabla\cdot u_0=0$，对于某个 $T(0<T<\infty)$，(u,ϕ) 是方程(1.1)~(1.5)在 $[0,T)$ 上的局部光滑解。如果 ∇u 满足：

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}} \mathrm{d}t < \infty,\quad 0<\gamma\le 1,\quad 2\le p\le \frac{3}{\gamma} \tag{1.8}$$

或

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}} + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)} \mathrm{d}t < \infty,\quad 0<\gamma\le 1,\quad 2\le p\le \frac{3}{\gamma} \tag{1.9}$$

那么 $(u,\phi)(x,t)$ 可以延拓超过 T。

下面我们将介绍一些对定理证明有用的定义和引理。

2. 预备知识

以下定义和定理参考[12] [13]。

定义 2.1 对于 $1<p\le q\le\infty$，Morrey-Campanato 空间 $\dot{M}^{p,q}$ 定义为

$$\dot{M}^{p,q}=\left\{ f\in L_{loc}^p(\mathbb{R}^3): \|f\|_{\dot{M}^{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{3/q-3/p}\|f\|_{L^p(B(x,R))}<\infty \right\},$$

其中 $B(x,R)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上以 x 为圆心，R 为半径的闭球。

定义 2.2 对于 $1\le q'\le p'<\infty$，定义齐次空间 $N^{p',q'}$ 是关于函数 f 的空间且是 $L^{q'}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间，其中 f 可以分解成一个原子序列 $f=\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$，其中函数 $(g_k)_k\subset L_{comp}^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 且满足关于 g_k 支集的直径 d_k 的不等式：$d_k\le 1$ 和 $\sum_{k\in\mathbb{N}} d_k^{\frac{3}{q'}-\frac{3}{p'}}\|g_k\|_{L^{p'}}<\infty$。$N^{p',q'}$ 是一个Banach空间，其范数为 $\|f\|_{N^{p',q'}}=\inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} d_k^{\frac{3}{q'}-\frac{3}{p'}}\|g_k\|_{L^{p'}}, f=\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k\right\}$，其中下确界 inf 是指 f 分解成一个原子序列的所有可能性。

引理 2.3 对于 $1\le q'\le p'<\infty$，如果 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，那么有

$$\left(\dot{M}^{p,q}\right)^* = N^{p',q'}.$$

即对于 $f\in\dot{M}^{p,q}$，$g\in N^{p',q'}$，有 $\int_{\mathbb{R}^3} fg\mathrm{d}x\le\|f\|_{\dot{M}^{p,q}}\|g\|_{N^{p',q'}}$。

引理 2.4 对于 $1\le q'\le p'<2$，$\frac{1}{q'}=1-\frac{r}{3}$，相应点乘是一个从 $L^2(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ 到 $N^{p',q'}(\mathbb{R}^3)$ 的有界双线性算子，那么存在常数 $C>0$，使得对于任意的 $u\in L^2(\mathbb{R}^3)$，$v\in\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$，有 $\|uv\|_{N^{p',q'}}\le\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}$。

引理 2.5 对于 $0\le r\le\frac{3}{2}$，设空间 $\mathrm{M}\left(\dot{B}_{r,1}^2\mapsto L^2\right)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中局部平方可积函数空间，相应点乘是 Besov 空

间 $\dot{B}_{2}^{r,1}\left(\mathbb{R}^{3}\right)$ 到 $L^{2}\left(\mathbb{R}^{3}\right)$ 的有界双线性映射。$\mathrm{M}\left(\dot{B}_{r,1}^{2}\mapsto L^{2}\right)$ 上的范数由点乘算子的范数决定

$$\|f\|_{\mathrm{M}\left(\dot{B}_{r,1}^{2}\mapsto L^{2}\right)}=\sup\left\{\|fg\|_{L^{2}}:\|g\|_{\dot{B}_{2}^{r,1}}\le 1\right\},$$

那么，$f\in\mathrm{M}\left(\dot{B}_{r,1}^{2}\mapsto L^{2}\right)$ 当且仅当 $f\in\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^{3}\right)$。

引理 2.6 (Gagliardo-Nirenberg 不等式) 对于 $0<q$，$r\le\infty$，$0<\alpha<1$，$u\in W^{m,r}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$，有

$$\left\|D^{j}u\right\|_{L^{p}}\le C\left\|D^{m}u\right\|_{L^{r}}^{\alpha}\|u\|_{L^{q}}^{1-\alpha},$$

其中 $\frac{j}{m}\le\alpha<1$，$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{q}$。

3. 定理证明

在这部分，我们将给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明，利用先验估计和 Gronwall 不等式解决局部光滑解的正则性准则，即证明下式成立

$$\limsup_{t\to T^{-}}\left(\|\nabla u\|_{L^{2}}^{2}+\|\Delta\phi\|_{L^{2}}^{2}\right)\le C. \tag{3.1}$$

将方程(1.1)两端同时乘 u，在 $\mathbb{R}^{3}$ 上积分并利用分部积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{3}}|u|^{2}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{3}}\mu\nabla\phi u\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

将方程(1.2)两端同时乘 μ，在 $\mathbb{R}^{3}$ 上积分并利用分部积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{3}}\left(|\nabla\phi|^{2}+2f(\phi)\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^{3}}\mu\nabla\phi u\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^{3}}|\nabla\mu|^{2}\mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

将(3.2)和(3.3)两式相加，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{3}}\left(|u|^{2}+|\nabla\phi|^{2}+2f(\phi)\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^{3}}\left(|\nabla u|^{2}+|\nabla\mu|^{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

我们获得基本能量估计

$$\|u\|_{L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\right)}+\|u\|_{L^{2}\left(0,T;H^{1}\right)}\le C, \tag{3.4}$$

$$\|\phi\|_{L^{\infty}\left(0,T;H^{1}\right)}\le C, \tag{3.5}$$

$$\|\nabla\mu\|_{L^{2}\left(0,T;L^{2}\right)}\le C. \tag{3.6}$$

将方程(1.2)两端同时乘 ϕ，在 $\mathbb{R}^{3}$ 上积分并利用分部积分，结合(1.3)，(1.4)，Young’s 不等式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{3}}|\phi|^{2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{3}}|\Delta\phi|^{2}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^{3}}\left(\phi^{3}-\phi\right)\Delta\phi\mathrm{d}x=-3\int_{\mathbb{R}^{3}}\phi^{2}|\nabla\phi|^{2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^{3}}\phi\Delta\phi\mathrm{d}x\\&\le-\int_{\mathbb{R}^{3}}\phi\Delta\phi\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{3}}|\Delta\phi|^{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{3}}|\phi|^{2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式，获得估计

$$\|\phi\|_{L^{2}\left(0,T;H^{2}\right)}\le C. \tag{3.7}$$

下面将利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式($n=3$)

$$\|\phi\|_{L^\infty}^2 \le C\|\phi\|_{L^6}\|\phi\|_{H^2}, \tag{3.8}$$

以及 Sobolev 嵌入定理

$$\|\phi\|_{L^6} \le C\|\phi\|_{H^1}, \tag{3.9}$$

结合(1.3)，(3.5)~(3.7)，(3.8)，(3.9)，Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\Delta\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\left(f'(\phi)-\mu\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\mu|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\left(\phi^3-\phi\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le C + C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi^4|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C + C\|\nabla\phi\|_{L^\infty\left(0,T;L^2\right)}^2\int_0^T\|\phi\|_{L^\infty}^4\mathrm{d}t \\
&\le C + C\int_0^T\|\phi\|_{L^6}^2\|\phi\|_{H^2}^2\mathrm{d}t \le C + C\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T;H^1\right)}^2\|\phi\|_{L^2\left(0,T;H^2\right)}^2 \le C,
\end{aligned}$$

获得估计

$$\|\phi\|_{L^2\left(0,T;H^3\right)} \le C, \tag{3.10}$$

$$\|\phi\|_{L^4\left(0,T;L^\infty\right)} \le C, \tag{3.11}$$

$$\|\nabla\phi\|_{L^2\left(0,T;L^\infty\right)} \le C\|\phi\|_{L^2\left(0,T;H^3\right)} \le C. \tag{3.12}$$

接下来我们将进行高阶估计，改写方程(1.1)为分量形式($i=1,2,3$)

$$\partial_t u_i + (u\cdot\nabla)u_i + \partial_i\pi - \Delta u_i = \mu\partial_i\phi,$$

将上式左右两端同时乘 $-\Delta u_i$ ，对 i 求和，结合(1.3)，(1.4)，利用分部积分，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|\Delta u|^2\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u_i\Delta u_i\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\phi\partial_i\phi\Delta u_i\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

将(1.2)先作用 Δ ，再乘 $\Delta\phi$ ，结合(1.3)，(1.4)，利用分部积分，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\phi|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\left|\Delta^2\phi\right|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{R^3}\Delta f'(\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\phi\partial_i\phi\Delta u_i\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_i\partial_i\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

将(3.13)和(3.14)相加，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2 + |\Delta\phi|^2\right)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2 + \left|\Delta^2\phi\right|^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\Delta u\mathrm{d}x - 2\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_i\partial_i\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\Delta f'(\phi)\Delta^2\phi\mathrm{d}x \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

首先考虑 u 满足定理 1.1 中条件的情况，利用 Hölder 不等式，Young’s 不等式，Sobolev 嵌入定理(3.9)，估计 I_3

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta f'(\phi) \Delta^2 \phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\left(\phi^3 - \phi\right) \Delta^2 \phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \left(6\phi |\nabla \phi|^2 + 3\phi^2 \Delta\phi - \Delta\phi\right) \Delta^2 \phi \mathrm{d}x \\
&\le C\left(\|\phi\|_{L^6} \|\nabla\phi\|_{L^6}^2 + \|\phi\|_{L^\infty}^2 \|\Delta\phi\|_{L^2} + \|\Delta\phi\|_{L^2}\right) \|\Delta^2\phi\|_{L^2} \\
&\le C\left(\|\phi\|_{H^1} \|\nabla\phi\|_{L^6} \|\Delta\phi\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^\infty}^2 \|\Delta\phi\|_{L^2} + \|\Delta\phi\|_{L^2}\right) \|\Delta^2\phi\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2 \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi\|_{L^\infty}^4 \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2 + \|\phi\|_{L^\infty}^4 + 1\right) \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式(3.8)，Sobolev 嵌入定理(3.9)和(3.5)，I_3 又可写成估计

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + +C\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2 + \|\phi\|_{L^\infty}^4 + 1\right) \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + +C\left(\|\nabla\phi\|_{H^1}^2 + \|\phi\|_{L^6}^2 \|\phi\|_{H^2}^2 + 1\right) \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + 1\right) \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

对于 I_1 和 I_2 的估计，分为两种情况。

第一种情况：当 $2 < p \le \frac{3}{r}$ 时，利用引理 2.3，引理 2.4，Young's 不等式和插值不等式 $\|u\|_{\dot{H}^r} \le \|u\|_{L^2}^{1-r} \|\nabla u\|_{L^2}^r$，$0 < r < 1$，估计 I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla) u \Delta u \mathrm{d}x \le \|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\nabla u \Delta u\|_{N^{p',\frac{3}{3-r}}} \le \|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{\dot{H}^r} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le \|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \|\Delta u\|_{L^2}^r \|\Delta u\|_{L^2}^1 = \left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\|\Delta u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} \\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

类似地，我们继续估计 I_2，得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -2\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_i \partial_i \nabla\phi \Delta\phi \mathrm{d}x = 2\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \partial_i \nabla\phi \nabla\Delta\phi \mathrm{d}x \le C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\Delta\phi\nabla\Delta\phi\|_{N^{p',\frac{3}{3-r}}} \\
&\le C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\Delta\phi\|_{\dot{H}^r} \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2} \le C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^{1-r} \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{1+r} \\
&= C\left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} \le C\left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\|\Delta\phi\|_{L^2} \|\Delta^2\phi\|_{L^2}\right)^{\frac{1+r}{2}} \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

第二种情况：当 $p = 2$ 时，利用引理 2.5，Hölder 不等式，Young's 不等式和插值不等式 $\|u\|_{\dot{B}_2^{r,1}} \le \|u\|_{L^2}^{1-r} \|\nabla u\|_{L^2}^r$，$0 < r < 1$，估计 I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla) u \Delta u \mathrm{d}x \le \|u\nabla u\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2} \le \|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{\dot{B}_2^{r,1}} \|\Delta u\|_{L^2} \le \|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \|\Delta u\|_{L^2}^r \|\Delta u\|_{L^2}^1 \\
&= \left(\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}} \left(\|\Delta u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} \le \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

同样估计 I_2，得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\partial_i\nabla\phi\nabla\Delta\phi\mathrm{d}x \le C\|u\Delta\phi\|_{L^2}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2} \le C\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}\|\Delta\phi\|_{\dot{B}_2^{r,1}}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2} \\
&\le C\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^{1-r}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{1+r} = C\left(\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} \\
&\le C\left(\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\right)^{\frac{1+r}{2}} \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2. \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

将上述估计(3.16)，(3.18)~(3.21)代入(3.15)中，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|\Delta\phi|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2+|\Delta^2\phi|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\le C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \\
&\le C\left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

由(3.7)，(3.11)可知，

$$
\int_0^T\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\mathrm{d}t \le C. \tag{3.22}
$$

利用 Gronwall 不等式，上式和定理假设条件(1.6)，得

$$
\begin{aligned}
\sup\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right\} &\le \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{\int_0^T\left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\mathrm{d}t\right\} \\
&= \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{T+\int_0^T\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\mathrm{d}t\right\} \\
&< \infty.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

或将上述估计(3.16)~(3.20)代入(3.14)中，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|\Delta\phi|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2+|\Delta^2\phi|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\le C\left(\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+1\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right) \\
&\le C\left(\frac{\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}+1\right)\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)\le C\left(\frac{\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}+1\right)\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),$$

利用 Gronwall 不等式，定理假设条件(1.7)，得

$$\sup\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right\}\le\left(e+\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{\exp\left\{T+\int_0^T\frac{\|u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}\mathrm{d}t\right\}\right\}<\infty. \tag{3.24}$$

由(3.23)，(3.24)可知，(3.1)成立，定理 1.1 得证。

最后考虑 ∇u 满足定理 1.2 中条件的情况，对于 I_1 和 I_2 的估计，与之前类似，分为两种情况。

第一种情况：当 $2<p\le\frac{3}{\gamma}$ 时，利用(1.4)，引理 2.3，引理 2.4，Young’s 不等式和插值不等式 $\|u\|_{\dot{H}^\gamma}\le\|u\|_{L^2}^{1-\gamma}\|\nabla u\|_{L^2}^{\gamma}$， $0<\gamma\le1$，估计 I_1

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\Delta u\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\left((u\cdot\nabla)u\right)\nabla u\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla u\nabla u+u\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla u\nabla u\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla u\nabla u\|_{N^{p',\frac{3}{3-\gamma}}}\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^\gamma}\|\Delta u\|_{L^2}\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\gamma}\|\Delta u\|_{L^2}^{\gamma}=C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}\\&\le\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.25}$$

估计 I_2，得

$$\begin{aligned}I_2&=-2\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_i\partial_i\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla^2\phi\Delta\phi\|_{N^{p',\frac{3}{3-\gamma}}}\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla^2\phi\|_{\dot{H}^\gamma}\|\Delta\phi\|_{L^2}\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta\phi\|_{L^2}^{1-\gamma}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{\gamma}=C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}\\&\le C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\le\frac{1}{4}\|\Delta^2\phi\|_{L^2}^2+C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

第二种情况：当 $p=2$ 时，利用引理 2.5，Hölder 不等式，Young’s 不等式和插值不等式 $\|u\|_{\dot{B}_2^{\gamma,1}}\le\|u\|_{L^2}^{1-\gamma}\|\nabla u\|_{L^2}^{\gamma}$， $0<\gamma\le1$，估计 I_1

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\Delta u\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\nabla u\|_{L^2}\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla u\|_{\dot{B}_2^{\gamma,1}}\|\nabla u\|_{L^2}\\&\le\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}\|\nabla u\|_{L^2}^{2-\gamma}\|\Delta u\|_{L^2}^{\gamma}=\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}\\&\le\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.27}$$

用同样的方法估计 I_2，得

$$\begin{aligned}
I_2 &= -2\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_i\partial_i\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x \le C\|\nabla u\|_{L^2}\left\|\nabla^2\phi\Delta\phi\right\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}\left\|\nabla^2\phi\right\|_{\dot{B}_2^{\gamma,1}}\|\Delta\phi\|_{L^2} \\
&\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^{2-\gamma}\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^{\gamma} = C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\|\Delta\phi\|_{L^2}\left\|\Delta^2\phi\right\|_{L^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \\
&\le \frac{1}{4}\left\|\Delta^2\phi\right\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{2,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

将上述估计(3.16)，(3.25)~(3.28)代入(3.15)中，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|\Delta\phi|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2+\left|\Delta^2\phi\right|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式，(3.22)和定理假设条件(1.8)，得

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right\} &\le \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{\int_0^T\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4+1\right)\mathrm{d}t\right\} \\
&= \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{T+\int_0^T\left(\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|\phi\|_{L^\infty}^4\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\mathrm{d}t\right\} \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

或将上述估计(3.17)，(3.25)~(3.28)代入(3.15)中，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|\Delta\phi|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2+\left|\Delta^2\phi\right|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2+1\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right) \\
&\le C\left(\frac{\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}+1\right)\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right)\le C\left(\frac{\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}+1\right)\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right),$$

利用 Gronwall 不等式，定理假设条件(1.9)，得

$$\sup\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2\right\}\le\left(e+\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\Delta\phi_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{\exp\left\{T+\int_0^T\frac{\|\nabla u\|_{\dot{M}^{p,\frac{3}{\gamma}}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\Delta\phi\|_{L^2}^2}{1+\ln\left(e+\|u\|_{L^6}\right)}\mathrm{d}t\right\}\right\}<\infty. \tag{3.30}$$

由(3.29)，(3.30)可知，(3.1)成立，定理 1.2 得证。

参考文献

[1] Leary, J. (1934) Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, **63**, 193-248. https://doi.org/10.1007/BF02547354

[2] Hopf, E. (1951) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Mathematische Nachrichten*, **4**, 213-231. https://doi.org/10.1002/mana.3210040121

[3] Caffarelli, L., Kohn, R. and Nirenberg, L. (2010) Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **35**, 771-831. https://doi.org/10.1002/cpa.3160350604

[4] He, Y.N. and Feng, X.L. (2016) Uniform H^2-Regularity of Solution for the 2D Navier-Stokes/Cahn-Hilliard Phase Field Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **441**, 815-829. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.040

[5] Cao, C.S. and Gal, C.G. (2012) Global Solutions for the 2D NS-CH Model for a Two-Phase Flow of Viscous, Incompressible Fluids with Mixed Partial Viscosity and Mobility. *Nonlinearity*, **25**, 3211-3234. https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/11/3211

[6] Cherfils, L., Gatti, S. and Miranville, A. (2018) Asymptotic Behavior of Higher-Order Navier-Stokes-Cahn-Hilliard Systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4776-4794. https://doi.org/10.1002/mma.4930

[7] Hosseini, B., Turek, S., Möller, M. and Palmes, C. (2017) Isogeometric Analysis of the Navier-Stokes-Cahn-Hilliard Equations with Application to Incompressible Two-Phase Flows. *Journal of Computational Physics*, **348**, 171-194. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.07.029

[8] Mininni, R.M., Miranville, A. and Romanelli, S. (2017) Higher-Order Cahn-Hilliard Equations with Dynamic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **449,** 1321-1339. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.12.071

[9] You, B. (2019) Global Attractor of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System with Moving Contact Lines. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **18**, 2283-2298. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019103

[10] Montgomery-Smith, S. (2005) Conditions Implying Regularity of the Three Dimensional Navier-Stokes Equation. *Applications of Mathematics*, **50**, 451-464. https://doi.org/10.1007/s10492-005-0032-0

[11] Fan, J., Jiang, S., Nakamura, G. and Zhou, Y. (2011) Logarithmically Improved Regularity Criteria for the Navier-Stokes and MHD Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **13**, 557-571. https://doi.org/10.1007/s00021-010-0039-5

[12] Lemarié-Rieusset, P.G. (2002) Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. CRC Press, Boca Raton. https://doi.org/10.1201/9780367801656

[13] Lemarié-Rieusset, P.G. (2007) The Navier-Stokes Equations in the Critical Morrey-Campanato Space. *Revista Matematica Iberoamericana*, **23**, 897-930. https://doi.org/10.4171/RMI/518