

具有阶段结构和反馈控制的非自治单种群模型的持久性

何夏晴, 林 涵, 陈佳琳, 陈凤德

福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州
Email: fdchen@fzu.edu.cn

收稿日期: 2021年4月11日; 录用日期: 2021年4月25日; 发布日期: 2021年5月18日

摘 要

本文研究具有阶段结构和反馈控制的非自治单种群模型的持久性问题, 借助微分不等式理论, 我们得到一组保证系统持久的充分性条件。

关键词

阶段结构, 单种群, 反馈控制

Permanence of a Non-Autonomous Single Species Model with Stage-Structured and Feedback Control

Xiaqing He, Han Lin, Jialin Chen, Fengde Chen

College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou Fujian
Email: fdchen@fzu.edu.cn

Received: Apr. 11th, 2021; accepted: Apr. 25th, 2021; published: May 18th, 2021

Abstract

A non-autonomous single species stage-structured system with feedback control is studied in this paper, by using the differential inequality theory, a set of sufficient conditions which ensure the

permanence of the system is obtained.

Keywords

Stage-Structured, Single Species, Feedback Control

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

人类会对自然界中的各种资源进行开采，如对动物进行捕获等等，因此，研究具有捕获的种群生态系统的动力学行为就变得非常重要。Gopalsamy 和 Weng [1]受控制论影响，以人类的捕获作为控制变量，首次提出单种群反馈控制模型

$$\begin{aligned}\dot{n} &= rn(t) \left[1 - \frac{a_1 n(t) + a_2 n(t-\tau)}{K} - cu(t) \right], \\ \dot{u} &= -au(t) + bn(t).\end{aligned}$$

这里 n 表示种群的密度， u 表示反馈控制变量。在该模型中，作者探讨了正平衡点的全局稳定性以及分支现象等等。其后，学者们提出了各种各样的反馈控制生态种群模型([1]-[7]以及所引文献)，并在模型的稳定性、绝灭性和持久性等方面进行了系统研究。丁孝全和程述汉[3]提出了如下单种群阶段结构反馈控制模型

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_2 - \gamma x_1 - \alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t-\tau), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t-\tau) - \beta x_2^2(t) - cx_2(t)u(t), \\ \frac{du}{dt} &= -au(t) + bx_2(t).\end{aligned}$$

作者证得模型的边界平衡点 E_0 是恒为不稳定的；对所有的 $\tau > 0$ ， E 都是局部稳定的，此外，如果 $a\beta > bc$ ，则正平衡点 E 是全局渐近稳定的。

在此基础上，杨英钟[4]认为非自治情形更为符合实际，由此提出了如下模型：

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \alpha(t)x_2 - d_1(t)x_1 - \alpha(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s)ds} x_2(t-\tau), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s)ds} x_2(t-\tau) - \beta(t)x_2^2(t) - c(t)x_2(t)u(t), \\ \frac{du}{dt} &= -a(t)u(t) + b(t)x_2(t).\end{aligned}\tag{1}$$

作者在假设 $\alpha(t), d_1(t), \beta(t), c(t), a(t), b(t)$ 都是正的连续的 ω 周期函数下，并借助重合度定理，证明了上述系统至少存在一个 T -周期正解。

众所周知，一般的非自治系统更为符合实际，而对这类系统，我们不可能探讨系统的周期解，系统的持久性变得非常重要，这意味着种群能长久持续生存。本文中，对于上述模型(1)，我们做出如下假设：

(1) 对于任一有正上下界的连续函数 $g(t)$, 本文恒设:

$$g^L = \inf_{t \in [0, +\infty)} g(t), \quad g^U = \sup_{t \in [0, +\infty)} g(t)$$

(2) 系统(1)满足具有如下初值条件:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad u(t) = \psi(t) > 0, \\ \varphi_i(0) &> 0, \quad \psi(0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad t \in [-\tau, 0]. \end{aligned}$$

(3) 系统(1)的系数满足条件:

(H) $b(t), a(t), d_1(t), c(t), f(t), e_1(t)$ 有正的上下界的连续函数。

2. 持久性

本节我们将给出一组保证系统(2.1)持久的充分性条件。

引理 2.1. 系统(1)的第一个方程等价于方程

$$x_1(t) = \int_{t-\tau}^t b(s) e^{-\int_s^t d_1(u) du} x_2(s) ds. \quad (2)$$

证明 方程(2)两边关于 t 求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= b(t) e^{-\int_t^t d_1(u) du} x_2(t) - b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(u) du} x_2(t-\tau) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t b(s) e^{-\int_s^t d_1(u) du} x_2(s) ds \left(-\int_s^t d_1(u) du \right)' \\ &= b(t) x_2(t) - b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(u) du} x_2(t-\tau) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t b(s) e^{-\int_s^t d_1(u) du} x_2(s) ds (-d_1(t)) \\ &= b(t) x_2 - d_1(t) x_1 - b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s) ds} x_2(t-\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

引理证毕。

定理 2.1. 假设(H)成立, 进一步假设

$$b^L e^{-d_1^U \tau} > c^U M_3, \quad (4)$$

成立, 那么系统(1)是持久的, 其中 M_3 由(8)所定义。

注记 2.1. 由于 M_3 是由后文所定义, 条件(4)看上去很简洁, 但却并不直观。在将 M_3 和 M_2 代入(4)后, 我们可以得到如下推论。

推论 2.1. 假设(H)成立, 进一步假设

$$b^L e^{-d_1^U \tau} f^L a^L > c^U e_1^U b^U e^{-d_1^L \tau}, \quad (5)$$

成立, 那么系统(1)是持久的。

注记 2.2. 一个非常有趣的事实: 假设系统(2.1)的系数都是常数, 则条件(5)等价于

$$fa > ce_1 \quad (6)$$

这一条件刚好就是丁孝全和程述汉[3]一文中保证系统正平衡点全局稳定的充分性条件。

定理 2.1 的证明将由以下两个定理来完成。

定理 2.2. 设 $(x_1(t), x_2(t), u(t))^T$ 为系统(1)的任一正解, 则有:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq M_1, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq M_2, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq M_3. \quad (7)$$

其中:

$$M_1 = b^U e^{-d_1^L \tau} \tau M_2, \quad M_2 = \frac{b^U e^{-d_1^L \tau}}{a^L}, \quad M_3 = \frac{e_1^U M_2}{f^L}. \quad (8)$$

证明。 设 $(x_1(t), x_2(t), u(t))^T$ 为系统(1)的任一正解, 由系统(1)的第二个方程可知:

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s) ds} x_2(t-\tau) - a(t) x_2^2(t) - c(t) x_2(t) u(t) \\ &\leq b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s) ds} x_2(t-\tau) - a(t) x_2^2(t) \\ &\leq b^U e^{-d_1^L \tau} x_2(t-\tau) - a^L x_2^2(t). \end{aligned} \quad (9)$$

由此可知:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq \frac{b^U e^{-d_1^L \tau} \text{def}}{a^L} = M_2. \quad (10)$$

对任给的足够小的正数 $\varepsilon_1 > 0$, 由(10)可知存在 $T_1 > 0$, 当 $\forall t > T_1$ 时, 有

$$x_2(t) < M_2 + \varepsilon_1. \quad (11)$$

当 $\forall t > T_1$ 时, 由系统(1)的第三个方程有

$$\dot{u}(t) = -f(t)u(t) + e_1(t)x_2(t) \leq -f^L u(t) + e_1^U (M_2 + \varepsilon_1). \quad (12)$$

由此可知有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq \frac{e_1^U (M_2 + \varepsilon_1)}{f^L}. \quad (13)$$

注意到 ε_1 是任意的足够小的正数, 上式中令 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, 可只有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq \frac{e_1^U M_2 \text{def}}{f^L} = M_3. \quad (14)$$

由引理 2.1 可知有

$$x_1(t) = \int_{t-\tau}^t b(s) e^{-\int_s^t d_1(u) du} x_2(s) ds. \quad (15)$$

(15)结合(11)可知当 $\forall t > T_1 + \tau$ 时, 有

$$x_1(t) \leq b^U e^{-d_1^L \tau} \tau (M_2 + \varepsilon_1). \quad (16)$$

注意到 ε_1 是任意的足够小的正数, 上式中令 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, 那么有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq b^U e^{-d_1^L \tau} \tau M_2. \quad (17)$$

定理 2.2 证毕。

定理 2.3. 设 $(x_1(t), x_2(t), u(t))^T$ 为系统(1)的任一正解, 假设(H)和(4)成立, 则有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq m_1, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \geq m_2, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq m_3. \quad (18)$$

其中

$$m_1 = b^L e^{-d_1^U \tau} \tau m_2, \quad m_2 = \frac{b^L e^{-d_1^U \tau} - c^U M_3}{a^L}, \quad m_3 = \frac{e_1^L m_2}{f^U}. \quad (19)$$

证明。设 $(x_1(t), x_2(t), u(t))^T$ 为系统(1)的任一正解, 由定理条件

$$b^L e^{-d_1^U \tau} > c^U M_3$$

可知对足够小的正数 $\varepsilon_2 > 0$, 有

$$b^L e^{-d_1^U \tau} > c^U (M_3 + \varepsilon_2) \quad (20)$$

成立。由(14)可知对满足(20)的充分小的正数 $\varepsilon_2 > 0$, 存在充分大的 $T_2 > T_1$, 当 $\forall t > T_2$ 时, 有

$$u(t) < M_3 + \varepsilon_2 \quad (21)$$

当 $\forall t > T_2$ 时, 由系统(1)的第二个方程有

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s) ds} x_2(t-\tau) - a(t) x_2^2(t) - c(t) x_2(t) u(t) \\ &\geq b(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_1(s) ds} x_2(t-\tau) - a(t) x_2^2(t) - c(t) x_2(t) (M_3 + \varepsilon_2) \\ &\geq b^L e^{-d_1^U \tau} x_2(t-\tau) - a^U x_2^2(t) - c^U (M_3 + \varepsilon_2) x_2(t). \end{aligned} \quad (22)$$

由此可知

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \geq \frac{b^L e^{-d_1^U \tau} - c^U (M_3 + \varepsilon_2)}{a^U}. \quad (23)$$

注意到 $\varepsilon_2 > 0$ 是任意小的正数, 在上式中令 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 立即可得

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \geq \frac{b^L e^{-d_1^U \tau} - c^U M_3}{a^U} \stackrel{\text{def}}{=} m_2. \quad (24)$$

对任给的足够小的正数 $\varepsilon_3 > 0$ (不妨设 $\varepsilon_3 < \frac{1}{2} m_2$), 由(24)可知存在 $T_3 > T_2$, 当 $\forall t > T_3$ 时, 有

$$x_2(t) \geq m_2 - \varepsilon_3 \quad (25)$$

对于系统(1)的第三个方程, 当 $\forall t > T_3$ 时, 有

$$\dot{u}(t) = -f(t)u(t) + e_1(t)x_2(t) \geq -f^U u(t) + e_1^L (m_2 - \varepsilon_3). \quad (26)$$

由此可知,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq \frac{e_1^L (m_2 - \varepsilon_3)}{f^U}. \quad (27)$$

注意到 ε_3 是任意的足够小的正数, 上式中令 $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, 可知有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq \frac{e_1^L m_2}{f^U} \stackrel{\text{def}}{=} m_3. \quad (28)$$

由引理 2.1 可知有

$$x_1(t) = \int_{t-\tau}^t b(s) e^{-\int_s^t d_1(u) du} x_2(s) ds. \quad (29)$$

(15)结合(25)可知当 $\forall t > T_3 + \tau$ 时, 有

$$x_1(t) \geq b^L e^{-d_1^U \tau} \tau (m_2 - \varepsilon_3). \quad (30)$$

注意到 ε_3 是任意的足够小的正数, 上式中令 $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, 那么有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq b^L e^{-d_1^U \tau} \tau m_2. \quad (31)$$

定理 2.3 证毕。

定理 2.1 的证明. 定理 2.1 是定理 2.2 和 2.3 的直接推论, 证毕。

3. 数值模拟

杨英钟在文献[4]中探讨了模型(1)的周期正解的存在性, 但是作者并没有给出数值模拟以表明结果的可行性, 我们这里借助 matlab 给出例子, 以表明我们结果的可行性。

例 3.1. 考虑如下例子

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(t) \right) x_2 - x_1 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(t-1) \right) e^{-1} x_2(t-1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(t-1) \right) e^{-1} x_2(t-1) - (3 + \cos(t)) x_2^2(t) - \left(1 - \frac{\sin(t)}{2} \right) x_2(t) u(t), \\ \frac{du}{dt} &= -(4 + \sin(t)) u(t) + \left(1 - \frac{\cos(t)}{2} \right) x_2(t). \end{aligned} \quad (32)$$

这里, 相应于模型(1), 我们取

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(t), \quad d_1(t) = 1, \quad \tau = 1, \quad f(t) = 4 + \sin(t), \\ a(t) &= 3 + \cos(t), \quad c(t) = 1 - \frac{\sin(t)}{2}, \quad e_1(t) = 1 - \frac{\cos(t)}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

计算可知

$$b^L f^L a^L = 2 \times 3 \times 2 = 12 > \frac{27}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = c^U e_1^U b^U. \quad (34)$$

进而有

$$b^L e^{-d_1^U \tau} f^L a^L > c^U e_1^U b^U e^{-d_1^L \tau} \quad (35)$$

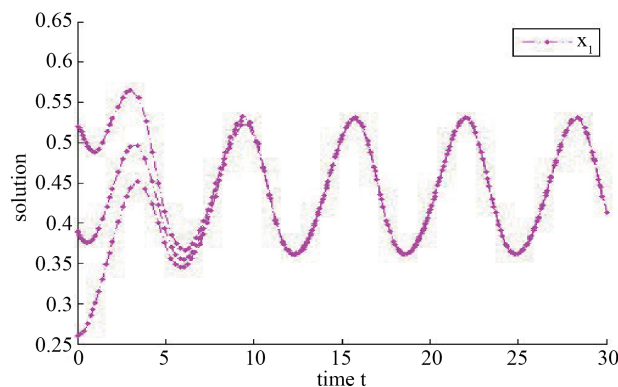


Figure 1. Dynamic behaviors of the system (32) with $x_1(0) = 0.26, 0.39, 0.52$

图 1. 系统(32)中 $x_1(0) = 0.26, 0.39, 0.52$ 时的动力学行为

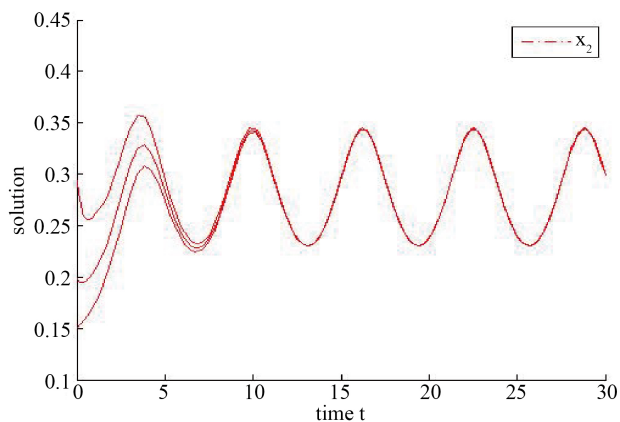


Figure 2. Dynamic behaviors of the system (32) with $x_2(0) = 0.15, 0.2, 0.3$

图 2. 系统(32)中 $x_2(0) = 0.15, 0.2, 0.3$ 时的动力学行为

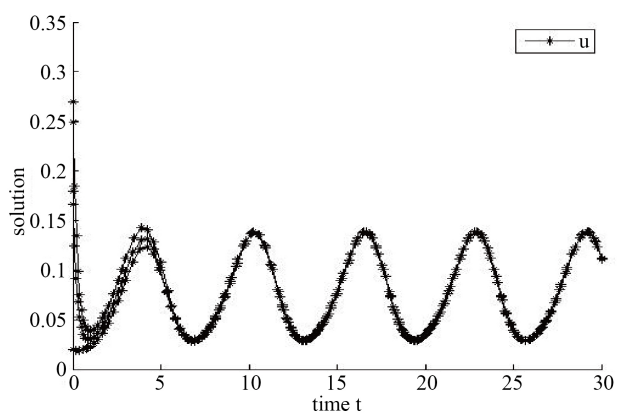


Figure 3. Dynamic behaviors of the system (32) with $y(0) = 0.02, 0.18, 0.27$

图 3. 系统(32)中 $y(0) = 0.02, 0.18, 0.27$ 时的动力学行为

成立, 由推论 2.1 可知系统(32)是持久的, 此外, 数值模拟(图 1~3)表明我们的结果是成立的, 由杨英钟一文可知系统(32)至少存在一个正周期解。

参考文献

- [1] Gopalsamy, K. and Weng, P.X. (1993) Feedback Regulation of Logistic Growth. *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, **16**, 177-192. <https://doi.org/10.1155/S0161171293000213>
- [2] Chen, F., Yang, J. and Chen, L. (2010) Note on the Persistent Property of a Feedback Control System with Delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 1061-1066. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.01.045>
- [3] 丁孝全, 程述汉. 具反馈控制的时滞阶段结构种群模型的稳定性[J]. *生物数学学报*, 2006, 21(2): 225-232.
- [4] 杨英钟. 具有阶段结构和反馈控制的非自治单种群模型的正周期解[J]. *沈阳大学学报(自然科学版)*, 2018, 30(6): 511-515.
- [5] Chen, F. (2006) The Permanence and Global Attractivity of Lotka-Volterra Competition System with Feedback Controls. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **7**, 133-143. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2005.01.006>
- [6] Han, R. and Chen, F. (2015) Global Stability of a Commensal Symbiosis Model with Feedback Controls. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, **2015**, Article No. 15.
- [7] Yang, K., Miao, Z., Chen, F., et al. (2016) Influence of Single Feedback Control Variable on an Autonomous Holling-II Type Cooperative System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **435**, 874-888. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.061>